DET

KONGELIGE DANSKE

VIDENSKABERNES SELSKABS SKRIFTER.

SJETTE RÆKKE.

NATURVIDENSKABELIG OG MATHEMATISK

AFDELING.

ANDET BIND.

MED TYVE TAVLER.

KJØBENHAVN.

BIANCO LUNOS KGL. HOF-BOGTRYKKERI (F. DREYER).

1881—1886.

INDHOLD.

Side

Fortegnelse over Selskabets Medlemmer. Maj 1886 . . . . . V.

1. **Eug. Warming:** Familien Podostemaceae. Første Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explication des planches en français . . . . . 1.
2. **L. Lorenz:** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet . . . . . 35.
3. **Eug. Warming:** Familien Podostemaceae. Anden Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explication des planches en français . . . . . 77.
4. **Odin T. Christensen:** Bidrag til Kundskaben om Manganets Ilter . . . . . 131.
5. **L. Lorenz:** Farvespredningens Theori . . . . . 165.
6. **J. P. Gram:** Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français . . . . . 183.
7. **L. Lorenz:** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal . . . . . 309.
8. **M. P. A. Traustedt:** Spolia atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explication des planches en français . . . . . 334.
9. **Christian Bohr:** Om Iltens Afvigelse fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle 401.
10. — : Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler . . . . . 419.
11. **T. N. Thiele:** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser . . . . . 451.

FORTEGNELSE

OVER

DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS

MEDLEMMER.

MAJ 1886.

Protektor:

Hans Majestæt Kongen.

Præsident:

J. N. Madvig.

Sekretær: *H. G. Zeuthen.*
Redaktør: *Vilh. Thomsen.*
Kasserer: *C. F. Lütken.*

Kasse-Kommissionen.

J. L. Ussing. *A. Steen.* *J. F. Johnstrup.* *P. E. Holm.*

Revisorer.

L. A. Colding. *H. F. A. Topsoe.*

Ordbogs-Kommissionen.

Vilh. Thomsen. *L. Wimmer.*

Kommissionen for Udgivelsen af et dansk Diplomatarium og Regesta diplomatica.

E. Holm. *H. F. Rordam.* *Joh. Steenstrup.*

Indenlandske Medlemmer.

Madvig, Johan Nicolai, Dr. jur. & phil., Gehejmekonferensraad, fh. Professor i klassisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Elefantordenen, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og af St. Olafsordenen, Storofficer af den franske Æreslegions Orden, Ridder af den preussiske Orden *pour le mérite*, af den russiske Hvide Ørns Orden og af den nederlandske Løveorden, Selskabets Præsident.

Steenstrup, Johannes Japetus Smith, Dr. med. & phil., Etatsraad, fh. Professor i Zoologi ved Kjøbenhavns Universitet, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen, Kommandør af den spanske Isabella den Katholskes Orden og af den italienske Kroneorden, Ridder af den preussiske Orden *pour le mérite.*

Wegener, Caspar Frederik, Dr. phil., Gehejmekonferensraad, fh. Gehejmearkivar, Kgl. Historiograf og Ordenshistoriograf, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af den græske Frelserorden, af den russiske St. Annaorden og af Nordstjernen, Kommandør af St. Olafsordenen.

Engelstoft, Christian Thorning, Dr. theol., Biskop over Fyns Stift, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand.

Ussing, Johan Louis, Dr. phil., LL. D., Professor i klassisk Filologi og Arkæologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Officer af den græske Frelserorden.

Hannover, Adolph, Dr. med., Professor, Ridder af Danebrog.

Andræ, Carl Christopher Georg, Dr. phil., Gehejmekonferensraad, fh. Direktør for Gradmaalingen, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af den preussiske Kroneorden og af den sicilianske Frants den Førstes Orden.

Gislason, Konrad, Dr. phil., Professor i de nordiske Sprog ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Colding, Ludvig August, LL. D., Professor, fh. Stadsingeniør i Kjøbenhavn, Indenrigsministeriets tekniske Konsulent, Ridder af Danebrog.

Müller, Carl Ludvig, Lic. theol., Dr. phil., Etatsraad, Direktør for den kongelige Møntsamling og Antiksamlingen samt Inspektør ved Thorvaldsens Museum, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Kommandør af St. Olafsordenens 2den Klasse, af Nordstjernen og af St. Annaordenen.

Holten, Carl Valentin, Professor i Fysik ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af St. Olafsordenen og af Nordstjernen, dekoreret med Fortjenstmedaillen og det russiske røde Kors.

Thomsen, Hans Peter Jürgen Julius, Dr. med. & phil., Professor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Direktør for den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Steen, Adolph, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Rink, Hinrich Johannes, Dr. phil., Justitsraad, fh. Direktør for den Kgl. Grønlandske Handel, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Johnstrup, Johannes Frederik, Professor i Mineralogi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Barfoed, Christen Thomsen, Dr. med. & phil., Professor, Lektor i Kemi og Farmaci ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af St. Olafsordenen.

Lange, Johan Martin Christian, Dr. phil., Professor, Lærer i Botanik ved den Kgl. Veterinær og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af den italienske Kroneorden.

Lorenz, Ludvig Valentin, Dr. phil., Professor, Lærer i Fysik og Naturlære ved Officerskolen, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Mehren, August Michael Ferdinand van, Dr. phil., Professor i semitisk-orientalsk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Kommandør af St. Stanislausordenen.

Holm, Peter Edvard, Dr. phil , Professor i Historie ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Lund, Georg Frederik Vilhelm, Dr. phil., Professor, fh. Rektor ved Aarhus Kathedralskole, Ridder af Danebrog.

Lütken, Christian Frederik, Dr. phil., Professor i Zoologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Rordam, Holger Frederik, Dr. phil., Sognepræst i Lyngby, Ridder af Danebrog.

Zeuthen, Hieronymus Georg, Dr. phil., extraord. Professor i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og af Nordstjernen, Selskabets Sekretær.

Schiellerup, Hans Carl Frederik Christian, Professor, Dr. phil., konst. Observator ved Kjøbenhavns Universitets Astronomiske Observatorium, Lærer i Tegning ved den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog.

Jorgensen, Sofus Mads, Dr. phil., Lektor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog.

Christiansen, Christian, Professor i Fysik ved den polytekniske Læreanstalt i Kjøbenhavn.

Fausboll, Michael Viggo, Dr. phil., Professor i indisk-orientalsk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet.

Thorkelsson, Jón, Dr. phil., Rektor ved Reykjavíks lærde Skole, Ridder af Danebrog.

Krabbe, Harald, Dr. med., Lærer i Anatomi ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog.

Thomsen, Vilhelm Ludvig Peter, Dr. phil., Docent i sammenlignende Sprogvidenskab ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog, Selskabets Redaktør.

Wimmer, Ludvig Frands Adalbert, Dr. phil., Professor i nordisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Lange, Julius Henrik, Docent i Kunsthistorie ved Kjøbenhavns Universitet og ved Kunstakademiet, Ridder af Danebrog.

Topsoe, Haldor, Dr. phil., Arbejdsinspektør, Lærer i Kemi ved Officerskolen i Kjøbenhavn, Ridder af Danebrog.

Warming, Eugen, Dr. phil., Professor i Botanik ved Kjøbenhavns Universitetet, Ridder af den brasilianske Roseorden.

Petersen, Peter Christian Julius, Dr. phil., Docent i Mathematik ved den polytekniske Læreanstalt og ved Officerskolen i Kjøbenhavn.

Thiele, Thorvald Nikolai, Dr. phil., Professor i Astronomi ved Kjøbenhavns Universitet.

Meinert, Frederik Vilhelm August, Dr. phil., 1ste Inspektor ved Universitetets zoologiske Museum.

Goos, August Herman Ferdinand Carl, Dr. jur., Professor i Lovkyndighed ved Kjøbenhavns Universitet, extraord. Assessor i Højesteret, Overinspektør for Fængselsvæsenet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Rostrup, Frederik Georg Emil, Docent i Plantepathologi ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole.

Steenstrup, Johannes Christoffer Hagemann Reinhardt, Dr. jur., Professor Rostgardianus i nordisk Historie og Antikviteter ved Kjøbenhavns Universitet.

Gertz, Martin Clarentius, Dr. phil., Professor i klassisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet.

Nellemann, Johannes Magnus Valdemar, Dr. jur., Justitsminister og Minister for Island, extraord. Assessor i Højesteret, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og den belgiske Leopoldsorden.

Jørgensen, Adolf Ditlev, Gehejmearkivar, Ridder af Danebrog.

Heiberg, Johan Ludvig, Dr. phil., Bestyrer af Borgerdydskolen i Kjøbenhavn.

Finsen, Vilhjálmur Ludvig, Dr. jur., Assessor i Højesteret, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Hoffding, Harald, Dr. phil., Professor i Filosofi ved Kjøbenhavns Universitet.

Kroman, Kristian Frederik Vilhelm, Dr. phil., Professor i Filosofi ved Kjøbenhavns Universitet.

Müller, Peter Erasmus, Dr. phil., Kammerherre, Hofjægermester, Overforster for anden Inspektion, Ridder af Danebrog og af St. Stanislaus Ordenen.

Udenlandske Medlemmer.

Chevreul, Michel-Eugène, Medlem af det franske Institut i Paris, Ridder af Danebrog.

Weber, Wilhelm, Dr. med. & phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Göttingen.

Airy, Sir *George Biddell,* LL. D., D. C. L., Kongl. Astronom ved Observatoriet i Greenwich, Medlem af Royal Society i London.

Gottsche, *C. M.,* Dr. med., Læge i Altona.

Bunsen, *Robert Wilhelm,* Dr. phil., Gehejmeraad, Professor i Kemi ved Universitetet i Heidelberg, Ridder af Danebrog.

Owen, *Richard,* D. C. L., LL. D., Superintendent over British Museum, Medlem af Royal Society i London.

Daubrée, *A.*, Professor i Geologi ved Muséum d'Histoire naturelle, Medlem af det franske Institut i Paris.

Carlson, *Frederik Ferdinand,* Dr. theol. & phil., fh. Statsraad i Stockholm, Medlem af det Svenske Akademi, Ridder af Danebrog.

Styffe, *Carl Gustaf,* Dr. phil., fh. Bibliothekar ved Universitetsbibliotheket i Upsala.

Broch, *Ole Jacob,* Dr. phil., Professor i Mathematik i Kristiania, fh. Chef for det Kgl. Norske Marine-Departement.

Edlund, Erik, Dr. phil., Professor i Fysik ved det Kongelige Svenske Videnskabernes Akademi i Stockholm.

Hooker, Sir *Joseph Dalton*, M. D., D. C. L., LL. D., Direktør for den Kongelige Botaniske Have i Kew, Medlem af Royal Society i London.

Rossi, *Giambattista de*, Commendatore, Direktør for de arkæologiske Samlinger i Rom.

Rawlinson, Sir *Henry Creswicke,* D. C. L., LL. D., Generalmajor, bestandig Direktør for det Asiatiske Selskab, Medlem af Royal Society i London.

Böhtlingk, Otto, Dr. phil., Gehejmeraad, Medlem af Videnskabernes Akademi i St. Petersborg, i Leipzig.

Bugge, Elseus Sophus, Dr. phil., LL. D., Professor i sammenlignende indoeuropæisk Sprog forskning og Oldnorsk ved Kristiania Universitet.

Amari, Michele, italiensk Senator, Professor i Firenze.

Cobet, Carl Gabriel, Professor i Leiden.

Koehne, Bernhard von, Friherre, virkelig Statsraad, Medlem af Videnskabernes Akademi i St. Petersborg.

Stephani, Ludolph, virkelig Statsraad, Medlem af Videnskabernes Akademi i St. Petersborg.

Lovén, Sven, Dr. med. & phil., Professor, Medlem af Videnskabernes Akademi i Stockholm, Kommandør af Danebrog.

Kjerulf, Theodor, Dr. phil., Professor i Mineralogi ved Kristiania Universitet.

De Candolle, Alphonse, fh. Professor ved Akademiet i Genève.

Lubbock, Sir *John,* Baronet, D. C. L., LL. D., Vice-Kansler for Universitetet i London og Vice-Præsident i Royal Society i London.

Agardh, Jacob Georg, Dr. med. & phil., fh. Professor i Botanik ved Lunds Universitet.

Huggins, William, D. C. L., LL. D., fysisk Astronom, Medlem af Royal Society i London.

Joule, James Prescott, D. C. L., LL. D., Fysiker i Manchester, Medlem af Royal Society i London.

Cayley, Arthur, D. C. L., LL. D., Professor i Mathematik ved Universitetet i Cambridge, Medlem af Royal Society i London.

Haan, David Bierens de, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Leiden.

Unger, Carl Richardt, Dr. phil., Professor i germansk og romansk Filologi ved Universitetet i Kristiania.

Hermite, Charles, Professor i Mathematik ved École polytechnique og Faculté des Sciences, Medlem af det franske Institut i Paris.

Salmon, George, D. D., Professor i Theologi ved Universitetet i Dublin, Medlem af Royal Society i London.

Cremona, Luigi, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet og Direktør for Ingeniørskolen i Rom.

Kirchhoff, Gustav Robert, Dr. phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Berlin.

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand, Dr. phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Berlin.

Huxley, Thomas H., LL. D., Professor ved den Kgl. Bjergværksskole i London.

Ludwig, Carl Friedrich Wilhelm, Dr. med., Professor i Fysiologi ved Universitetet i Leipzig.

Delisle, Léopold-Victor, Medlem af det franske Institut, Direktør for Bibliothèque Nationale i Paris, Kommandør af Danebrog.

Struve, Otto Wilhelm, Gehejmeraad, Direktør for Observatoriet i Pulkova.

Miklosich, Franz, Dr. phil., Professor i slaviske Sprog ved Universitetet i Wien.

Allman, George James, M. D., LL. D., fh. Professor i Naturhistorie i Edinburgh, Medlem af Royal Society i London.

Thomson, Sir *William*, LL. D., D. C. L., Professor i Fysik ved Universitetet i Glasgow, Medlem af Royal Society i London.

Tait, P. Guthrie, Professor i Fysik ved Universitetet i Edinburgh.

Malmström, Carl Gustaf, Dr. phil., kgl. svensk Rigsarkivar, Stockholm.

Pasteur, A.-M.-Louis, LL. D., Medlem af det franske Institut, Professor honorarius ved Faculté des Sciences, Paris.

Des Cloizeaux, Alfred-Louis-Olivier-Legrand, Medlem af det franske Institut, Professor i Mineralogi ved Muséum d'Histoire naturelle i Paris.

Kokscharow, Nicolai Iwanowitsch v., Generalmajor, Direktør for det kejserlige Bjergværksinstitut i St. Petersborg.

Donders, Franz Cornelius, Professor i Fysiologi ved Universitetet i Utrecht.

Blomstrand, Christian Vilhelm, Dr. phil., Professor i Kemi ved Universitetet i Lund, Ridder af Danebrog.

Cleve, Per Theodor, Dr. phil., Professor i Kemi ved Universitetet i Upsala, Ridder af Danebrog.

Key, Ernst Axel Henrik, Dr. phil. & med., Professor i Anatomi ved det Karolinske medikokirurgiske Institut i Stockholm.

Berthelot, Pierre-Eugène-Marcellin, Medlem af det franske Institut, Professor i Kemi ved Collège de France i Paris.

Nägeli, Carl von, Dr. phil., Professor i Botanik ved Universitetet i München.

Gyldén, Hugo, Dr. phil., Professor, Direktør for det Kgl. Svenske Videnskabernes Akademis Observatorium i Stockholm.

Möller, Axel, Dr. phil., Professor i Astronomi ved Universitetet og Direktør for Observatoriet i Lund.

Lacaze-Duthiers, F.-J.-Henri de, Medlem af det franske Institut, Professor ved Faculté des Sciences, Direktør for den zoologiske Station i Roscoff.

Retzius, M. Gustav, Professor i Histologi ved det Karolinske mediko-kirurgiske Institut i Stockholm.

Boissier, M.-L.-Gaston, Medlem af det franske Institut, Professor ved Collège de France, Paris.

Paris, Gaston-Bruno-Paulin, Medlem af det franske Institut, Professor ved Collège de France, Paris.

Fleischer, Heinrich Leberecht, Dr. phil., Gehejmeraad, Professor i orientalske Sprog ved Universitetet i Leipzig.

Curtius, Ernst, Dr. phil., Gehejmeregeringsraad, Professor i Filologi ved Universitetet og Direktør for Antikvariet i Berlin.

Conze, Alexander Christian Leopold, Dr. phil., Professor, Direktør for det Kgl. Museum i Berlin.

Stubbs, William, D. D., LL. D., Biskop i Chester.

Freeman, Edward Augustus, D. C. L., LL. D., Regius Professor i nyere Historie ved Universitetet i Oxford.

Maurer, Konrad v., Dr. phil., Professor i nordisk Retshistorie ved Universitetet i München.

Möbius, Theodor, Dr. phil., Professor i de nordiske Sprog ved Universitetet i Kiel.

Areschoug, Frederik Vilhelm Christian, Professor i Botanik ved Universitetet og Direktør for den botaniske Have i Lund.

Nordenskiöld, Adolf Erik, Professor, Friherre, Intendant ved Riksmuseet i Stockholm.

Torell, Otto Martin, Professor, Direktør for Sveriges geologiska Undersökning, Stockholm

Weierstrass, Karl, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Berlin.

Kronecker, Leopold, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Berlin.

Leidy, Joseph, Professor i Philadelphia.

Kölliker, Albert von, Dr. phil., Professor i Anatomi ved Universitetet i Würzburg.

Leydig, Franz von, Dr. med., Gehejmemedicinalraad, Professor i Anatomi ved Universitetet og Direktør for det anatomiske Institut i Bonn.

Familien Podostemaceae.

Studier

af

Dr. **Eug. Warming,**
Docent ved Kjobenhavns Universitet.

Første Afhandling.

Vegetationsorganerne hos *Podostemon Ceratophyllum* Michx., *Mniopsis Weddelliana* Tul. og *Mniopsis Glazioviana* Warmg.

Med 6 Tavler.

Avec un résumé et une explication des planches en français.

Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1881.

Ingen Familie af Blomsterplanter synes at frembyde saa afvigende og mærkværdige morfologiske Forhold som Podostemaceernes, og faa ere dog saa lidet kjendte som denne. En indgaaende Bearbejdelse af denne Familie lover højst interessante Resultater, ikke blot i morfologisk Henseende, men det er tillige alene gjennem en saadan, omfattende Undersøgelse, at det er muligt at naa til en bestemt Anskuelse om denne Families endnu saa højst gaadefulde Slægtskabsforhold og faa afgjort, om den virkelig skulde være en Mellemform mellem Alger og Blomsterplanter, som en yderliggaaende, dristig Darwinist har udtalt, eller om den er en stærkt reduceret og simplificeret Form af en højere staaende Familie, og da af hvilken — hvis det da overhovedet er muligt at oplyse noget sikkert om dens Slægtskabsforhold, og den ikke indtager en aldeles isoleret Stilling uden faste Tilknytningspunkter til nogen bestemt anden nulevende Plantefamilie, hvilket efter mit hidtidige Kjendskab til den unægtelig synes mig det rimeligste.

En omfattende Bearbejdelse af den er i høj Grad paatrængende og tidssvarende og ligger saa at sige i Luften; og naar den endnu ikke er bleven foretagen, er Aarsagen ene og alene at søge i den store Vanskelighed ved at skaffe det til en anatomisk-morfologisk Bearbejdelse passende, i Spiritus opbevarede Materiale. De allerfleste Podostemaceer ere, som bekjendt, meget smaa, tropiske, i ferske Vande og da navnlig i Vandfald og hvor der er stærke Strømhvirvler, paa Klipper og Stene voxende Planter; det er vanskeligt, ofte farligt at komme til dem, og for mange Lokaliteters Vedkommende kun muligt i Tørtiderne ved laveste Vandstand; ingen Art er i Kultur i nogen botanisk Have; der existerer næsten intet Spiritusmateriale i noget evropæisk Museum, og Herbariernes tørre, men for øvrigt i andre Henseender værdifulde og ret rige Samlinger af disse Vandplanter tillade ikke en saa indtrængende eller nøjagtig Undersøgelse, som der kræves.

Dr. R. Cario i Gøttingen har paa en af Dr. Bernoulli bekostet Rejse i Guatemala samlet to Arter i Spiritus; om den ene af disse, *Tristicha hypnoides* Spreng., har han allerede publiceret sine Undersøgelser[1]; den anden, *Marathrum Shiedeanum* Cham., er for

[1]) Botan. Zeitung, 1881.

Tiden Gjenstand for hans Studium, saa at en Meddelelse herom vel kan ventes i Aarets Løb. Dr. Cario er den eneste Botaniker, fra hvilken noget tidssvarende Bidrag til Podostemaceernes Naturhistorie hidtil er blevet ydet, men hans Materiale er, som man vil se, ikke meget omfattende.

Det er min Agt, om det forundes mig, at bearbejde den hele Familie saa vidt, som det paa nogen Maade vil være mig muligt. Jeg har med dette Formaal for Øje skaffet mig de i de fleste evropæiske Museer opbevarede Materialier til Laans[1]). Jeg har dernæst henvendt mig til Naturforskere i Amerika, Afrika og Indien med Anmodning om Understøttelse med passende Materiale, og jeg har virkelig opnaaet at faa nogle Sendinger og har sikkert Løfte om andre; jeg bringer dem alle herved min Tak for, hvad jeg allerede har faaet tilsendt fra nogle, og for den gode Villie, som andre hidtil have maattet nøjedes med at udvise.

Det ligger i Sagens Natur, at det mest værdifulde Materiale kun langsomt og usystematisk kommer mig i Hænde; hvis jeg vilde opsætte Bearbejdelsen, indtil alt det var bragt sammen, som jeg kunde have Udsigt til at skaffe mig, vilde der sikkerlig gaa flere Aar. Jeg har derfor valgt at publicere mine Undersøgelser efterhaanden som nogle Arter, en Slægt eller en Slægtsgruppe komme til at foreligge nogenlunde fyldig bearbejdede og forstaaede, og jeg har gjort Begyndelsen med de paa Titelen nævnte Planter, hvortil ogsaa *Mniopsis*-Slægtens tredje og sidste hidtil kjendte Art, *Mniopsis scaturiginum* Mart., kunde føjes, da jeg har undersøgt den, saa godt det efter tørret Materiale lader sig gjøre; men som det sædvanlig gaar, — dette er meget ukomplet og meget vanskeligt at undersøge.

Mit Materiale til denne første Afhandling skylder jeg følgende Mænd og Instituter.

1. *Podostemon Ceratophyllum* Michx. har jeg i Spiritus, sendt mig af Dr. Wm. Canby i Wilmington (Delaware), ved Prof. Asa Gray som velvillig Mellemmand, og fra Pariser-Museet. Tørret Materiale fra forskjellige Herbarier.
2. *Mniopsis Weddelliana* Tul. har jeg i Spiritus dels fra Stockholms Museum (fra Caldas i Brasilien, samlet af Mosén), og dels fra forskjellige Lokaliteter i Orgelbjærgene og Serra d'Estrella sendt mig af Dr. A. Glaziou i Rio de Janeiro. Desuden findes Brudstykker i nogle Herbarier. Tulasnes Originalexemplarer har jeg haft til Undersøgelse.
3. Den nye Art *Mniopsis Glazioviana* Warmg. er i stor Mængde sendt mig i Spiritus af Dr. Glaziou.
4. *Mniopsis scaturiginum* Mart. & Zucc. existerer i forskjellige Herbarier samlet af Martius dybt i det indre Brasilien (Prov. Goyaz).

[1]) Nemlig Herbarierne i St. Petersborg, Berlin, Wien, München, Leipzig, Göttingen, Bruxelles og Stockholm foruden vort eget Universitets.

I.

Vegetationsorganerne hos *Podostemon Ceratophyllum* Michx., *Mniopsis Weddelliana* Tul. og *Mniopsis Glazioviana* Warmg.

Da den anatomiske og morfologiske Bygning i Hovedtrækkene er ganske ens, behandles de ovennævnte tre Arter i det følgende under Et, med Fremhævelse af det for den enkelte ejendommelige, hvor saadant er til Stede. *Mniopsis scaturiginum* kan der derimod kun tages ringe Hensyn, da Materialet ikke har tilladt en saa fuldstændig Undersøgelse som ønskeligt.

Som almindelige anatomiske Ejendommeligheder kan her strax fremhæves:

1) Spalteaabninger mangle ganske.

2) Overhudscellerne ere mere eller mindre polygonale, ofte en Smule strakte, omtrent som i III, 25; IV, 6; V, 5[1]). Kutikula er svag.

3) Grundvævet bestaar for største Delen af Parenkymceller, der sædvanligvis ere noget langstrakte i Retning af Organets Længdeaxe, især jo nærmere de ligge ved Karstrængene. Deres Vægge ere oftest noget kollenkymatiske, om ikke i andet saa i Henseende til Lysbrydning, navnlig paa visse, senere nærmere betegnede Steder; de svulme ogsaa let i Kali, hvorved en tydelig Midtlamel bliver synlig (III, 15, 24; IV, 4; V, 8; VI, 2, 3).

4) Intercellulærgange mangle ganske eller ere kun yderst ubetydelige.

5) Alle Cellevægge ere af ren Cellulose, naar Trakeiderne i Xylemet undtages, der ere svagt forvedede.

6) Stivelse findes i Mængde i Rodens og Stænglens Grundvæv (III, 15; VI, 2), mindre og af ringere Størrelse i Bladene. Kornene ere enkelte eller (især hos *Mniopsis*-Arterne) sammensatte, som VI, 5 viser, uden tydelig Lagdeling og Kjærne. Ofte har jeg fundet dem indlejrede i en stivnet Protoplasma-Masse, i hvilken de efterlod sig Huller, naar de faldt ud (III, 24); Protoplasmaets Periferi kunde vise dobbelt Kontour (III, 24).

[1]) Jeg betegner altid Tavlernes Numere med latinske, Figurernes med de arabiske Tal.

7) De af mig tidligere[1]) omtalte Kiseludskilninger i Cellerne, der udfylde disse og i Hovedtræk give en Afstøbning af deres Former, findes i Mængde i alle Planternes Organer, først og fremmest i deres Overhud, der paa ikke ringe Strækninger kan have omtrent hver eneste Celle udfyldt dermed (III, 25), dernæst i de nærmest til Overhuden grænsende Celler, og endelig i Periferien af Karstrængene og af Rodens Centralcylinder (III, 11; IV, 3, 5; VI, 8), hvor de i Overensstemmelse med Cellernes Former ofte blive meget lange. I Bladene findes de især i Basaldelene, der vist netop af denne Grund ere mere persistente end det øvrige, og dernæst i Bladfligenes Rande. De enkelte Kisellegemer ere enten ganske jævne paa Overfladen, og deres periferiske Dele ere da sædvanlig glasklare, medens det indre er mørkt kornet paa Grund af en talrig Mængde af smaa, luftfyldte Hulheder (III, 25; VI, 9); meget almindelig findes tillige en enkelt meget større Hulhed, der sædvanlig har en langagtig Form. Eller de ere meget ujævne, uregelmæssig grubede og ligesom udgnavede paa en Del af Overfladen (V, 8, 9; VI, 9), og det Indre er da oftest glasklart. Væggene i de kiselholdige Celler ere som i de andre Celler af ren Cellulose, og jeg har hidtil kun fundet Bestyrkelse af min tidligere (l. c.) udtalte Mening, at de stedse ligge frit i Cellen uden at være heftede til Væggen; unge Stadier, som kunne vise Udviklingsgangen, viser det sig meget vanskeligt at finde; hvor jeg en enkelt Gang paa ny har set et saadant, har det vist sig at være fint kornet helt igjennem, som i den Fig. 3 l. c. afbildede. Jeg har aldrig fundet Klorofylkorn i kiselførende Celler saaledes som Cario.

Planternes Hoveddele. Alle de omtalte Arter have et over Substratet (Sten og Klipper i Flodsengene) krybende, rhizomlignende, men bladløst Legeme, der ved nærmere Betragtning viser sig at være en Rod, og fra hvilken de løvbladbærende og blomstrende Skud alle udvikle sig, snart mere spredt, snart tættere stillede saa at der, naar Skuddene dernæst forgrene sig, dannes smaa Tuer. Røddernes Tværmaal er omtrent $^1/_2$—1 Millimeter; Skuddenes Højde forskjellig, fra faa Milimetre hos *Mniopsis Weddelliana* var. *pusilla*[2]) til 4—5 Centimetre og derover hos *Podostemon Ceratophyllum*, der er den største af de her omtalte Arter[3]).

Rødderne.

Rødderne ere fuldstændig plagiotrope; de krybe i alle Retninger, baade lodret og vandret hen over Underlaget, hæftende sig meget tæt og fast til dette; de krybe naturligvis

[1]) Videnskab. Meddelelser fra d. naturh. Forening 1881; S. 89—92.

[2]) De nye Arter og Varieteter, som jeg maatte finde Anledning til at opstille, ville blive diagnosticerede i den systematiske Del.

[3]) Med Hensyn til Forstørrelsen af Figurerne paa mine Tavler kan en Gang for alle bemærkes, at de fleste Habitusbilleder ere 3—5 Gange forstørrede; men for øvrigt er Forstørrelsen næsten altid angiven enten i Figurforklaringen eller paa Tavlen selv.

ogsaa hen mellem og over hverandre, og derved kan Underlaget paa en yderst indviklet Maade overspindes med et tæt Væv af Rødder. Ofte ere de relativt meget lange og krybe fra den ene Sten over paa den anden.

De ere udpræget dorsiventrale; de have en flad, til Substratet trykket Bugside, en hvælvet Rygside, og mellem disse to afrundede Flanker, fra hvilke baade Skuddene og Rodgrenene udspringe. Tværsnittet er oftest som III, 3. Hos *Mniopsis Weddelliana* kan Roden blive noget bredere og fladere, saa at Tværsnittet bliver som V, 12 B eller 18 B, og den samme Rod kan, som V, 12 A viser, have en meget forskjellig Bredde. Naar Rødderne blive saa brede som paa de sidst anførte Figurer, bryde Skud og Rodgrene ikke frem fra selve Flanken, men rykke lidt ind under denne paa Bugsiden (V, 12 og 18).

Rodens Anatomi. Overhudscellerne ere som III, 25; de ere i Almindelighed ordnede i Længderækker. Hos *Pod. Ceratophyllum* har jeg fundet Klorofylkorn i dem, i alt Fald paa Steder, der laa nær ved Rodskuddene.

Grundvævets Celler ere parenkymatiske, de inderste de største og tillige de længste, idet de kunne blive 3—7 Gange saa lange som vide. Lave og spredte Porer kunne findes (III, 24).

Centralcylinderen har her egentlig ikke Cylinderform, men en Form, der stemmer omtrent med hele Rodens, i det den er fladere paa Bug- end paa Rygsiden. Den ligger nærmest Bugsiden (III, 3, 11; V, 12 B, 18 B). Den er protoplasmarig og stivelsefri.

Den simplest byggede har jeg fundet hos de smaa Former af *Mniopsis Weddelliana*, i det den her kan mangle Xylem og alene bestaa af en noget kollenkymatisk Blødbast (VI, 2). Denne bestaar af Sirør og Kambiform.

Fyldigere udviklet er Centralcylinderen hos de større Former, der have tykkere Rødder. Her findes to Xylemstrænge, der hver bestaar af 2 eller 3 snævre Ring- eller Skruetrakeider (III, 17, 18), det eneste anatomiske Element med lidt forvedet Væg, og disse to Strænge findes i den ventrale Del af Cylinderen, som angivet III, 11, 15; V, 12 B, 18 B, og VI, 3. Medens der i nogle Tilfælde (III, 15) ikke er fundet nogen Differentiering i Centralcylinderens øvrige Masse, har jeg i andre Tilfælde fundet en saadan, der navnlig viser sig deri, at der til hver Xylemstræng slutter sig et Parti Blødbast og ned gjennem Centralcylinderens Symmetriplan strækker der sig et Cellevæv, der har en noget anden Lysbrydning end det øvrige, og som skiller de to Blødbastmasser fra hverandre (VI, 3). Paa Længdesnit gjennem Roden vise de nævnte, midt mellem Xylemgrupperne liggende Celler sig at være langstrakte med horizontale Vægge og videre end Elementerne i den nærmest Xylemgrupperne liggende Blødbast; om disse er der aabenbart flest Sirør, men saadanne mangle dog heller ikke i den øvrige Del.

Billeder af det kambiforme Blødbastvæv med Sirørene ses i III, 16, 17, 19.

Sirørenes Tværvægge kunne være tydelig kalløse, men Perforationen af dem viser sig kun utydelig som en svag Punktering eller Stribning. Kun en enkelt Gang ere Sirør som i III, 19 blevne sete. Jeg har ikke med Sikkerhed kunnet finde Adjunktivceller[1]), og Tværsnittene tyde ikke paa, at saadanne findes. Stivelse har jeg ikke fundet i Sirørene, men den ene Ende af Leddene kan være rigere paa et fint grynet Indhold end den anden. Allerede i ganske unge Roddele tæt bag ved Rod-Spidsen kunne Sirørene være tydelig dannede. Tenformede Cellekjærner findes ofte i det kambiforme Væv.

Grundvævscellerne nærmest omkring Centralcylinderen ere altid stærkere kollenkymatiske end de fjærnere liggende, og gaa ved deres meget langstrakte Form over i dennes Væv; en Endodermis findes ikke; men enkelte af disse langstrakte Celler kunne være fyldte med Kisel (antydet i III, 11). Paa Centralcylinderens Rygside findes der altid en mægtigere Kollenkymmasse end paa de andre Sider (antydet i III, 11 og VI, 3). Hos den lille Varietet af *Mniopsis Weddelliana* fandtes her Elementer, der nærmede sig den seje Bast.

Rodspidsen ligger ligesom hele Roden tæt trykket til Underlaget; den er jævnt afrundet (I, 1; III, 1, 23; IV, 14; V, 10 A o. s. v.). Jeg har ikke fundet noget sikkert Exempel paa, at den ikke har været dækket af en Rodhætte; kun i et eneste Tilfælde (den lille Rod i III, 4 B) kunde jeg ingen saadan se. Rodhætten viser den interessante Mærkelighed, at den næsten aldrig er lige stærkt udviklet paa alle Sider, i det den er kortest paa Bugsiden. Mindst udpræget er dette hos *Podostemon Ceratophyllum*, men den ses dog ogsaa her tydelig (III, 23); hos *Mniopsis*-Arterne træffes denne Ejendommelighed langt stærkere udpræget, lige til saadanne Tilfælde, i hvilke der kun findes en ganske lille Plade, der som en Negl dækker Rodspidsen paa Rygsiden, medens de øvrige Sider ere nøgne (V, 19, 20, 21, 22, 24). Herfra er der kun et lille Skridt til, at Rodhætten aldeles bortkastes, hvad der efter Cario skal være Tilfældet hos *Tristicha hypnoides*; Manglen af Rodhætte hos denne Art førte ham til at betragte Roden som et Thallus.

Rodhættens yderste Celler ere altid meget tydelig større og mere tykvæggede end den nærmest liggende Rod-Overhuds, og ikke sjælden udskilles der Kisel i dem. Jeg har ikke været i Stand til at faa særlig udmærkede Længdesnit af Vækstpunktet, men af alt hvad jeg har set, maa jeg slutte, at der hverken er nogen tydelig Grænse mellem Periblem og Plerom, og at heller ikke de øvrige Væv ere skarpt adskilte; Rodhætten og Rod-Overhuden synes i alt Fald at have fælles Udspring. Lidt neden for selve Spidsen ordne Cellerne sig tydelig nok i Længderækker (III, 2).

I Modsætning til Cario, der siger: «Wir haben hier eine Pflanze vor uns, die der Wurzeln vollständig entbehrt», maa jeg altsaa sige: her er ikke blot en Rod, men

[1]) Navnet «Adjunktivceller» er synonymt med Wilhelms «Geleitzellen», se Kolderup Rosenvinge, Vegetationsorganerne hos *Salvadora*. Vid. Selsk. Oversigter, 1880, med Tav. V og VI.

den spiller en overordentlig væsentlig Rolle, og dette ikke blot hos disse her gjennemgaaede Planter, men i den hele Familie. Et Blik paa Tulasne's Figurer[1]) vil vise, at et saadant til Underlaget trykket Organ, som her er paavist at være en Rod, findes hos en Mængde — sandsynligvis alle — andre Slægter, og at det er Bærer af Skuddene; jeg er endog tilbøjelig til at tro, at Hovedaxerne i Tulasne's Fig. II, Pl. IX af *Dicræa elongata* ere skudbærende Rødder. En lignende Rolle spille Rødderne som bekjendt hos *Cirsium arvense*, *Pyrola uniflora*, *Monotropa* o. a., og de af Solms-Laubach o. a. paaviste thalluslignende Organer hos mange Snyltere tager jeg heller ikke i Betænkning at betegne som Rødder, der under Artens Udvikling i Tidernes Løb have afkastet deres Rodhætte paa Grund af deres særegne Voxested og den særegen Brug, der gjøres af dem. Ogsaa hos Podostemaceerne gjøres der jo en usædvanlig Brug af Roden, idet den i højere Grad end andre Steder bliver et Hæfteapparat. For øvrigt kan her ogsaa mindes om, at der i nyeste Tid er blevet fundet utvivlsomme Rødder uden Rodhætte, f. Ex. af Klein hos *Aesculus* (Flora, 1880), og at andre Rødder paa et ældre Udviklingstrin bortkaste Rodhætten (*Azolla*, *Hydrocharis*, *Ficaria*, *Orchis*, o. a.). Podostemaceen *Castelnavias* Kimrod mangler lige saa fuldstændig Rodhætte som *Cuscutas*, og hele Rodspidsen dækkes under Spiringen med Rodhaar.

Rod-Regeneration. Meget ofte findes Rødder, som ere afbrudte enten ved Vandhvirvlernes Magt eller paa anden Maade, f. Ex. ved Dyrenes Gnav, og som have regenereret sig ved en ny Roddannelse fra Saarfladen. Ofte har en Rod gjentagne Gange været afbrudt paa tæt ved hverandre liggende Steder og har regenereret sig; Exempler findes afbildede: I, 1; II, 2; III, 4, 14, 22 (?); V, 12, 13, 16, 20 A.

Det synes altid at være den mod Spidsen af Roden vendte (akroskopiske) Ende, fra hvilken Regenerationen finder Sted (ligesom hos de højere Planter efter Vöchting).

Unge Stadier har jeg ikke truffet undtagen det i III, 22 afbildede, der oven i Kjøbet er mig en Smule tvivlsomt. Paa Længdesnit gjennem gamle Regenerationssteder ses Billeder som III, 14 og VI, 1. Centralcylinderens Væv fortsætter sig fra det ældre Rodstykke lige over i det nydannede, og Grundvævet i Barken er paa en større eller mindre Strækning blevet fortsat af nyt Grundvæv. Den nye Rod kan godt komme til at sidde skjævt paa den gamle, hvis Grundvævet paa den ene Side ikke er saa regenerationsdygtigt som paa den anden (V, 16).

Undertiden fremkomme to Rødder fra samme Saarflade (II, 2; III, 4 B), og de kunne rykke saa tæt sammen, at de faa en fælles Basis og synes at danne én Rod, der dikotomerer sig; et ungt Tilfælde af denne Art ses V, 13, et ældre V, 23. Hertil slutter sig det i III, 4 C afbildede Tilfælde: Roden har vistnok efter at være afbrudt regenereret sig paa omtrent hele Saarfladen lige ud til Overhuden, kun en ringe Del har ikke været regenerationsdygtig, og fra Brudfladen er der fremgaaet en Tvillingrod.

[1]) Monographia Podostemacearum (Archives du Muséum, VI, 1852).

Rodforgrening. Nye Rødder opstaa paa Flankerne af de ældre, men ellers uden Orden eller bestemt Plads (I, 1; V, 20 A; VI, 12); ere Moderrødderne meget flade, udspringe de lidt inde paa Bugflade under Flankerne (V, 12 A, 12 B, og 18 A og B). Ganske unge, endnu i Moderroden indesluttede Rødder har jeg ikke fundet, og jeg kan derfor heller intet speciellere angive om deres Dannelsesmaade. At alle Rodgrene ere endogene, fremgaar dog med Sikkerhed af den ringformede Saarflade, der findes om deres Basis, og det er temmelig vist, at de opstaa i Barken nær Periferien af Roden, ikke umiddelbart paa Centralcylinderen.

Rødder fra Stængler. Jeg har gjentagne Gange, om end ikke almindelig, fundet Rødder udspringende fra Stængler (*r'* i I, 11; III, 1; VI, 10, 11). I det næst sidste Tilfælde (VI, 10) udspringer en Rod fra Basis af et Brudstykke af et Skud, i det sidste (VI, 11) fra en Saarflade paa en Stængel, hvorefter den, følgende Stængeloverfladen i en Skruelinie, søger nedad; den er i dette Tilfælde forsynet med særlig stor Rodhætte (11, B). Hvor Forholdene have været tydelige, have ogsaa disse Rødder vist sig at være endogene.

Roden hæftes fast til Underlaget dels ved Rodhaar, dels ved ejendommelige Legemer, som jeg vil foreslaa at kalde Hapterer.

Rodhaar udvikle sig paa ubestemte Steder af Rodens Bugflade, i Regelen saaledes, at hele Strækninger ere yderst tæt beklædte med en kort brunlig Belægning af dem, idet omtrent hver eneste Overhudscelle forlænger sig haarformig (III, 8, 11; V, 18; VI, 14). De ere, som sædvanlig, Udkrængninger af Overhudscellerne, men i Regelen ere de temmelig tykvæggede, hvilket maa antages at staa i Forbindelse med, at deres Funktion her mindre er Opsugning af Næring end Fasthæftning af Roden til Underlaget. Paa Grund heraf brede de sig ogsaa i Spidsen ud i uregelmæssige Lapper (ligesom Kimplanternes Basalcelle af spirende Oedogonier og andre Alger), der synes at udskille en brunlig limagtig Substans (III, 8, 9; VI, 4, 15). Deres Længde afhænger af Substratets Nærhed, men er sædvanligvis meget kort. Paa ældre Rødder er det ofte næppe muligt at skjelne de enkelte Rodhaar fra hverandre, dels paa Grund af deres ringe Længde og bugtede Form, dels paa Grund af den brune eller sortebrune sammenkittende Masse. Kisel har jeg aldrig fundet udskilt i dem.

Hapterer[1]). Med dette Navn betegner jeg nogle ejendommelige især paa Roden udviklede Legemer, Gribe- og Hæfteredskaber af en tvivlsom morfologisk Natur. De findes normalt paa Roden af *Podostemon Ceratophyllum*, sjælden hos *Mniopsis Weddelliana*, men noget almindeligere hos *Mn. Glazioviana*.

Hos *Podostemon Ceratophyllum* ere de størst og mest ejendommelige, hvorfor de ogsaa ere sete tidligere, f. Ex. af Hooker (Compan. Bot. Mag. 2, p. 24), der sammen-

[1]) Af *ἅπτειν, ἅπτεσθαι* at binde, hæfte, berøre, gribe.

ligner dem med Hæfteredskaberne hos *Bignonia radicans* og *Ampelopsis hederacea*. Deres Plads er ved Basis af de paa Roden udspringende Skud, men dog paa selve Roden, neden for det Ar, der fremkommer ved Skuddets Frembrud af Roden (se f. Ex. II, 6, 9; III, 1; o. a.). Isoleret udspringende fra Roden, fjærnede fra Rodskuddene har jeg aldrig fundet dem, og mere end én ved hvert Rodskud har jeg heller aldrig set. Deres Længde afhænger af Substratets Afstand fra Roden. Er denne større, blive de som i III, 1 forlænget kegleformede og have saalænge en afrundet Spids, indtil Underlaget er naaet; er dette sket, brede de sig nemlig ud og lægge sig op til det, plastisk formende sig efter dets Overflade (se II, 9; III, 3, 5, 6). Er Roden kun ganske lidet eller slet ikke fjærnet fra Underlaget, brede de sig strax ud til korte tykke Hæfteskiver (I, 1, 11; II, 3, 6; III, 3). Især saadanne har jeg fundet hos *Mniopsis Weddelliana* og *Glazioviana* (V, 18; VI, 14), dog forekomme ogsaa længere (VI, 12) hos den sidste Art.

Ofte brede de sig ud i fingerformede Lapper, og de lægge sig lige saa godt op til lodrette som til vandrette Sider, den samme Haptér undertiden baade til lodrette og vandrette (II, 6, 8). De ligne i deres Formdannelse og Funktion ganske de Hæfteapparater, som findes hos *Fucus vesiculosus*, *Laminaria* og andre Alger, og som kunde benævnes med det samme Navn. Undertiden ere de grenede (II, 9; III, 6, 7, 10), og undertiden kunne to forenes meget tæt i Spidsen, saa de næsten danne ét Organ (III, 5). At de ogsaa kunne hæfte sig til Rødder eller Stængler af andre Planter, navnlig da af deres egen Art, som de jo nemmest komme i Berøring med, er let forstaaeligt.

Der maa ligesom ved selve Roden udskilles en Kit, hvormed de hæfte sig fast, og de ere, ligesom Rodens Bugside der, hvor Rodhaarene sidde, brune eller sorte paa Underfladen. For øvrigt bære de ofte meget tydelige, undertiden endog relativt lange Rodhaar (III, 7; VI, 14); men sædvanligvis ligne deres Rodhaar dog Røddernes korte og uregelmæssig lappede.

De opstaa exogent, og jeg har aldrig fundet nogen ringformig Saardannelse neden for dem som ved Basis af Rodgrenene og Skuddene (II, 6, 9; III, 3, 11, 12), og enhver Grendannelse paa dem er ligeledes exogen (II, 9; III, 7, 10, 13).

De have Spidsevæxt, hvad jeg især slutter deraf, at de mindste og protoplasmarigeste (mørkeste) Celler altid findes i deres Spidser, medens Cellerne blive desto større, jo nærmere de ere ved Basis af dem og af deres Grene (III, 12, 13; se ogsaa III, 7). Der er ikke Tale om nogen Rodhætte, Spidsen er nøgen.

De bestaa alene af tyndvægget Parenkym, hvis inderste Celler ere de største (III, 12, 13); der er ingen Antydning af nogen Karstræng. De kunne være stivelseholdige, og Overhuden er ofte rig paa kiselholdige Celler.

I et enkelt Tilfælde har jeg set dem regenerere sig efter et Brud (III, 20), ganske som Rødderne.

Disse Organer ere en saa mærkelig og interessant Mellemform mellem Rødder, Stængler og Emergenser, at de vel kunne fortjene et eget Navn. Fra Rødder afvige de ved Mangel af Rodhætte, ved den exogene Oprindelse og ved den fuldstændig parenkymatiske Bygning. Men her bør det dog erindres, at de allerseneste Aar have lært os ægte Rødder at kjende, som i to af disse Punkter afvige fra det sædvanlige. Rødder uden Rodhætte kjendes som ovenfor omtalt (S. 9), og hos selve *Podostemaceae* maa de jo, foruden hos *Castelnavia*, ogsaa findes, naar Carios Iagttagelse er rigtig. Exogene Rødder kjendes nu ogsaa (efter Dr. Ad. Hansen[1]) hos *Cardamine pratensis*, *Nasturtium officinale* og *silvestre*), og hertil kunne vel ogsaa Loranthaceernes og andre Snylteres intrakortikale Rodgrene henføres.

De ligne Rødder deri, at de have Spidsevæxt, have Regenerationsevne, og at de bære Rodhaar. Dog maa jeg om dette sidste Punkt bemærke, at det ikke vejer meget i Vægtskaalen; Begrebet «Rodhaar» maa fattes meget videre end det sædvanlig sker, thi aldeles de samme Haardannelser findes paa mange andre Organer end paa Roden, saa at de langt fra ere noget Særkjende for denne. At Haar med Rodhaars Bygning kunne forekomme paa Thalli, Forkim o. l. er bekjendt; paa Kallusdannelser optræde ligeledes aldeles ægte Rodhaar; der gives vel ikke mange haarbærende Rhizomer, men Haarene paa dem, der ere mig bekjendte (*Goodyera repens*, *Corallorhiza*, *Mercurialis perennis*, vist nok ogsaa *Epipogon* og efter van Tieghem tillige *Psilotum* og *Trichomanes*), ere overalt byggede som Rodhaar; der findes saadanne paa Forkimen af *Triticum* og vel ogsaa andre Græsser[2]), og de kunne endog strække sig helt op paa Epiblasten.

«Rodhaar» ere aabenbart en til et bestemt Arbejde (Fasthæftning og Opsugning) uddannet Haarform, der kan forekomme ikke blot paa Roden, men paa alle rodlignende eller andre Legemer, paa hvilke der er Brug for saadanne Haar. Deres Forekomst paa Hapterne vil da ikke kunne bruges som Bevis for, at disse ere Rødder.

Naar jeg imidlertid ser hen til den Regenerationsevne, som jeg har iagttaget hos dem, om end kun én Gang, men som ganske ligner Rodens, og dernæst til deres Plads, nemlig paa Rødder, — paa hvilke der jo ikke med Sikkerhed vides at opstaa andre Legemer end: andre Rødder, Rodhaar og Rodskud — saa er jeg mest tilbøjelig til at antage, at de ere stærkt metamorfoserede Rødder, at de en Gang have været uddannede som sædvanlige Rødder, men i Tidens Løb ere blevne formede til den afvigende Form, som de nu have, i Overenstemmelse med deres særlige Funktion som blotte Hæfteorganer; en ganske lignende Omdannelse maa jo antages foregaaet med *Tristicha*-Roden, med *Viscum's* og andre Snylteres Rødder, idet de have tabt Rodens ellers saa konstante Særkjende, Rodhætten.

Maaske ville mine fortsatte sammenlignende Studier af Podostemaceer bringe

---

[1]) Vergleichende Untersuchungen über Adventivbildungen. (Senckenb. Naturf. Gesellsch. XII Bd. 1881.)

[2]) Warming, Lærebog i den almindelige Botanik, 1880, S. 83, Fig. 70, B og S. 233.

Kjendsgjerninger til Veje, der støtte dette. Allerede en Betragtning af de paa Stænglerne udviklede Hapterer giver nogle, om end svage Bidrag. Hos *Podostemon Ceratophyllum* har jeg kun én Gang fundet Hapterer paa Stænglen (afbildet II, 3); som Figuren viser, var det et fra Bugsiden nedhængende (positivt geotropisk?) forgrenet Legeme; dets Vækst og Bygning var som Rodhapterernes, dog var det ikke tydeligt, om det havde endogen eller exogen Oprindelse; paa to Steder (ved *) vare dets Grene fast sammenklæbede indbyrdes.

Hos *Mniopsis Glazioviana* har jeg ingen Stængelhapterer fundet, thi det i VI, 11 afbildede Legeme var en ægte Rod, som jeg ikke kan sammenstille med Hapterne. Men hos visse Former af *Mniopsis Weddelliana* ere de meget almindelige. Paa den store Form fra Caldas (var. *Caldensis* Warmg., IV, 14—23 og V, 1—2) har jeg aldrig set noget Exemplar; hos forma *typica* (V, 3, 4) ere de fundne og med lignende forgrenede Former som hos *Pod. Ceratophyllum*; men hos Var. *pusilla*, der aabenbart lever i stærkt strømmede Bjærgfloder, i hvilke der kun er lavt Vand, og hvis Skud ligge mere vandret ud end de andres og ofte tæt trykte til Underlaget, ere de derimod meget almindelige (V, 14, 15). De udspringe fra Bugsiden, søge lige ned mod Underlaget og hæfte sig fast til dette ved Udbredning af deres Ender aldeles som de fra Rødderne udspringende; er deres Udspringssted længere fjærnet fra Underlaget, blive de længere (se V, 14 A), men sædvanligvis er denne Afstand kun kort, og de blive da ganske korte, skiveformede, uregelmæssig lappede Legemer. De kunne bære Rodhaar som Rod-Hapterne (V, 15 B), deres indre Bygning er ogsaa som disses, og Rodhætte findes aabenbart heller ikke (set tydelig f. Ex. paa den med *h* mærkede Udvæxt i V, 14 B). Men desværre har jeg ikke kunnet faa afgjort, om de have exogen eller endogen Oprindelse, dels fordi jeg ingen unge Stadier har fundet, dels fordi Stængelstykkerne ere saa korte hos denne Art, og fordi Basaldelene af de affaldne Blade sidde saa tæt sammen og vanskeliggjøre Afgjørelsen af det Spørgsmaal, om der er en Saarflade om deres Basis hidrørende fra deres Gjennembrud. Jeg har næsten altid paa Længdesnit gjennem dem fundet brunlige iturevne Celler om deres Grund, men der er jo en Mulighed for, at dette hidrører fra de afrevne Blade. Skulde de imidlertid virkelig have endogen Dannelse, gjøre de et Skridt hen mod de ægte Rødder.

Skuddene.

Roden spiller, som anført, den samme Rolle hos disse Planter, som Rodstokkene hos mange fleraarige Urter og som Rødderne hos nogle faa andre; det er fra den, at Skuddene udspringe.

Rodskuddene opstaa paa Rodens Flanker eller lidt inden for denne paa dens Bugflade (I, 1; III, 11, 12; V, 12, 18). De staa sædvanlig parvis, saaledes at der staar et Skud paa den ene Flanke og et andet lige over for eller lidt skraat over for det paa den

modsatte Flanke (I ,1, 11; III, 1, 6; IV, 14; V, 10 A, 12, 18); nogen anatomisk Grund hertil kan jeg ikke paavise. Enkeltvis stillede forekomme ogsaa (f. Ex. i I, 1; III, 1). Mellem de enkelte Par er der større eller mindre Afstand, hos *Podost. Ceratophyllum* indtil $2^1/_2$ Centimeter. De opstaa akropetalt, men undertiden anlægges en hel Række Par omtrent samtidig (V, 10 A).

Skuddene ere altid endogene. De anlægges i de periferiske Dele af Rodens Bark, inden for et eller et Par Lag Celler, der senere gjennembrydes og danne en laset, ringformet Krave om deres Basis (III, 2, 11 12, 21; V, 18 B). Knoppen anlægges altsaa ikke i Centralcylinderens Periferi, men bringes senere i Forbindelse med denne ved Udvikling af Karstræng-Væv i det mellemliggende Parenkym. Ofte findes Knopperne endog anlagte paa Dele, som endnu ere dækkede af Rodhætte (III, 2).

De udviklede Skud staa under forskjellige Vinkler ud fra Roden. Hos *Mniopsis Glazioviana* staa de næsten opret; hos *Mn. Weddelliana* ligge de derimod ofte næsten lige ud til Siden, vandret hen over Underlaget (IV, 14), saa at den ene Side (Bugsiden) vender nedad, den anden (Rygsiden) mod Lyset; hos *Podostemon Ceratophyllum* danne de sædvanlig en Vinkel paa 30-60° med den Flade, over hvilken den bærende Rod kryber (III, 3, 5).

Hvad enten det ene eller det andet er Tilfældet, ere de stærkt dorsiventrale, den udad (ɔ: bort fra Rodens Symmetriplan) eller nedad vendte Side, Bugsiden, er altid anderledes end den modsatte, indad vendte Side, navnlig med Hensyn til Bladenes Forhold. Den ene Flanke vender mod Rodens Spids (den akroskope), den anden mod dens Basis (den basiskope). Ogsaa i Stænglens indre Bygning viser det dorsiventrale sig.

Bladstillingen er $^1/_2$; den ene Bladrække sidder paa den ene Flanke, den anden paa den modsatte, men Randene gribe halvt om paa Stænglens Ryg- og Bugside, omtrent lige meget paa dem begge (sammenlign I, 6 B med 6 C, 10 A med 10 B; II, 1 F med 1 G; IV, 18 A med 18 B, 19 A med 19 B; VI, 13 A med 13 B). Det 1ste Blad paa hvert Skud sidder paa den fra Rodspidsen fjærneste (basiskope) Flanke (f. Ex. IV, 14). Hvert Blad har altsaa en Rand, der vender til samme Side som Stænglens Rygside (den notoskope Rand vil jeg kalde den), og en, som vender mod Stænglens Bugside (den gastroskope Rand). Bladets Overflade skulde egentlig vende indad mod Flanken, som det sidder paa, men der finder altid en saadan Drejning Sted, at Overfladen (Bugfladen, den mod Axen vendte) kommer til at vende mod Skuddets Rygflade, og dets Underflade (Rygfladen) mod Skuddets Bugflade[1]). Bladenes Bugflader komme derved alle til at ligge i

[1]) Jeg har været i Tvivl om, hvad der rettest skulde kaldes Skuddets Bug og Ryg; men i Overensstemmelse med Goebel, der kalder den mod Moderaxen vendende Side af et Skud for dets Rygside, og med Cario, der hos *Tristicha* kalder den mod Underlaget vendte Side af Skuddene Bugsiden, og af Hensyn til *Castelnavias, Marathrums* o. a. Podostemaceers stærkt dorsiventrale Skud, hvis ene Side er tæt trykket til Underlaget og i Uddannelse minder om Rodens Bugside, har jeg valgt oven staaende Betegnelsesmaade.

omtrent en eneste mod Lyset vendt Flade, der falder sammen med eller er parallel med Skuddenes Rygside (er parallel med Dorsiventralitetsplanen).

Bladformationerne ere to, Lavblade og Løvblade. Af de første findes kun nogle faa allernederst paa de fra Rødderne udviklede Skud, der vise deres simplere Uddannelse deri, at de have en udelt Plade og mangle eller have en kun meget lille Stipeldannelse (se I, 3; IV, 15, 18; V, 10 A og B, og 18; naar det f. Ex. i 10 B synes, at der staar et Blad i Skuddets Symmetri-Linie paa dets Rygside, da maa jeg tyde dette som den til det 2det Blad hørende, relativt store Stipel). Ogsaa senere, naar Skuddet forgrener sig, optræde kun Løvblade, undtagen i et afvigende Tilfælde, der nærmere omtales nedenfor.

Hos *Podostemon Ceratophyllum* findes et regelmæssigt Skifte af Sæt af lange og Sæt af korte Internodier (I, 9; II, 3, 4 A). Jeg formoder, at dette staar i Forbindelse med Aarstidernes Vexlen, og at de længere Internodier betegne den gunstigere Aarstid; men Bladene ere ogsaa paa de korte Internodier Løvblade. At denne Art maa være perennerende med en Vexel i Udviklingen, fremgaar ogsaa f. Ex. af I, 6 A, 8 A, og II, 1 A, paa hvilke der er et tydeligt Spring i Udviklingen mellem de yngste og det næst ældre Sæt af Blade.

Løvbladene. Basis af Bladene er bredt skedeformet ud og omfatter Stænglen halvt, men er for øvrigt forskjellig formet hos de forskjellige Arter. Paa den ene Side staar *Podostemon Ceratophyllum* (og maaske hele Slægten *Podostemon*), der har en fuldstændig udviklet intrapetiolær Stipel, som i Knoppen omfatter det følgende Blad, og hvis Former ses af I, 2, 3, 4, 8 o. s. v.; II, 1, 4, 7 o. s. v. (paa nogle af Figurerne, f. Ex. ved Blad *n* og *o* paa II, 1 D, ved Blad *m* paa II, 4 A, o. a., er den frit fremragende egentlige Stipeldannelse forsvunden).

Mniopsis-Arterne (og de tre her undersøgte repræsentere hele Slægten) have derimod kun en ensidig eller halv, intrapetiolær Stipel, en lille Flig, der sidder paa den notoskope Side af Bladbasis, lidt inden for Randen (IV, 15, 16, 17, 18, o. s. v.; V, 3 o. s. v.; VI, 13, 16). Det vil af Figurerne ses, at den er stærkest fremtrædende og tilsyneladende næsten er et selvstændigt, paa Skuddets Rygside stillet Blad hos *Mniopsis Glazioviana* og *scaturiginum* (VI, 13 og 16)[1]).

Løvbladenes Plade bliver sukcessivt fuldkomnere, naar man begynder med de lavest stillede og gaar opad, indtil Højdepunktet for Udviklingen er naaet. Den er fjersnitdelt og kan være gjentagne Gange delt; Afsnittenes Form er forskjellig, hvad Tegningerne ville vise; endog samme Art frembyder i denne Henseende store Variationer, hvilket jeg

[1]) Bladstillingen hos Mn. *scaturiginum* beskrives derfor ogsaa saaledes af Weddell (De Cand. Prodrom. 17, p. 77): «foliis minimis subquadrifariam imbricatis, aliis semiorbicularibus amplexicaulibus, aliis in latere opposito caulis multo minoribus stipuliformibus» . . . og senere «hæc et illa series 4 verticales parallelasque efformantia, seriebus foliorum minorum in eodem latere caulis contiguis».

antager at hidrøre fra Lokaliteternes Forskjelligheder (Vandets Dybde, Strømmens Styrke); man betragte f. Ex. de forskjellige Figurer af *Podostemon Ceratophyllum*; det ene Yderpunkt er den I, 1 og II, 5 afbildede Form med de korte brede Afsnit, det andet den I, 6, 8 og II, 1 afbildede Form med de lange, haarfine Afsnit. At Bladene af *Mniopsis scaturiginum*, der kun ersamlet én Gang, nemlig af Martius, skulde være fuldstændige saaledes, som de foreligge i Herbarierne og i Tegninger (VI, 16), forekommer mig tvivlsomt; jeg er tilbøjelig til at antage, at kun Basaldelene ere tilbage, og at Vandet har ødelagt Resten. Paa ældre Stængler ere enten kun Basaldele af Bladene tilbage, fordi disse paa Grund af deres Kiselholdighed ere mere modstandsdygtige, eller Bladene ere ganske fjærnede, efterladende et Ar, hvad der især findes hos Var. *pusilla* af *Mn. Weddelliana* (V, 11, 14, 15). Paa ældre afblomstrede Planter af *Mniopsis Weddelliana* løsrives ogsaa Stænglernes Barkvæv efterhaanden, saa at kun det mekaniske Væv med Karstængene bliver staaende (V, 2).

Bladudviklingen. Der findes ingen Stængelspids, som rager nøgen op over det yngste Blad, og dette indtager endog omtrent den Plads, som Stængelspidsen ellers skulde have, er med andre Ord omtrent terminalt. Længdesnit gjennem Skuddenes øvre Ender (det er især *Podostemon*, i ringere Grad *Mniopsis Weddelliana*, der har afgivet Materiale hertil) vise sig som IV, 1 og 2. Har det yngste Blad opnaaet en vis Størrelse, ses et næste at opstaa som en lille Vorte i Dalen mellem det og dets Forgænger, altsaa f^5 paa IV, 1, i Dalen mellem f^4 og f^3; men altid er det yngste Blad ligesom rykket lidt op paa Foden af det 3dje yngste, f^5 opstaar altsaa ligesom paa Foden af f^3, og den Kløft, der skiller det fra f^4, er dybere end den, der skiller det fra f^3. Det samme ses af IV, 2. Den gamle Fytonlære faar her en Kjendsgjerning at støtte sig til.

De unge Blade bestaa af et uordnet Cellevæv under en sædvanlig Overhud (III, 21 B), og dette uordnede Delingsvæv fortsætter sig nedad i Stænglen i et lige saa uordnet; dets Grænser ere i IV, 1 og 2 angivne ved en mørkere Tone, hvilket er overensstemmende med Naturen, thi dette Vævs mindre og protoplasmarigere Celler vise sig altid mørkere end de tilgrænsende ældre mere storcellede Væv.

Har det unge Blad naaet en vis Størrelse, begynder Dannelsen af dets Dele; i enkelte Tilfælde (de nederste Blade paa et Skud, se III, 21 A og B) dannes Stiplen tidligere end Pladens Afsnit, i andre Tilfælde synes dette ikke at være Tilfældet; men den kommer dog i ethvert Fald meget tidlig, om end efter det nederste Afsnit eller et Par af disse.

Afsnittene anlægges akropetalt; dette gjælder baade de primære og alle af højere Orden (IV, 8—13). Skiftevis anlægges et Afsnit paa Bladets højre og venstre Rand, og ofte opstaar et Sideafsnit saa nær ved Spidsen af Hovedafsnittet, at dette næsten synes at dikotomere sig (IV, 9, 10). Saa vel i Fligenes Alternation, som i den akropetale Dannelse er der større Lighed med Bregnebladene end med noget andet Blad, saa vidt mig bekjendt.

Afsnittene dække hverandre i Knoppen saaledes, at naar Bladet, der er sammenfoldet efter Hoved-Midtnerven med Oversiden indad, betragtes udenfra, ses kun den basiskope Rand af hvert Afsnit, men ikke den akroskope (IV, 13 o.s.v.); denne er dækket af det ovenover paa samme Side staaende Afsnits basiskope Rand. Dette er hvad Tyskerne kalde «oberschlächtig» Bladleje, og hvorom Al. Braun siger[1]), at kun Cycadeerne, *Botrychium*, *Comptonia*, *Boronia alata* og en *Xanthoxylon* ere ham bekjendte at have det; det er altsaa en Sjældenhed.

Med Hensyn til den Side, paa hvilken den første (nederste) sekundære Bladflig af et Blad fremtræder, er der en bestemt Regel: det dannes paa den notoskope, ved Pladens Drejning udad (bort fra Skuddets Symmetriplan) vendte Rand; det andet vil altsaa findes paa den modsatte (I, 2, 3, men især IV, 15, 18, 19; V, 3). Undtagelser gives.

Nervationen er yderst simpel; den retter sig efter Bladets Forgrening, idet hvert Afsnit modtager en Midtnerve, som ellers ikke forgrener sig (f. Ex. IV, 15, 18, 19, 23).

Skuddenes Forgrening.

Den normale Forgrening sker paa en fra det hos Blomsterplanterne sædvanlige meget afvigende Maade. Knopperne staa nemlig ikke i Bladaxlernes Median, men ved Basis af Bladenes notoskope Rand, og uden for Stiplen, som ikke kommer til at omfatte dem. Men — som om Knopperne ikke kunde undvære et Dække af en Stipel, — en 2den saadan uddannes, der omfatter Knoppen og helt kan skjule den, saa længe den er ganske lille; denne Stipel vil jeg til Forskjel fra den sædvanlige, kalde den «ydre», fordi den paa Grund af Bladenes Stilling kommer til at staa paa den fra Skuddets Symmetriplan fjærneste Rand og vender bort fra denne, medens den sædvanlige (eller «indre») Stipel vender indad mod den; den har ganske samme Form, som den sædvanlige Stipel, men er oftest lidt mindre og sidder lavere end denne. Hvert Blad, ved hvilket et Sideskud kommer til Udvikling, bliver saaledes udstyret med to Stipler, af hvilke den ene omfatter Hovedaxen, den anden Sideskuddet. Et saadant Blad kunde kaldes «bistipulært», hvis det ikke var en Regel, at Blade med frie Stipler have to saadanne; jeg vil derfor foreslaa at kalde det «dithecisk», fordi det forsynes med to Hulheder, der omfatte Skuddene. Saadanne ditheciske Blade ses f. Ex.: I, 5, 6 D (*d* og *g*), 10 A (*c*); II, 1 D (*p*), 5 B (γ), 7 (*c*); IV, 16, 18 A (*d*), 20 (*c*, *d*) o.s.v.

Det har ofte Udseende af, at Sideskuddet udspringer fra Bladet, og ikke fra Stænglen, paa hvilken dette sidder. Der er imidlertid ikke mere Grund til at anse disse Skud for mere bladbaarne end de sædvanlige Axelknopper, der jo ogsaa ofte synes at tage deres Udspring fra Bladene.

---

[1]) Die Frage nach der Gymnospermie der Cycadeen. Berl. Akad. Monatsber. 1875, S. 328.

Sideskuddet drejer sig saaledes, at dets to Bladrækker ligge omtrent i samme Plan, som Hovedaxens; dets Blades Bugsider vende til samme Side som dennes Blades; selve Sideskuddenes Ryg- og Bugsider vende altsaa til samme Side som Moderaxens, deres Flanker ligge omtrent i samme Plan som dennes (f. Ex. IV, 19 A; VI, 13 A). Sideskuddets Dorsiventralitetsplan falder altsaa omtrent sammen med Moderaxens; den ene Flanke vender indad mod Moderaxen, den anden bort fra den. Denne sidste Flanke bærer altid det nederste Blad, som jeg stedse har fundet at være et Løvblad. Paa stærkt forgrenede Exemplarer, især f. Ex. af *Mniopsis Glazioviana*, ses Planterne ofte ligesom lidt rendeformede eller hule, fordi de sukcessive Sideskud dog ikke ligge ganske udbredte i samme Plan som Moderskuddet, men ere drejede saaledes, at deres Dorsiventralitetsplan skærer Moderaxens under en spids Vinkel.

I Side- og Hovedskuddets Styrke og Udviklingsmaade er der stor Forskjel. I nogle Tilfælde udvikles de lige kraftig; der opstaar da en regelmæssig Dikotomi, midt i hvilken det ditheciske Blad er stillet (I, 6 A; II, 1 A). Dette synes da at staa endestillet og ved sin Basis at have to Grene, hver især støttet af en Stipel, og hver især begyndende med et udad vendt Løvblad. I Virkeligheden er det ene af disse Løvblade altsaa det af Hovedaxens Blade, der følger efter det ditheciske, og det andet er Sideskuddets 1ste Blad. Til Vejledning af, hvilket Skud der er Sideskuddet, kan ofte Stiplernes ulige Størrelse tjene.

Sympodial Forgrening er meget hyppigere, fordi Hovedaxen meget ofte strax oven for det ditheciske Blad afslutter med en Blomst, og Sideskuddet derpaa indtager dets Vækstretning. Exempler paa Sympodier ses I, 4, 6 B—C, 7, 9, 10; II, 4, 5 (et Sympodium vil ogsaa udvikle sig af 7); o. a.

Monopodial Forgrening er sjældnest, og sjælden undgaar et Hovedskud aldeles at blive bragt ud af sin Vækstretning ved Sideskuddenes Udvikling; IV, 19 A kan endnu siges at være et Monopodium.

Sideskuddenes Udstyrelse kan være meget forskjellig. Der er Sideskud, som ere rene Blomster (f. Ex. IV, 22 ved *), andre der have et Løvblad og en Blomst (f. Ex. IV, 20), andre der have 2 eller 3 eller end ogsaa flere Løvblade, før de afsluttes af en Blomst; IV, 19 viser Exempel paa Sideskud med 1, 2 og 3 Løvblade (det øverste har færrest, det nederste flest af disse).

Hyppigheden af den rent vegetative Grendannelse er forskjellig. Hos *Podostemon Ceratophyllum* er der ikke mange vegetative Grene, og navnlig er hele den nedre Del af et Skud sædvanlig uden Grene (II, 3; I, 9 o. a.). Derimod har den en rig Forgrening med Sympodiedannelser mod Skuddenes Spidse. Hos *Mniopsis Weddelliana* findes Forgrening hyppig og næsten lige fra Skuddenes Grund af; derved fremkommer det tueformede Ydre, som er saa almindeligt hos denne Art, og som fremtræder f. Ex. i V, 1, 2 og IV, 9. Varieteten *pusilla* afviger fra de andre Former ogsaa deri, at Skuddene hurtigere blive nøgne og noget mere knudrede end hos de andre (sammenlign V, 1 med V, 11, 14, 15, 17).

Mniopsis Glazioviana er tueformig af Ydre, men aabenbart mindre paa Grund af en stærk Forgrening end paa Grund af Skuddenes tætte og oprette Stilling paa Roden.

Ægte Axelknopper, stillede i Medianplanen af Bladet og inden for den indre Stipel ere iagttagne i ét eneste Tilfælde hos *Podostemon Ceratophyllum* (II, 4; se Figurforklaringen); om de virkelig ere exogene Dannelser, har jeg ikke kunnet se. Oven for hvert af Bladene *c*, *f* og *g* findes der en Axelknop, og disse støttende Blade ere ikke ditheciske. Afvigende fra alle andre Sideskud begynde disse med Lavblade; saaledes ere Blad 1 og 2 i Knop *C* skælformede Blade, og den nu affaldne Plade paa Blad 3 har sikkert ikke været stor. Ligeledes ere de to nederste Blade i Knop *B* og *C* Lavblade. Stillingen af de første to Blade er transversal i Forhold til Dorsiventralitets-Planen, men der finder temmelig hurtig en saadan Drejning af Bladrækkerne Sted, at de komme til at ligge i denne eller i en med den parallel Plan, altsaa blive stillede paa samme Maade som Bladrækkerne paa de sædvanlige Sideskud. Det første Blad paa disse Axelknopper vendte i to Tilfælde ud mod Skuddets Rygside, i et Tilfælde mod Bugsiden, saa vidt ses kunde paa de to temmelig smaa og slet konserverede Knopper.

Stænglens Anatomi.

Alle Karstrænge ere Bladsporstrænge. Hvert Blad modtager én Stræng; følges denne ind i Stænglen, vil man se, at den efter et kortere eller længere Løb nedad lægger sig op til en anden Stræng, der højere oppe bøjer sig ud til den modsatte Side; det hele Forhold er, som om der er en eneste Stræng, der skiftevis afgiver Grene til højre og venstre, til de paa Flankerne staaende to Bladrækker (II, 7; IV, 1, 2). Et Tværsnit af Stænglen vil derfor vise et ringe Tal af Karstrænge, som alle ligge i Dorsiventralitets-Planen (*Podostemon* IV, 3) eller danne en Bue, der vender den konkave Side mod Stænglens Rygside (*Mniopsis* VI, 8).

Tværsnit af Stænglerne kunne være regelmæssig elliptiske, men ofte er Rygsiden lidt mindre hvælvet end Bugsiden (VI, 8).

Karstrængene bestaa af lidt Blødbast (Sirør og Kambiform), samt nogle meget faa og meget udtrukne Skrue- og Ring-Trakeïder. Jeg har undertiden set Tværsnit, der talte for, at der i Blødbasten fandtes Adjunktivceller. Det er vanskeligt bestemt at afgjøre Trakeïdernes Beliggenhed i Forhold til Blødbasten, fordi de paa Tværsnit ere saa lidet i Øjne faldende; hvor den har været tydelig, have Trakeiderne ligget nærmest ved Strængenes Bugside (IV, 3; VI, 8). I ældre Stængler opstaar der ofte en Hulhed i hver Stræng, i hvilken Resterne af Trakeiderne ligge (VI, 8, Strængen til venstre).

Karstrængene ere afstivede af et kollenkymatisk Væv, der ligesom i Roden er stærkest paa Rygsiden (IV, 3; VI, 8); de ganske smaa Strænge findes dog helt rundt omgivne af et næsten lige mægtigt Kollenkym (IV, 4). Dette Kollenkym kan til sidst antage en brunlig

Farve, ligesom ogsaa det nærmest omgivende, mindre kollenkymatiske Væv. Foruden dette Kollenkym kan der hos *Podostemon* længere ude i Barken paa Bugsiden findes et Kollenkymlag, der ses i IV, 3, men ogsaa kan mangle hos den samme Art; hos *Mniopsis Weddelliana* har jeg ligeledes fundet kollenkymatisk uddannede Vævlag, om end svagere udviklede, paa Bugsiden af Stænglen.

Det om Karstrængene liggende kollenkymatisk uddannede Væv er for øvrigt i visse Henseender forskjelligt fra Kollenkymet og nærmer sig til den seje Basts Celler eller til Vedparenkymet. Hos *Podostemon Ceratophyllum* findes der nemlig der langstrakte bastcellelignende Celler, dog uden spalteformede Porer; *Mniopsis*-Arterne have derimod mere ægte Sej-Bast, i det der ikke blot findes prosenkymatiske Celler, men disse have tillige spalteformede Porer, stillede skraat i en til venstre opstigende Skrue, og dernæst er det øvrige om Strængene liggende Væv dannet af Celler, der forbinde Vedparenkymets Former med Vedcellernes Spalte-Porer (VI, 6, 7 *a—b*).

For øvrigt er Stænglernes Overhud og Grundvæv ikke forskjelligt fra Rodens.

Bladenes Anatomi.

Epidermis ligner de andre Deles (IV, 6; V, 5). Den er klorofylholdig, og Klorofylkornene fandtes lejrede op til Indervæggene. Bladene ere især hen mod Afsnittenes Spidser lidt rendeformig fordybede og i Renderne forsynede med en mere tyndvægget Overhud; ejendommeligst er det, at der her hos alle tre Arter blandt Overhudsceller af sædvanlig Form findes uordentlig indstrøet nogle smaa Celler, der ligesom ere skaarne ud af de andre og ofte runde sig lidt af mod dem (IV, 6; V, 5). Disse smaa Celler have et mørkere, noget mere kornet Celleindhold end de andre, og de rage ofte lidt kuppelformig op over dem; jeg har endog set, at de hos *Podostemon Ceratophyllum* kunne forlænge sig og danne korte rodhaarlignende Haar (IV, 7). Da der ofte klæber talrige smaa Smudspartikler ved disse rendeformede Partier af Bladene, synes et klæbrigt Stof at secerneres her, og rimeligvis ere disse smaa Celler eller smaa Haar herved virksomme. For øvrigt kan jeg intet oplyse om den Betydning, som en saadan Sekretion muligvis kan have for disse i Vandet nedsænkede Blade.

Mesofyllet i Bladene er bygget som Stænglens Grundvæv af tyndvæggede Parenkymceller, der ere størst i Bladenes Indre; en Differentiering i Pallisadevæv og pnevmatisk Væv findes ikke (V, 6). Randen løber undertiden ud som tegnet i V, 7.

Nerverne bestaa af enkelte Karstrænge med en meget svag Udvikling; Sirør ere ikke sete, men meget udtrukne Ring- og Skruetrakeider (VI, 7 *c*) kunne endnu findes i de nederste, kraftigere Dele af Nerverne. Disse Strænge støttes i hele deres Omkreds (se V, 6, Cellerne med de mørke Vægge) af meget snævre og lange Prosenkymceller, ægte Sej-Bastceller (VI, 7 *d*), og selv i et macereret Blad bevare Nerverne af denne Grund en vis Sejhed.

Nogle af de fineste Nerve-Ender bestaa næsten alene af saadanne Celler og nogle faa Kambiform-Celler. Dette Prosenkym spiller aabenbart en mekanisk Rolle; medens Bladenes Basaldele især gjøres modstandsdygtige (faste, haarde) ved Kisel, maa de fine Pladedele, der maa bølge frem og tilbage i Vandet, gjøres seje paa anden Maade, hertil maa et andet Materiale end Kiselkonkretioner i Cellerne anvendes; i det højeste findes der da tillige kiselførende Celler i Bladrandene; den lille Varietet *(pusilla)* af *Mniopsis Weddelliana* har dog meget kiselrige Blade, og disse ere derfor mere modstandsdygtige. Da Roden ubevægelig ligger fast trykt til Underlaget har den ingen Brug for et bøjeligt Afstivningsmateriale, som Sej-Basten er, og saadant har jeg heller ikke fundet Spor af; derimod dækkes den ofte af et tæt Kiselpanser. Den oprette Stængel faar begge Dele, baade Kisel i sin Overhud og tillige de bøjelige mekaniske Celler, men disse Længde og vel ogsaa deres Bøjelighed og Sejhed staar dog tilbage for Bladprosenkymets.

La famille des Podostémacées.

Études

par

M. **Eug. Warming.**

I. Les organes végétatifs chez le *Podostemon Ceratophyllum* Michx., le *Mniopsis Weddelliana* Tul. et le *Mn. Glazioviana* Warmg.

Comme 1re partie d'un travail que j'ai entrepris sur la famille des Podostémacées au point de vue morphologique, anatomique et systématique, je publie ici les résultats de mes recherches sur les organes végétatifs des trois plantes ci-dessus mentionnées, comme en partie aussi du *Mn. scaturiginum* Mart.

Les matériaux de ces recherches m'ont été fournis par M. W. Canby, avec l'obligeante entremise de M. le professeur Asa Gray, par M. A. Glaziou et par différents musées (Jardin des Plantes à Paris, musée de Stockholm, etc.), et je leur adresse ici mes sincères remercîments pour la précieuse assistance qu'ils ont bien voulu me prêter.

Les plantes dont il s'agit présentent les particularités anatomiques suivantes. Les stomates manquent; les cellules épidermiques sont polygonales, quelquefois un peu allongées (III, 25; IV, 6; V, 5); les méats intercellulaires sont extrêmement petits et peu nombreux, ou font complètement défaut; toutes les parois des cellules sont formées de cellulose pure, excepté celles des trachéides, qui sont un peu lignifiées, et elles ont de la tendance à devenir collenchymateuses, surtout dans certaines parties du tissu fondamental et autour des faisceaux vasculaires. L'amidon est très abondant dans la racine et la tige et a les formes représentées dans VI, 5; les concrétions de silice, dans les formes représentées dans III, 25; V, 8, 9 et VI, 9, sont très nombreuses à la périphérie, surtout dans l'épiderme de la racine et de la tige, à la base et plus ou moins dans le limbe des feuilles, principalement le long des bords (III, 11; IV, 3, 5; VI, 8); on en trouve aussi dans l'intérieur autour du cylindre central et des faisceaux fibro-vasculaires (voir Warming: Vid. Meddel. fra d. naturhist. Forening i Kjøbenhavn, 1881).

Les trois espèces qui nous occupent (et sans doute aussi toutes les autres Podostémacées) ont des racines plagiotropes rampant dans toutes les directions; elles sont dorsiventrales; leur section transversale est représentée III, 3, 11 et V, 12 B, 18 B; elles

renferment un peu de chlorophylle. Le cylindre central a à peu près la même forme que toute la racine et est plus rapproché du côté ventral; je l'ai trouvé formé seulement de liber mou dans de petites racines de *Mn. Weddelliana* (VI, 2), et de liber mou avec deux groupes de xylème chez toutes les autres (III, 11, 15, 17, 18; V, 12 B, 18 B et VI, 3), soit avec (VI, 3) soit sans (III, 15) différenciation du liber mou. Celui-ci se compose de cellules cambiformes et de tubes criblés (III, 16, 17, 19); je n'y ai pas constaté avec certitude la présence de cellules adjointes[1]). Le tissu fondamental contigu au cylindre central est plus fortement collenchymateux qu'à une distance plus grande.

Toutes les racines sont munies d'une coiffe, mais le côté qui regarde le substratum est moins développé que les autres (III, 23); cela va si loin qu'il ne reste qu'une petite coiffe onguiforme sur le côté supérieur de la pointe (V, 19, 20, 21, 22, 24). De là à sa complète disparition il n'y a qu'un petit pas (chez le *Tristicha*, d'après M. Cario, qui, pour cette raison, désigne la racine comme un thallus; les plantules du *Castelnavia* (*princeps?*) sont aussi tout à fait dépourvues de coiffe, et le sommet de la radicelle se couvre de poils radicaux tout comme chez les *Cuscuta*). Je n'ai pas trouvé de limite tranchée entre le périblème et le plérome, et la coiffe semble naître du même méristème que l'épiderme.

La régénération des racines après une rupture est chose très commune, et elle se fait à l'extrémité acroscope (I, 1; II, 2; III, 4, 14, 22(?); V, 12, 13, 16, 20A; VI, 1). On a représenté dans II, 2 et III, 4 B deux racines qui naissent de la même face de rupture; elles peuvent être réunies à la base (III, 4 C; V, 13, 23), de sorte qu'il semble s'être produit une dichotomie.

Les nouvelles racines naissent sur les flancs des anciennes ou un peu en dedans sur le côté ventral, lorsque la racine devient extraordinairement large (I, 1; V, 10 A, 12 A, 18 A et B, 20 A, 12 B; VI, 12). Elles sont endogènes. Des racines peuvent aussi naître des tiges (I, 11; III, 1; VI, 10, 11).

La racine est fixée au substratum 1° par des poils radicaux de structure ordinaire, mais à parois épaisses, irrégulièrement étalés à la pointe et souvent très courts (III, 8, 9, 11; V, 18; VI, 4, 14, 15); ils sécrètent une matière visqueuse qui les colore en brun. 2° par des appareils préhenseurs particuliers que je propose d'appeler haptères (ἅπτειν), qui partent de la racine au-dessous de la base des pousses radicales (par ex. II, 6, 9; III, 1 etc.) et qui, suivant la distance qui les sépare du substratum, sont ou longs et coniques avant de s'étaler pour s'accrocher à ce dernier, ou courts, larges et en forme de disque (I, 1, 11; II, 3, 6, 8, 9; III, 1, 3, 5, 7; V, 18; VI, 12, 14). Ils sont quelquefois ramifiés (II, 9; III, 6, 7, 10), et peuvent aussi avoir des poils radicaux. Ils naissent d'une manière exogène (III, 11, 12) et se ramifient de la même façon (III, 13); ils ont un point végétatif terminal (III, 12, 13) qui est entièrement nu. Ils sont formés seulement de parenchyme, qui peut être riche en amidon et renfermer de la silice dans l'épiderme, et ils peuvent se régénérer (III, 20) comme les racines. Quoique, par conséquent, ils s'écartent beaucoup des racines et constituent comme une espèce d'émergences sur ces dernières, je suis cependant porté à croire qu'ils dérivent phylogénétiquement des racines, hypothèse en faveur de laquelle on

[1]) «Cellules-adjointes», synonymes avec les «Geleitzellen» de Wilhelm. Voir Kolderup Rosenvinge «Vegetationsorganerne hos *Salvadora*»; Danske Vid. Selsk. Oversigter, 1880.

peut invoquer: 1) leur croissance apicale; 2) leur place sur les racines; 3) la faculté (il est vrai, seulement observée une fois) qu'ils ont de se régénérer, et 4) à un moindre degré, qu'ils ont des poils radicaux (car on en trouve aussi sur les thalles, sur les proembryons des cryptogames, sur les formations appelées «callus» par les botanistes allemands, sur certains rhizomes et sur le proembryon de certaines graminées). Je regarde également comme des racines transformées les formations thalloïdes intracorticales chez le *Viscum* et d'autres parasites. Il existe, comme on sait, des racines sans coiffe et d'autres qui sont exogènes.

Les haptères se développent aussi sur les tiges (II, 3; V, 4, 14, 15); cependant je n'ai pu constater avec certitude s'ils sont également exogènes.

Les pousses naissent sur les racines, qui, sous ce rapport, jouent évidemment un rôle très important dans toute cette famille (voir les figures de Tulasne; sa Fig. 2 Pl. IX, une *Dicræa elongata*, représente certainement une racine donnant naissance à des pousses; comparer avec mes figures IV, 14 et V, 10 A). Elles sont placées sur les flancs des racines ou un peu en dedans sur le côté ventral (III, 11, 12; V, 12, 18), ordinairement par paires (I, 1, 11; III, 1, 6; IV, 14; V, 10 A, 12 A); elles naissent en ordre acropétale (IV, 14), quelquefois plusieurs paires en même temps (V, 10 A). Elles sont endogènes à la périphérie de l'écorce de la racine (III, 2, 11, 12, 21; V, 18 B).

Les pousses développées font avec la racine des angles très variables, depuis une direction presque verticale, comme chez le *Mn. Glazioviana* (VI, 13), jusqu'à une direction presque horizontale, comme chez quelques formes du *Mn. Weddelliana* (IV, 14). Elles sont nettement dorsiventrales (p. ex. I, 6, 10; II, 1; IV, 18, 19; VI, 13), mais cette particularité n'est pas poussée à l'extrême comme chez le *Castelnavia* ou *Marathrum* et autres genres (j'appelle face ventrale celle qui se détourne du plan de symétrie de la racine et qui est tournée en dehors ou en bas vers le substratum; le flanc «acroscope» regarde la pointe de la racine et le «basiscope», son extrémité postérieure).

Les feuilles situées sur les flancs de la pousse ont la disposition $^1/_2$; la 1re feuille est située sur le flanc basiscope, par ex. IV, 14, 15, 18. Le bord «gastroscope» de la feuille n'embrasse guère plus fortement le côté ventral de la tige que le bord «notoscope», le côté dorsal. Le limbe se tourne de manière que sa face ventrale (supérieure) vient regarder le côté dorsal de la pousse, et tous les limbes des feuilles viennent par conséquent se placer dans le plan dorsiventral de la racine.

Les pousses radicales commencent avec deux écailles. Même s'il se produit un changement (suivant la saison?) dans la longueur des entre-nœuds (chez le *Pod. Ceratophyllum*: I, 9; II, 3, 4 A), il ne se forme ensuite que des feuilles foliacées.

Les feuilles foliacées ont, chez le *Pod. Ceratophyllum*, une stipule intrapétiolaire complète (I, 2, 3, 4, 8, etc.; II, 1, 4, 5, etc.). Les trois espèces connues du genre *Mniopsis* n'ont qu'une demi-stipule intrapétiolaire sur le côté notoscope de la base de la feuille (IV, 15, 16, 17, 18, etc.; V, 3, etc.; VI, 13, 16); elle a été considérée comme une feuille indépendante (voir Weddell, De Cand. Prod. 17, p. 77).

Les limbes des feuilles foliacées sont pennatipartites, et les formes des partitions varient beaucoup chez le *Pod. Ceratophyllum*, sans doute suivant les localités (comparer I, 1

et II, 5 avec I, 6, 8 et II, 1). (Les feuilles du *Mn. scaturiginum* gardées dans les collections (VI, 16) seraient-elles entières?)

La tige n'a pas de sommet qui s'élève au-dessus de la plus jeune feuille; les feuilles sont à peu près terminales (III, 21; IV, 1, 2), la plus jeune naissant entre les deux qui l'ont précédée, en surmontant un peu la base de la plus âgée.

Sous l'épiderme, on trouve un tissu cellulaire irrégulier (III, 21) jusqu'à une certaine profondeur dans la tige (les parties les plus foncées de IV, 1, 2). Les partitions des feuilles, tant du 1er ordre que d'un ordre plus élevé, naissent toutes en ordre acropétale, souvent si près du sommet de la partition principale, qu'il semble presque se dichotomer, et sont alternantes tout comme chez les fougères (IV, 8—13); dans le bourgeon, elles se recouvrent de manière que chaque bord acroscope est recouvert par le bord basiscope de la partition supérieure de la feuille, regardée du côté dorsal (IV, 13; «oberschlächtige Deckung» de feu Al. Braun, voir Berlin. Monatsber. 1875, p. 328). La partition inférieure du 1re ordre de chaque feuille naît ordinairement sur le bord notoscope des feuilles.

Les pousses latérales ne sont pas axillaires en dedans de la stipule ordinaire, mais naissent à la base du bord notoscope de la feuille, et sont couvertes par une stipule spéciale («extérieure») de la même forme que la stipule normale («intérieure»); ces feuilles ainsi munies de deux stipules, je propose de les appeler des feuilles dithèques (I, 5, 6, 10, etc.; (II, 1, 5, 7, etc.; IV, 16, 18—23; V, 17; VI, 13, 16). La pousse latérale se tourne de manière que son côté dorsal regarde à peu près dans la même direction que celui de la pousse mère, et que son flanc notoscope s'écarte du plan de symétrie de la pousse mère; ce flanc porte la feuille inférieure, qui, de même que toutes les suivantes, est foliacée (voir le diagramme IV, 24).

Dans quelques cas, la ramification devient dichotomique, et la feuille dithèque se trouve alors au milieu de la dichotomie (I, 6 A; II, 1 A); les sympodes sont très communs I, 4, 6 B-C, 7, 9, 10; II, 4, 5; III, 1, etc.); les monopodes sont rares. Les pousses latérales peuvent porter 1, 2, 3 feuilles foliacées et davantage avant qu'elles fleurissent (voir par ex. IV, 19).

De véritables bourgeons axillaires ont été observés dans un cas, mais je ne sais s'ils étaient réellement exogènes (II, 4; voir l'explication des planches). Ils ont commencé par deux écailles placées à droite et à gauche du plan médian, après quoi il s'est produit une rotation toujours plus marquée des rangées des feuilles, jusqu'à ce qu'elles fussent dans le plan dorsiventral.

Les figures II, 7 et IV, 1, 2 représentent la ramification des faisceaux vasculaires dans la tige, et les figures IV, 3 et VI, 8, des coupes transversales de la tige avec les faisceaux. Chacun d'eux est formé de liber mou et de trachéides qui sont contigus au côté ventral des faisceaux (IV, 3; VI, 8); dans les faisceaux plus âgés, il y a une cavité au milieu (VI, 8). Les faisceaux vasculaires sont, comme le cylindre central dans la racine, consolidés, surtout sur leur côté dorsal, par un tissu collenchymateux (*col* dans les figures) dont les cellules ici se rapprochent cependant davantage de celles du liber dur; des formes comme VI, 6, 7 a-b, qui joignent la forme du parenchyme aux pores du liber dur et des fibres

ligneuses, se trouvent dans le tissu qui entoure les faisceaux, et on y rencontre aussi de véritables cellules de liber dur. L'écorce peut renfermer des parties formées d'un tissu fortement collenchymateux (IV, 3).

Les feuilles, dans le milieu un peu creusé en forme de gouttière de leur face supérieure, surtout près du sommet des partitions, ont un épiderme comme celui de la Fig. IV, 6 et V, 5; les petites cellules peuvent s'allonger en forme de poils (IV, 7); il se produit évidemment ici une sécrétion. Il n'y a pas de différenciation dans le mésophylle (V, 6). Les faisceaux vasculaires peuvent être entourés (voir V, 6) de véritable liber dur, c'est-à-dire de cellules longues et étroites de prosenchyme (VI, 7 d).

Explication des Planches.

Planche I.

Podostemon Ceratophyllum Michx.

Fig. 1 [$\frac{2}{1}$]. Exemplaire en grandeur double, vu d'en haut. *R—R*, racine fixée à une pierre, et de laquelle naissent 4 paires de pousses feuillées et 1 pousse isolée. Les pousses sont dirigées obliquement vers le haut et non horizontalement comme la figure semble l'indiquer; elles ont un côté ventral (tourné en bas) et un côté dorsal (tourné en haut et visible dans la figure). Les haptères *h—h* naissent des racines au-dessous de la base des pousses; celles-ci sont endogènes et les haptères, exogènes. *r—r* sont 5 racines nées sur *R—R*; de deux d'entre elles on ne voit que des fragments; deux autres se sont régénérées immédiatement au-dessus de la base et portent chacune 1 paire de bourgeons (g, g), qui se développeront en des pousses feuillées; la cinquième a 2 paires de bourgeons.

Fig. 2 [$\frac{3}{1}$]. Feuilles d'une pousse séparées les unes des autres et dessinées exactement avec leurs formes. *f* est vue de la face dorsale et les autres le sont de la face ventrale, qui se tourne toujours de manière à regarder le côté dorsal des pousses. Chaque feuille est munie d'une stipule intrapétiolaire. *h* est encore en préfoliation; *i* est renfermée dans la stipule de *h*.

Fig. 3 [$\frac{3}{1}$]. Pousse naissant de la racine *r*, et dont les partitions des feuilles sont plus étroites que dans les Fig. 1 et 2.

Fig. 4 [$\frac{3}{1}$]. Partie supérieure d'une pousse dont les feuilles ont en partie des partitions encore plus fines que celles de la Fig. 3. C'est un sympode de deux pousses. *a*, *b*, *c* sont des restes de feuilles sur l'axe du 1er ordre, qui se termine en une fleur *fl* maintenant tombée; *c* est une feuille dithèque, près du bord notoscope de laquelle a pris naissance la pousse II, qui porte les feuilles 1, 2, . . . 5.

Fig. 5. Feuille dithèque.

Fig. 6 A. Branche environ de grandeur naturelle, vue du côté ventral; 1, 2, 3 . . . 7 sont les feuilles de la pousse I; les feuilles 3, 4 et 7 sont dithèques. Par suite du vigoureux développement des axes latéraux, l'axe principal est dévié de sa direction première, et il se forme au point d'insertion des feuilles dithèques 3 et 4 deux pseudodichotomies dans lesquelles ces feuilles sont en apparence terminales. L'axe principal se termine par la fleur *I* et, à la base notoscope de la feuille 7, naît une pousse latérale *K*, qui plus tard formera certainement un sympode avec l'axe principal (voir Fig. 6, B et C). A gauche, au bord notoscope de la feuille 3, part une pousse latérale avec les feuilles *a*, *b*, *c* . . . *g*; *d* est une feuille dithèque, à la base notoscope de laquelle naît une autre pousse latérale K^1 (voir Fig. 6 D). Les feuilles *e*, *f* et *g* sont beaucoup plus jeunes que les précédentes et ne sont en partie pas encore épanouies. Au bord de la feuille 4, à droite, on voit une pousse latérale analogue à celle de la feuille 3.

Fig. 6 B [$\frac{5}{1}$]. Partie supérieure de la pousse I de la figure précédente, avec les feuilles 5, 6 et 7, également vue du côté ventral; *K* est la pousse latérale qui se développe à la base de la feuille 7. La fleur qui termine l'axe principal a donné un fruit qui n'a pas mûri; dans quelque temps, elle semblera sans doute être latérale par suite de l'usurpation de l'axe latéral.

Fig. 6 C. Même branche vue du côté dorsal, ce qui permet de voir plus distinctement les deux stipules de la feuille 7.

Fig. 6 D [$\frac{5}{1}$]. Partie supérieure, vue du côté dorsal, de la pousse située à gauche de la feuille 3, dans la Fig. 6 A, avec les feuilles *b*, *c*, *d* . . . *g*; *st*, stipules de la feuille dithèque *d*. A son bord notoscope sort un bourgeon dont la première feuille K^1 enferme la deuxième feuille *l*. L'axe principal (II), dont la fleur vient d'éclore, conserve encore à peu près sa direction primitive, mais plus tard la pousse latérale le rejettera certainement de côté. La feuille *g* est aussi dithèque et sa stipule externe enferme le bourgeon III.

Fig. 7 A. [$\frac{3}{1}$]. Extrémité supérieure d'une branche sympodique avec 3 générations de pousses. *a*, *b* et *c* sont les feuilles, la dernière dithèque, de la pousse I, qui se termine par une fleur flétrie. 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les feuilles de la pousse II, qui a pris naissance au bord externe de la feuille *c* et continue la croissance de l'axe principal. Son bourgeon terminal est enfermé entre les stipules des feuilles 5 et 6. La feuille 6 est dithèque (*st*, stipules); à son bord notoscope naît la pousse III, dont *x* est la première feuille.

Fig. 7 B. Parties basales des feuilles 6 et *x* dans la Fig. 7 A.

Fig. 8 A. Fragment d'une branche à peu près de grandeur naturelle, vu du côté ventral; il se termine en I par un bouton. Les 4 feuilles supérieures *a*, *b*, *c* et *d* ont encore un limbe et des partitions très fines; des feuilles inférieures il ne reste que des parties basales.

Fig. 8. B. Partie supérieure de 8 A, vue du côté dorsal. *d* est une feuille dithèque et *st* sont ses stipules. A son bord externe, à droite, naît la pousse II avec les feuilles *x* et *y*.

Fig. 9 [$\frac{3}{1}$]. Partie d'une branche avec 4 générations de pousses. Après une série de courts entre-nœuds à partir de la base, viennent des entre-nœuds plus longs qui ensuite se raccourcissent de nouveau. Au-dessus de la feuille *a*, les feuilles sont encore assez fraîches (excepté la feuille *d*); au-dessous, elles sont tombées; *a*, *b*, *c* et la feuille dithèque *d* sont les feuilles supérieures de la pousse I, qui se termine par une fleur, maintenant flétrie. 1, 2 et la feuille dithèque 3 appartiennent à la pousse suivante II, qui se termine par un bouton, et *m*, *n*, *o*, *p* et la feuille dithèque *q*, à la pousse III, qui se termine aussi par un bouton; α, β, γ, δ, ε . . . sont les feuilles de la 4e génération de pousses.

Fig. 10 A et B. Partie d'une pousse, vue du côté dorsal (A) et du côté ventral (B). *a*, *b* et la feuille dithèque *c* sont les feuilles supérieures de la pousse I, qui se termine par un bouton; α est la 1re feuille de la pousse II, qui a pris naissance au bord externe de *c* et forme un sympode avec l'axe principal.

Fig. 11 [$\frac{5}{1}$]. Fragment de racine (*r*, *r*), d'où partent deux pousses endogènes (*g*, *g*); de l'une d'elles sort une racine r^1 qui porte une pousse nouvelle, g'; *h* est un haptère.

Planche II.

Podostemon Ceratophyllum Michx.

Fig. 1 A. Partie d'une plante, à peu près en grandeur naturelle, vue du côté dorsal. La pousse principale I porte les feuilles *a*, *b*, *c* et la dithèque *d* et est ensuite déviée à droite par la branche se développant à gauche, dont la 1re feuille est *m*, après quoi elle porte la feuille dithèque *e*, est déviée à gauche par la branche se développant à droite, dont la 1re feuille est 1, et porte enfin les feuilles *f*, *g*, *h* (dithèque), *i* et *k* (dithèque). Voir 1 B et 1 C.

Fig. 1 B [$\frac{5}{1}$]. Partie supérieure de la pousse principale précédente, vue du côté ventral.

Fig. 1 C. Même partie, vue du côté dorsal. La feuille *i* n'est pas tout à fait normale, car de sa base part un lobe i^1 avec une stipule st^1 sur le côté ventral de la branche. Le bourgeon II, embrassé par la stipule externe de la feuille h^1, porte les feuilles α, β . . .

Fig. 1 D et E. Sommet de la branche inférieure dans A, vu du côté dorsal et du côté ventral. 1 D est plus fortement grossi [$\frac{10}{1}$] que 1 E [$\frac{5}{1}$]. Cette branche porte les feuilles *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, ces deux dernières dithèques, *r* qui n'est pas encore éclose, etc. (la stipule interne de la feuille *q* est coupée à son extrémité). Le bourgeon III, embrassé par la stipule externe de la feuille *p*, n'a encore que 2 feuilles visibles, α et β, et celui qui est à la base externe de la feuille *q'* n'en a encore qu'une.

Fig. 1 F et G [$\frac{5}{1}$]. Sommet de l'avant-dernière branche inférieure de A, vu du côté dorsal et du côté

ventral. Elle porte les feuilles 1, 2, 3, 4 et 5, dont l'avant-dernière est dithèque. Le bourgeon qui est enfermé dans la stipule externe de la feuille 4 est à peu près aussi développé que le bourgeon terminal, qui est enfermé dans la stipule interne. La 1re feuille de ces deux bourgeons est, quant à son développement, bien en arrière des feuilles 1—4.

Fig. 2 [$\frac{3}{1}$]. Parties d'une racine. Elle est brisée en *reg*, mais s'est régénérée par deux nouvelles racines; on voit trois pousses sur ces racines, et il y en avait une quatrième qui est tombée.

Fig. 3 [$\frac{5}{1}$]. De la racine *r* part une pousse qui est vue du côté ventral, de sorte que l'haptère h_1 tourne vers le spectateur sa face inférieure. De la plupart des feuilles il ne reste que la base. Les feuilles *a*, *b*, *c* et *d* semblent être suivies d'une dithèque *e* (?); mais alors on observe ici cette particularité que la pousse latérale II, dont les feuilles inférieures sont marquées α, β, γ, s'est développée beaucoup plus vite que la pousse principale, qui poursuit seulement maintenant son développement; ses autres feuilles sont *f*, *g*, *h* . . . L'extrémité de la pousse latérale II a disparu, de même que la plus grande partie de la feuille dithèque *t*; *s* est l'avant-dernière feuille supérieure. La pousse III porte les feuilles *x*, *y*, *z* . . .

Entre les feuilles *d* et *f* de la pousse I, on voit un haptère ramifié qui pend verticalement, mais on ne discerne pas bien s'il a une origine exogène. Les branches en sont très fortement fixées les unes aux autres en * et *. C'est la seule fois que, chez le *Podostemon Ceratophyllum*, j'ai observé un appareil de ce genre naissant directement de la tige.

Fig. 4 A. Cette figure représente un cas rare, à savoir la formation de bourgeons axillaires normaux. J'ai représenté la partie supérieure d'une pousse vue du côté dorsal; de la plupart des feuilles il ne reste que la base. Après la feuille *a*, suivent avec une alternance régulière les feuilles *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* et *h*, dont la dernière est dithèque. La pousse principale se termine en I; la pousse latérale II, embrassée par la stipule externe de h^1, porte les feuilles α, β, γ et la feuille dithèque δ, ainsi que la fleur II qui a donné un fruit (*stam* est le reste d'une étamine); la pousse III, formée à la base de δ, porte les feuilles *m*, *n*, *o*, *p* et la dithèque *q*; le sommet en est caché entre les stipules de III. La pousse IV, embrassée par la stipule externe de *q*, porte les feuilles α^1, β^1 . . .

Outre la pousse latérale normale II, l'axe principal porte trois bourgeons C, D, B, qui ne sont pas embrassés par des feuilles dithèques et qui, en opposition avec les pousses normales extra-axillaires, débutent avec des écailles. La pousse C, qui est vue du côté ventral dans 4 C, est à l'aisselle de la feuille *c* et porte l'écaille 1, l'écaille bifide 2, une feuille foliacée normale 3, dont le limbe est tombé, et ensuite les feuilles foliacées 4, 5, 6, 7, 8 . . . La feuille 1 regarde le côté dorsal de l'axe principal; la feuille 2, le côté ventral dans une direction oblique; la feuille 3 et, à un plus haut degré, les suivantes, sont situées à peu près dans le même plan que les feuilles de l'axe principal (plan dorsiventral).

Le bourgeon D est situé à l'aisselle de la feuille *f*; il est plus fortement grossi dans 4 D, où je l'ai représenté tel qu'il se montre lorsque l'axe mère est vu de côté. Les feuilles 1 et 2 sont des écailles; la première regarde le côté ventral de l'axe mère et la seconde, son côté dorsal. Puis viennent des feuilles foliacées. Le bourgeon B, à l'aisselle de *g*, est plus grossi dans 4 B; la première de ses deux feuilles inférieures (les écailles 1 et 2) semble être tournée vers le côté ventral de la branche comme dans le bourgeon C (par suite d'une inexactitude dans le dessin, la feuille 1 est recouverte par 2).

Fig. 5 A [$\frac{2}{1}$]. Partie d'une branche faiblement grossie. La pousse I porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, dont la dernière est dithèque, et se termine par une fleur I, dont il ne reste que l'involucre. La pousse II forme un sympode avec l'axe mère; elle porte les feuilles α, β et γ (dithèque) et se termine par le bouton II. Pour le reste, voir la figure suivante.

Fig. 5 B [$\frac{6}{1}$]. α, β et γ comme daus 5 A. Le bouton a été enlevé. Autant qu'on en peut juger, il semble que les feuilles de la pousse latérale III sont les feuilles dithèques *m* et *n*, dont la première est en partie tombée, et *o*, *p* . . . A la stipule externe de *m*, se dévéloppe une pousse qui commence avec la feuille *x*, mais dont le reste *y* est très obscur, et à celle de *n* se forme la pousse IV avec les feuilles 1, 2 . . .

Fig. 6. De la racine *r* partent une pousse endogène et un haptère exogène qui s'étale sur une pierre.

Fig. 7 [$\frac{1,0}{1}$]. Partie supérieure de la pousse I, avec les feuilles *a*, *b* et la dithèque *c* qui est terminale. Celle-ci embrasse avec sa stipule interne le bouton terminal (le bouton I) et avec sa stipule externe le bourgeon II. En *f* on a indiqué les faisceaux vasculaires.

Fig. 8. Un haptère qui s'attache à une pierre.

Fig. 9. De la racine *r* partent une pousse endogène et un haptère ramifié. En *cic* il y a une cicatrice. Deux des autres branches se sont étalées à leur extrémité et fixées à un corps étranger; la troisième pend encore librement et est en train de se ramifier en *pv*. Les points végétatifs sont plus foncés que le reste du tissu. Toutes les branches des haptères sont exogènes.

Planche III.

Podostemon Ceratophyllum Michx.

Fig. 1 [$\frac{2}{1}$]. Pousse d'où part une très longue racine. La pousse est presque entièrement dépourvue de feuilles. Son 1er axe se termine en fl^1 par les restes d'une fleur et son 2e axe en fl^2, par un jeune fruit. De la racine partent 6 paires de pousses et 2 pousses isolées; les plus jeunes (g) sont encore enfermées dans le tissu de la racine, *h* sont des haptères,

Fig. 2. Extrémité d'une racine en coupe longitudinale; on voit un bourgeon endogène recouvert de 2 couches de cellules. Au centre est indiqué le cylindre central.

Fig. 3 [$\frac{10}{1}$]. Coupe transversale d'une racine *r*, près d'une paire de pousses; leurs parties basales sont représentées dans leur position divergente naturelle; au-dessous, on aperçoit leurs haptères.

Fig. 4 [$\frac{2}{1}$]. Partie d'une racine qui s'est régénérée en 3 endroits et qui, au-dessus de *c*, présente presque une dichotomie. En *c*, la racine s'est régénérée totalement d'un côté (voir 4 C); en *b*, apparaît en même temps une racine plus petite (voir 4 B), qui semble être dépourvue de coiffe. On voit deux pousses isolées et, en *ci*, les cicatrices de deux autres.

Fig. 5. Fragment de racine avec deux haptères soudés ensemble; celui de gauche a par erreur été placé trop loin de la base de la pousse à laquelle il appartient.

Fig. 6. Fragment de racine avec des haptères; on voit que la longueur et la forme de ces appareils dépendent de la distance à laquelle la racine se trouve de la pierre où elle se fixe.

Fig. 7. Un haptère qui se ramifie à son extrémité inférieure; les points végétatifs sont reconnaissables à leur contenu plus foncé; ils sont munis de poils radicaux, qui sont représentés à gauche avec un plus fort grossissement.

Fig. 8. Fragment d'une racine (coupe transversale) avec des poils radicaux.

Fig. 9. Extrémités de pareils poils radicaux.

Fig 10. Haptère ramifié.

Fig. 11. Coupe transversale d'une racine, sur laquelle on voit en *g* un bourgeon encore recouvert de 1 ou 2 couches de cellules, et au-dessous un haptère (*h*) en train de se développer. On aperçoit dans la racine le cylindre central, dont les deux groupes de xylème sont marqués *xyl*. Les points marqués *sil* désignent des cellules qui renferment de la silice.

Fig. 12. Coupe longitudinale d'un haptère; en haut, en *g*, la coupe a rencontré une pousse qui a percé le tissu de la racine.

Fig. 13. Coupe longitudinale d'un autre haptère.

Fig. 14. Coupe longitudinale d'une racine d'où part une autre racine qui a dû aussitôt se régénérer. On a indiqué la situation du cylindre central et la disposition des cellules aux points de rupture.

Fig. 15. Coupe transversale du cylindre central d'une racine et du parenchyme riche en amidon qui l'entoure. On voit 2 groupes de trachéides (*xyl*), mais le cylindre est du reste formé de tubes criblés et de cellules cambiformes, en partie avec des parois un peu collenchymateuses.

Fig. 16. Partie du liber mou avec des tubes criblés distincts.

Fig. 17. Trachéides avec le liber mou contigu.

Fig. 18. Extrémité d'un trachéide.

Fig. 19. Partie de liber mou avec des pores distincts sur les parois des tubes criblés, cas qui n'a été observé qu'une fois.

Fig. 20. Fragment d'une racine, avec un bourgeon et un haptère qui s'est régénéré et de nouveau est rompu au sommet.

Fig. 21 A. Coupe longitudinale d'une jeune pousse radicale, faiblement grossie; elle porte 3 feuilles, dont deux ont déjà des stipules distinctes.

Fig. 21 B. La plus jeune feuille de 21 A fortement grossie.

Fig. 22. Extrémité d'une racine qui semble se régénérer; derrière la pointe, on voit deux jeunes pousses qui ne se sont pas encore fait jour.

Fig. 23. Pointe d'une racine, vue du côté dorsal (à gauche) et du côté ventral. La coiffe est visiblement plus petite sur le côté ventral.

Fig. 24. Cellule du parenchyme du tissu fondamental dans une racine; la paroi en est un peu collenchymateuse. Son protoplasme s'est retiré de la paroi et s'est entouré d'une membrane à double contour. Les grains d'amidon qui étaient logés dans le protoplasme en sont tombés.

Fig 25. Épiderme d'une racine; toutes les cellules sont remplies de corps siliceux, dont la périphérie est transparente, tandis que leur intérieur renferme un grand nombre de pores fins remplis d'air.

Planche. IV.

Fig. 1—13. *Podostemon Ceratophyllum* Michx.

Fig. 1. Coupe longitudinale de l'extrémité d'une pousse. f^1, f^2, f^3, f^4 et f^5 sont les feuilles les plus jeunes et *fv*, les faisceaux fibro-vasculaires qui y aboutissent. Les feuilles f^3—f^5 et le tissu cellulaire, dans la partie de la tige au-dessous d'elles, ont des cellules plus petites, plus foncées et plus riches en protoplasme que les autres parties.

Dans la figure placée au bas de la figure principale, on voit les deux feuilles les plus jeunes, f^4 et f^5, et des parties de f^2 et de f^3. La feuille la plus jeune f^5 est à peu près terminale, et sa face dorsale est moins haute que la face ventrale qui regarde la plus jeune feuille suivante (f^4).

Fig. 2. Coupe longitudinale de l'extrémité d'une autre pousse; la feuille la plus jeune est plus développée que la feuille correspondante de la Fig 1. La stipule de la plus jeune feuille suivante saille déjà fortement.

Fig. 3. Coupe transversale d'une tige. A la périphérie, sont indiquées des cellules à silice. Dans le parenchyme du tissu fondamental, on voit sur la face ventrale (qui est tournée vers le bas) une bande de collenchyme. Les faisceaux vasculaires sont à peu près disposés en une bande transversale; ils ont chacun sur le côté dorsal une partie formée de collenchyme; les trachéides sont plus rapprochés du côté ventral.

Fig. 4. Un des plus petits faisceaux vasculaires d'une tige; il est formé presque exclusivement de tissu collenchymateux environnant un peu de tissu cambiforme.

Fig. 5. Coupe transversale d'une feuille. La face ventrale est tournée vers le haut. Sur les bords sont indiquées des cellules contenant de la silice. Il y a du collenchyme sur le côté ventral de la nervure.

Fig. 6. Sommet d'une partition de feuille. Il est un peu creusé au milieu en forme de gouttière, et, entre les cellules épidermiques, dont les parois sont ici un peu plus minces, on voit quelques cellules brunâtres plus petites; ces petites cellules surmontent souvent les autres sous forme d'une coupole, plus rarement:

Fig. 7. Sous forme de petits poils.

Fig. 8—13. Diverses phases de développement de la feuille foliacée. Les partitions primaires (*a*, *b*, *c*, *d* etc.) et secondaires (a^1, a^2, etc., b^1, b^2, etc.) naissent en direction acropète. Une partition naît souvent si près du sommet de la partition principale, que celle-ci semble presque se bifurquer par dichotomie (voir, par ex., Fig. 9, 10, 11). La stipule apparaît de bonne heure à travers la base de la feuille comme un bourrelet demi-annulaire, qui en croissant entoure la feuille suivante. En regardant de dehors le côté de la feuille (Fig. 13), on voit le bord supérieur (acroscope) d'une partition recouvert par le bord inférieur de la partition située au-dessus, de sorte que le bord supérieur est l'interne et l'inférieur, l'externe (cela n'est pas bien représenté sur le côté gauche de la Fig. 10 comme dans les autres).

Fig. 14—24. *Mniopsis Weddelliana* Tul.

Fig. 14. Racine bien garnie de pousses et dont la pointe est recouverte par la coiffe, avec un grossissement de 2 fois. Il n'y a pas d'haptères. La feuille inférieure de chaque pousse regarde l'extrémité opposée à la pointe de la racine.

Fig. 15 [$\frac{5}{1}$]. Fragment de la même racine fortement grossi. Dans cette figure et, en général, chez les feuilles des espèces dont il s'agit ici, la 1re partition de chaque feuille est située sur le bord «notoscope» de la feuille, mais tournée latéralement par la rotation des feuilles lorsqu'on regarde la pousse du côté dorsal. La feuille inférieure de chaque pousse n'a pas de stipule.

Fig. 16. Partie supérieure d'une pousse florifère (de la Fig. 14). La fleur, non encore éclose, est terminale. La feuille supérieure est dithèque, mais la pousse latérale qui se développera à sa base, gardée par la stipule *st'*, est encore très petite et tout à fait cachée par la stipule.

Fig. 17. Feuille isolée. Dans le genre *Mniopsis* (*Mn. Weddelliana* Tul., *Mn. scaturiginum* Mart., *Mn. Glazioviana* Warmg.), la stipule est placée près du bord notoscope des feuilles et réduite à un petit lobe oblique; il n'y a qu'une demi-stipule.

Fig. 18 [$\frac{3}{1}$]. Une pousse de la Fig. 14 vue du côté dorsal (A) et du côté ventral (B). *a*, *b*, *c*, *d* en sont les feuilles; *d* est dithèque, comme il y a une stipule externe qui enveloppe une pousse dont la première feuille (α) est visible. On voit bien par cette figure et les figures 15, 19 et 23, que toutes les feuilles sont tournées de manière à regarder le côté dorsal de la tige (en haut).

Fig. 19 [$\frac{3}{1}$]. Pousse déjà munie de 3 axes latéraux, vue du côté dorsal (A) et en partie du côté ventral (B). Elle porte les feuilles *a*, *b*, *c*, la feuille dithèque *d* (la pousse latérale a trois feuilles *m*, *n*, *o*, et se termine par une fleur), la feuille dithèque *e* (la pousse latérale a deux feuilles, α et β, et se termine par une fleur) et la feuille dithèque *f* (la pousse latérale n'a qu'une feuille et se termine par une fleur), après quoi l'axe principal se termine par une fleur (I).

Fig. 20. Partie d'une pousse. Elle porte les feuilles *a*, *b*, la feuille dithèque *c*, dont la pousse latérale a une feuille, α, et se termine par une fleur (II), et la feuille dithèque *d*, dont la pousse latérale a une feuille, α, et se termine par une fleur encore peu développée et cachée par la stipule externe. On voit par cette figure, comme par les Fig. 16, 18, 19, 21, 22 et 23, que la stipule externe est en général placée plus bas que l'interne.

Fig. 21. Base d'une feuille dithèque, vue de derrière. *st* est la stipule interne et *st'*, l'externe; l'astérisque désigne le bourgeon (une fleur) caché par *st'*; dans ce cas, la fleur n'est pas accompagnée de feuilles foliacées.

Fig. 22 [$\frac{5}{1}$]. Pousse d'une plante plus âgée. Elle porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, *e* (dithèque; la pousse latérale, marquée avec un astérisque, est une fleur), *f* (dithèque; la pousse latérale est bien plus vigoureuse que celle de *e* et a une feuille foliacée, α), *g* (dithèque, dont la pousse latérale ressemble à celle de *e*), et *h* (dithèque, dont la pousse latérale n'est également qu'une fleur). L'axe principal se termine ensuite par une fleur qui a donné un fruit (I) pas encore mûr, tandis que toutes les fleurs des pousses latérales sont en bouton. On voit l'involucre à la base du pédoncule floral.

Fig. 23 [$\frac{3}{1}$]. Pousse, vue du côté dorsal. Elle porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et la large feuille dithèque *f*, et se termine par la fleur I qui est en pleine floraison, le stigmate et les étamines étant épanouis. La pousse II, enveloppée par la stipule externe de *f*, a deux feuilles foliacées α et β; cette dernière est dithèque et ses deux stipules sont marquées βst.

Fig. 24. Diagramme d'une pousse dont le côté dorsal est tourné vers le bas. Ses feuilles foliacées *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f* sont suivies de la fleur I. Les étamines sont (toujours) sur le côté ventral, comme on le voit aussi sur la Fig. 23, et les deux carpophylles regardent le côté dorsal et le côté ventral. La feuille *e* est dithèque et sa stipule externe embrasse la fleur II, au bas de laquelle est une feuille foliacée également dithèque, dont la stipule externe embrasse la fleur III. La feuille *f* sur l'axe principal est aussi dithèque. Les bords dorsaux des feuilles n'entourent pas le côté dorsal autant que dans la nature, et les pousses latérales se placent ordinairement dans un plan dont la direction se rapproche davantage de celle du plan dorsiventral de la pousse mère.

Planche V.

Mniopsis Weddelliana Tul.

(Fig. 1—2, var. *Caldensis* Warmg. Fig. 3—4, var. *typica* Warmg., d'après des exemplaires du Jardin des Plantes de Paris. Fig. 5—22, presque toutes appartenant à la var. *pusilla* Warmg).

Fig. 1. Vieille plante usée et abîmée par les eaux, avec des fruits non mûrs. Aucune feuille foliacée n'est complète. Les pousses sont réunies en forme de touffe et sont sans doute en partie des branches d'un tronc commun.

Fig. 2. Autre vieille plante, dont le tissu fondamental était en partie pourri et enlevé par les vagues; il ne reste que la partie centrale avec les faisceaux vasculaires, et des «inflorescences» fructifères se montrent alors en haut, comme M. Tulasne les mentionne et les représente dans sa monographie (p. 146).

Fig. 3 et 4. Exemplaires originaux de M. Tulasne. La plante Fig. 4 est vieille et en très mauvais état; sur ses côtés on voit deux haptères *h*, dont l'inférieur retenait antérieurement une pierre.

Fig. 5. Épiderme de la face supérieure d'une feuille, correspondant aux Fig. 6 et 7 de la Pl. IV.

Fig. 6. Coupe transversale d'une feuille; *ev*, épiderme de la face supérieure. On voit un faisceau vasculaire qui vient de se diviser en deux; le tissu de ces faisceaux est représenté avec une teinte plus foncée; ils sont enveloppés par des fibres libériennes (à parois plus noires).

Fig. 7. Bord d'une feuille coupée transversalement, tel qu'il se présente quelquefois.

Fig. 8. Partie d'une coupe transversale du bord d'une feuille de la variété *pusilla*, traitée par la potasse. L'épiderme renferme des formations siliceuses dont une est isolée.

Fig. 9. Concrétions isolées de silice qui montrent combien ces formations peuvent être rongées à leur surface.

Fig. 10 A. Racine de la variété *pusilla* Warmg., avec 5 paires de pousses développées (l'une d'elles, en *ci*, est tombée) et 5 paires de très petites pousses (*gm*) encore enfermées dans le tissu de la racine. Il n'y a pas d'haptères développés. Une racine *r* part du côté ventral de la racine.

Fig. 10 B. Deux pousses de la racine précédente fortement grossies, vues du côté dorsal.

Fig. 11. Représente la ramification et l'aspect du *Mn.* var. *pusilla*. Plusieurs petites racines naissent des pousses ou de la grande racine.

Fig. 12 A. Cas dans lequel une racine s'étale et devient relativement plate. Les pousses descendent un peu sur le côté ventral; leur place est indiquée dans la Fig. 12 B par deux étoiles.

Fig. 13. Racine régénérée, sur le flanc de laquelle apparaissent deux racines (on a indiqué la coiffe) réunies à la base.

Fig. 14 A. Pousse de Mn. var. pusilla, vue de côté, avec les haptères qui partent du côté ventral.

Fig. 14 B. Haptères de 14 A; il y en a deux, qui sont réunis à la base; de la base de l'un d'eux sort une branche, *h'*.

Fig. 15 A. Pousse ramifiée vue du côté ventral; il y a 4 haptères, dont deux sont plus longs et représentés avec un plus fort grossissement dans la Fig. 15 B, tandis que les deux inférieurs sont des organes très courts et lobés.

Fig. 16. Racine en train de se régénérer. La coiffe a des cellules renfermant de la silice (*sil*).

Fig. 17. Pousse vue du côté dorsal; il reste encore les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f*, dont *c*, *d* et *e* sont dithèques; les stipules de *d* et de *e* sont marquées *std* et *ste*. *kd* est la première feuille de la pousse latérale formée à la base de *d*.

Fig. 18. Racine très plate vue du côté ventral, pour montrer comment les pousses s'avancent sur ce côté. A la base des pousses se trouvent des haptères courts et à lobes irréguliers. Les parties centrales plus brunâtres de la racine sont des poils radicaux conglutinés.

Fig. 18 B. Même racine en coupe transversale.

Fig. 19. Pointe de racine, vue de côté.

Fig. 20 A. Racine plusieurs fois régénérée; le sommet de la branche intacte est représenté dans les

Fig. 20 B et C, vu du côté dorsal et du côté ventral.

Fig. 21 et 22. Deux pointes de racines, vues de côté.

Fig. 23. Racine régénérée; la nouvelle racine est double; les deux lignes ponctuées indiquent la marche des faisceaux fibro-vasculaires.

Fig. 24. Pointe de racine, vue du côté dorsal (A) et du côté ventral (B).

Planche VI.

Fig. 1—8. *Mniopsis Weddelliana* Tul.

Fig. 1. Coupe longitudinale d'une racine régénérée. On a trouvé dans le cylindre central des cellules cambiformes, mais il ne renferme pas de trachéides et on n'a pu y découvrir avec certitude des tubes criblés.

Fig. 2. Coupe transversale du cylindre central d'une racine, dans lequel il n'y avait pas de trachéides (cas rare).

Fig. 3. Coupe transversale du cylindre central d'une autre racine. Ce cylindre présente une division peu distincte en deux parties, chacune avec des trachéides (*xyl*) et du liber mou.

Fig. 4. Un poil radical.

Fig. 5. Échantillons de grains d'amidon.

Fig. 6. Parenchyme d'une tige macérée; de même que dans les fibres du liber, les pores sont disposés suivant une hélice sinistrorsum.

Fig. 7. Produits d'une macération: *a* et *b* sont des cellules du parenchyme d'une tige; *c* est un trachéide et *d*, une cellule libérienne d'une feuille.

Fig. 8. Coupe transversale d'une tige. Les 3 faisceaux vasculaires forment un arc qui tourne sa concavité vers le côté dorsal de la tige (la Fig. 3, Pl. IV, est tournée en sens inverse), et se composent en majeure partie de collenchyme sur le côté dorsal. L'un d'eux présente une lacune. Les trachéides regardent le côté ventral.

Fig. 9—15. *Mniopsis Glazioviana* Warmg., nova sp.

Fig. 9. Concrétions siliceuses de la base des feuilles et de la tige.

Fig. 10. Fragment d'une tige, de la base de laquelle part une racine munie d'une coiffe. On a indiqué par une étoile le germe d'une pousse endogène.

Fig. 11. *A* est un fragment d'une pousse vue du côté ventral; de la cicatrice laissée par une feuille arrachée, sort une racine qui s'enroule sur la tige. *B* en montre la pointe, qui est munie d'une grande coiffe.

Fig. 12. Racine rampante horizontale avec un rameau (*r*), trois pousses endogènes et des haptères.

Fig. 13 A. Pousse entière, vue du côté dorsal avec un grossissement de 5 fois, avec sa racine. Elle porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, la dithèque *h* (dont les stipules sont marquées *hst*), *i*, *k*, la dithèque *l*, *m* et *n*, et se termine ensuite par une fleur I; entre celle-ci et les deux feuilles supérieures, on a trouvé deux petites écailles légèrement proéminentes.

La branche embrassée par la stipule externe de *h* porte les feuilles 1, 2, 3, 4 et la dithèque 5, et se termine par la fleur II; la pousse latérale III, à la base de 5, n'a qu'une feuille foliacée.

La pousse latérale II, qui naît à la base de *l*, porte les feuilles α et β.

Fig. 13 B. Montre un fragment de A, vu du côté ventral.

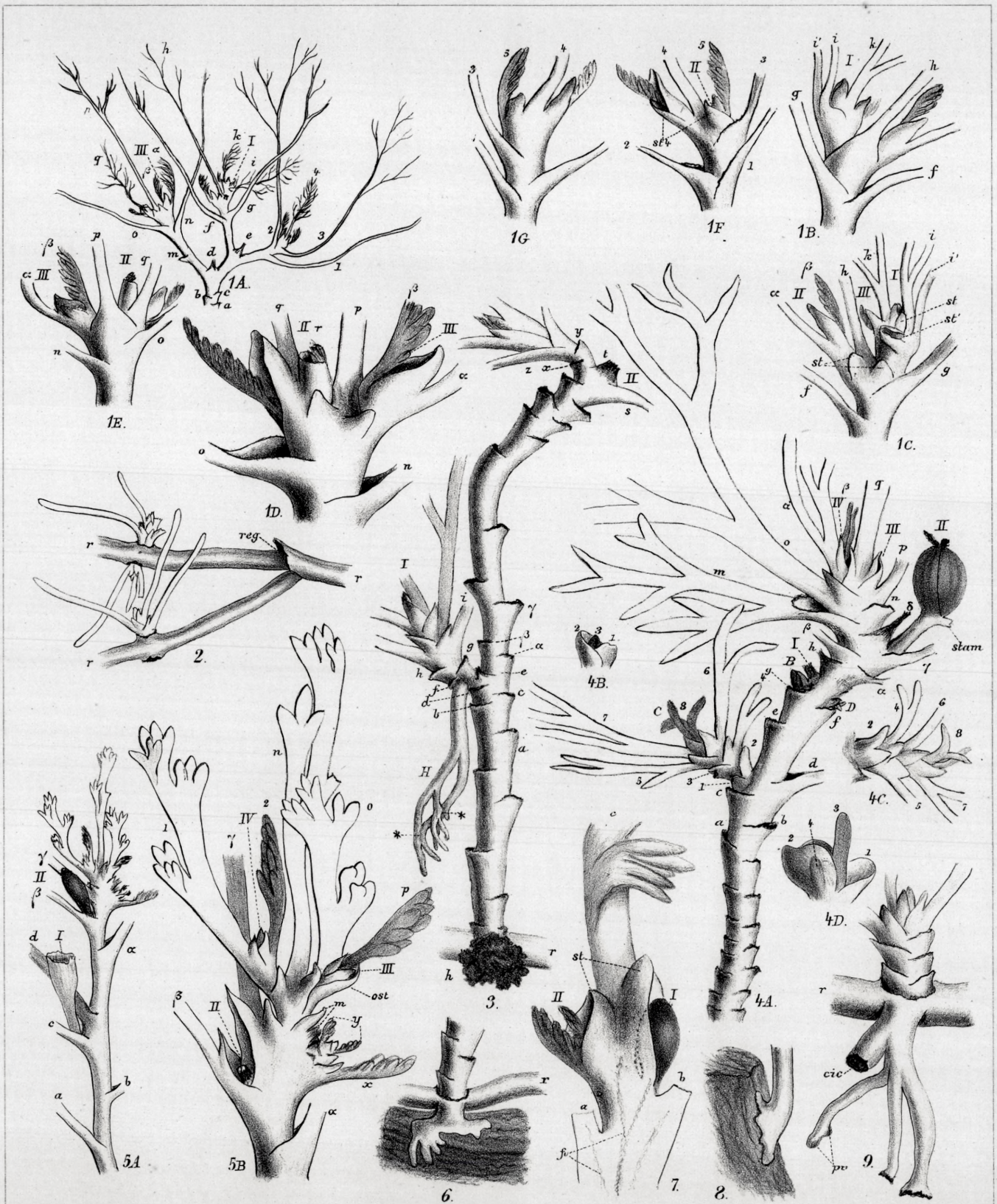
Fig. 14. Racine vue du côté ventral; *h*, haptères également vus du côté ventral, avec de courts poils radicaux; *rh*, poils radicaux serrés et très courts sur le côté ventral de la racine; *r*, racine qui se fait jour. Au-dessus d'un des haptères, on voit la base d'une pousse.

Fig. 15. Extrémités de poils radicaux.

Fig. 16. *Mniopsis scaturiginum* Mart. Zucc.

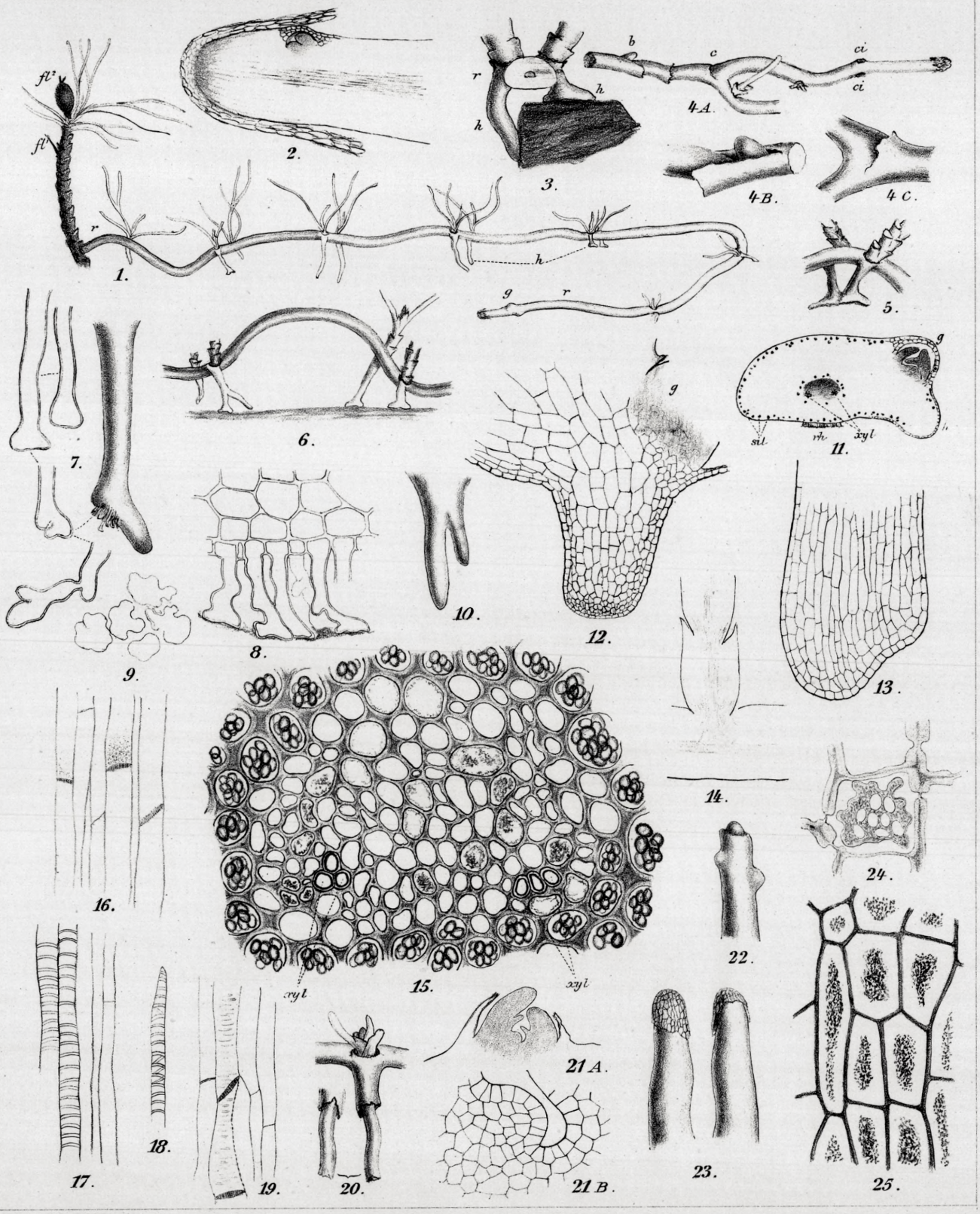
Fragment d'une pousse, vue du côté dorsal. Elle porte les feuilles *a*—*l*; *f* et *g* sont dithèques, mais on n'en voit guère que les stipules; à la base de *f* naît la pousse *K* dont la première feuille est *a*, et à celle de *g*, la pousse *K'*, dont on voit les feuilles 1—5.

Podostemon Ceratophyllum Michx.



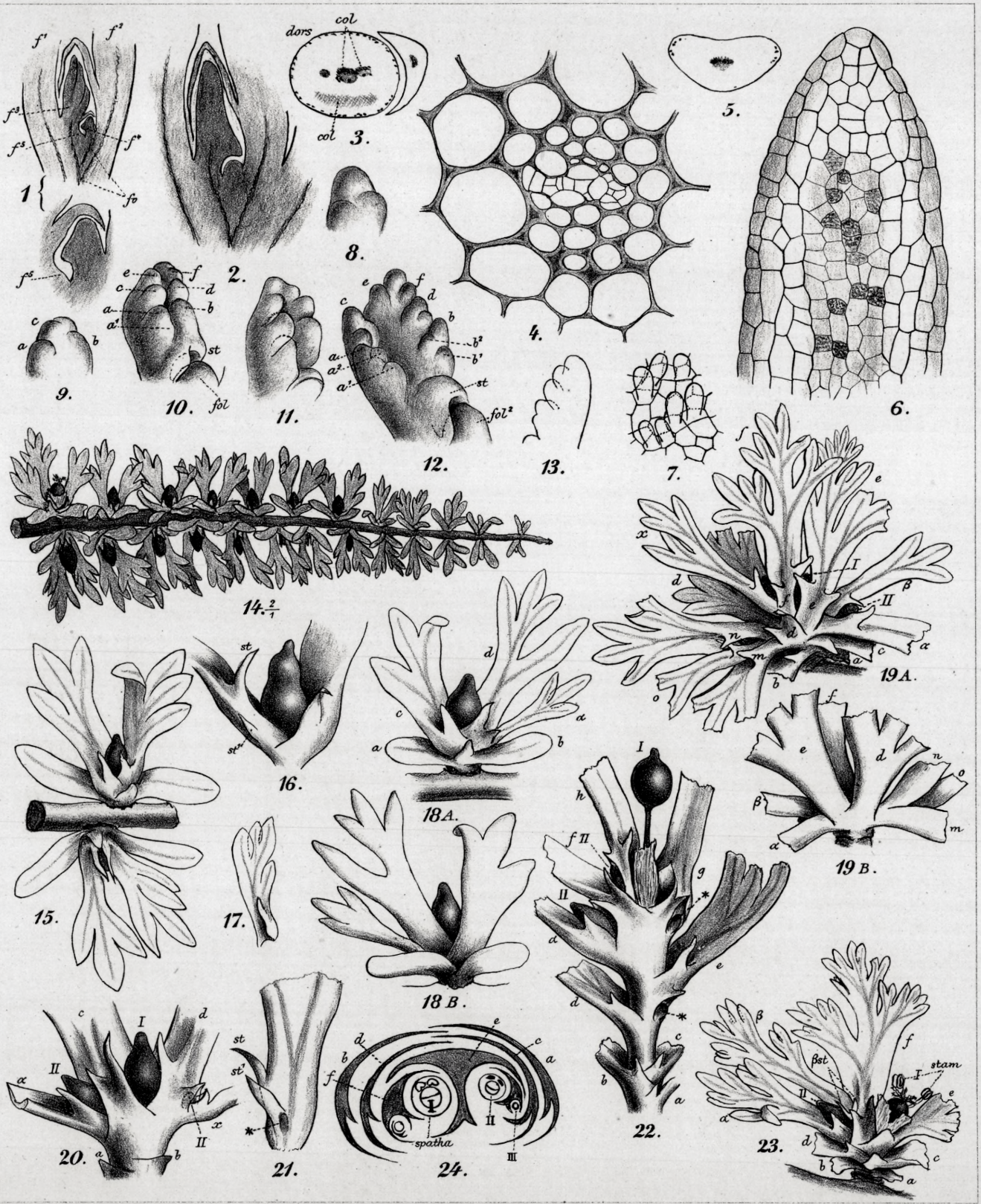
Autor del & lith.

Podostemon Ceratophyllum Michx.



Autor del. & lith.

Podostemon Ceratophyllum Michx.

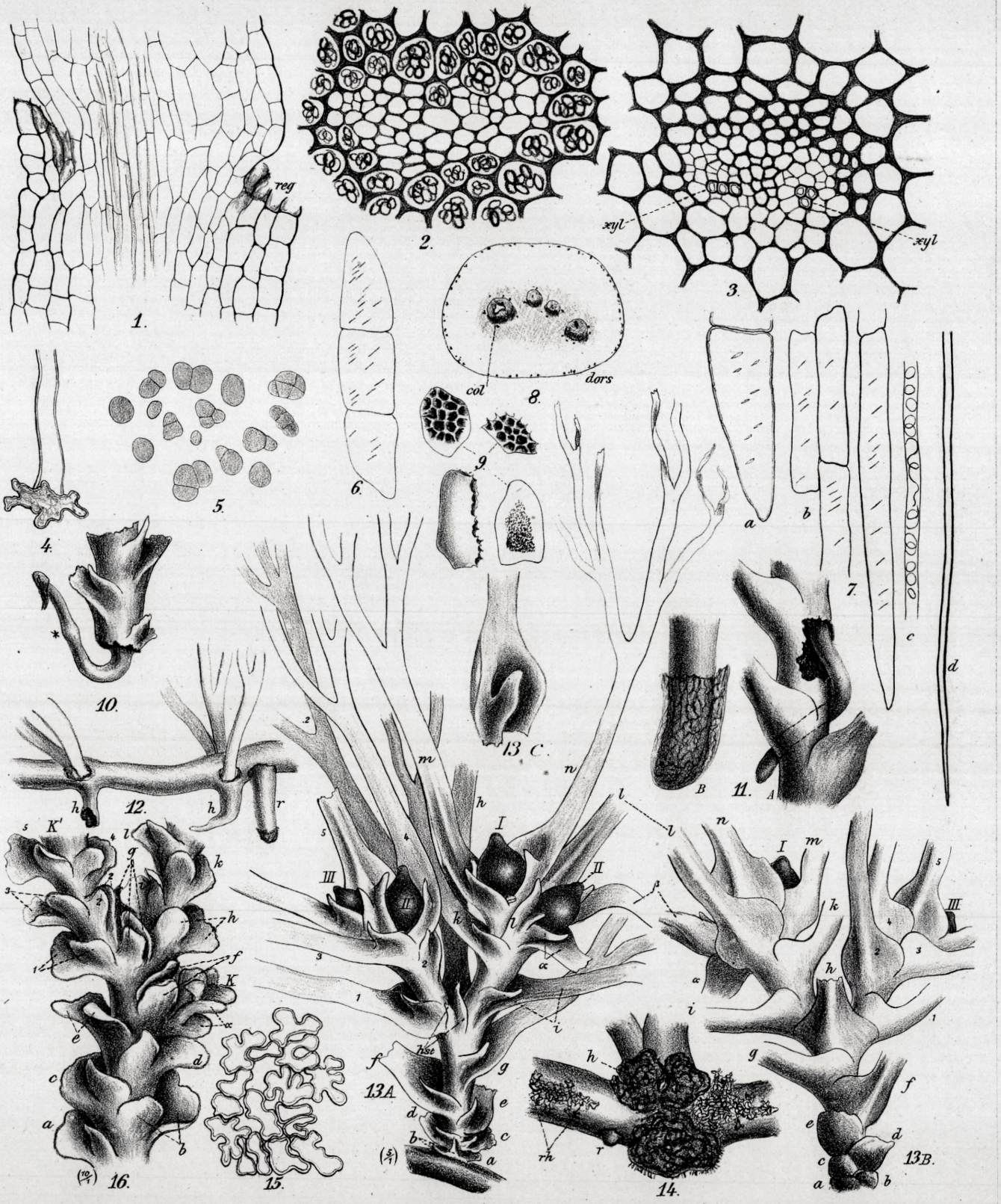


Autor del. & lith.

1-13 Podostemon Ceratophyllum Michx. 14-24 Mniopsis Weddelliana Tul.

Autor del & lith.

Mniopsis Weddelliana Tul.



Autor del & lith.

1-8. Mniopsis Weddelliana Tul. 9-15 Mn. Glazioviana Warmg. 16. Mn. scaturiginum Mart.

Om Metallernes Ledningsevne

for Varme og Elektricitet.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 2.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1881.

De theoretiske Betragtninger, som ligge til Grund for den ene af de to Methoder, hvorved jeg har forsøgt at bestemme forskjellige Metallers Ledningsevne for Varmen, ere følgende:

Man tænke sig en Stang opvarmet i den ene Ende. I en fra et vilkaarligt Punkt i Stangen regnet Afstand x være den variable Temperatur betegnet ved u_x, idet Temperaturskalaens Nulpunkt regnes fra Omgivelsernes Temperatur, som antages konstant. Temperaturen i en Række, i samme Afstand l efter hinanden følgende, Punkter er saaledes $u_0, u_l, \ldots u_{nl}$. Den Del af Stangen, som ligger imellem to til $x = \frac{1}{2}l$ og $x = (n-\frac{1}{2})l$ svarende Snit, modtager i Tidsenheden ved Varmeledningen fra den ene Side Varmemængden $kq\frac{u_0 - u_l}{l}$, naar k er Stangens Varmeledningsevne og q dens Tversnit, medens den til den anden Side afgiver Varmemængden $kq\frac{u_{(n-1)l} - u_{nl}}{l}$. Naar man altsaa sætter:

$$u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta,$$

saa vil $\frac{kq\Delta}{l}$ være den af den betragtede Del af Stangen i hver Tidsenhed modtagne Varmemængde, som nu dels medgaar til at opvarme Metallet, dels gaar bort til Omgivelserne.

Det imellem de to Snit liggende Stykke af Stangen har Længden $(n-1)l$ og kan tænkes delt i $n-1$ lige store Dele. Til at opvarme enhver af disse Dele 1 Grad udkræves $c\delta ql$ Varmeenheder, naar c er Metallets Varmefylde og δ dets Vægtfylde, og da den til Tidsenheden svarende Temperaturforøgelse i enhver af disse Deles Midtpunkter er $\frac{du_l}{dt}, \frac{du_{2l}}{dt}, \ldots \frac{du_{(n-1)l}}{dt}$, saa vil hele den Varmemængde, som Opvarmningen af alle $n-1$ Dele i hver Tidsenhed udkræver, kunne udtrykkes ved $c\delta ql\frac{d\Sigma}{dt}$, naar

$$\Sigma = u_l + u_{2l} + \ldots u_{(n-1)l}.$$

Den anden Del af Varmemængden, som tabes til Omgivelserne, er en Funktion af Temperaturen, og naar vi antage, at Temperaturerne i de forskjellige Stykker ikke ere meget forskjellige, kan denne Varmemængde tilnærmelsesvis betragtes som en Funktion af Middeltemperaturen, altsaa ogsaa som en Funktion f af Σ.

Vi erholde saaledes Ligningen:

$$\frac{kq\Delta}{l} = c\delta ql\frac{d\Sigma}{dt} + f(\Sigma). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Naar altsaa Stangen først opvarmes i den ene Ende, medens Δ og Σ bestemmes umiddelbart (ved thermoelektriske Elementer), og naar man derefter lader Opvarmningen ophøre, hvorved Δ snart gaar over til en anden meget lille Værdi Δ', medens Σ i tilbagegaaende Retning paa ny gjennemløber de samme Værdier som før, saa vil man for den sidste Forsøgsrække erholde den til (1) svarende Ligning:

$$\frac{kq\Delta'}{l} = c\delta ql\frac{d\Sigma'}{dt} + f(\Sigma').$$

Af disse to Ligninger vil man for $\Sigma = \Sigma'$ ved Subtraktion erholde:

$$\frac{kq}{l}(\Delta - \Delta') = c\delta ql\left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}\right),$$

hvor $\frac{d\Sigma}{dt}$ er positiv, $\frac{d\Sigma'}{dt}$ negativ. Man vil saaledes af en enkelt Forsøgsrække erholde en Række Bestemmelser af Forholdet $\frac{c\delta}{k}l^2$.

Ved en lille Forandring kan denne Methode gjøres endnu lidt nøjagtigere. For at se dette og for tillige at erholde et Skjøn over Størrelsen af de Fejl, som hidrøre fra de kun tilnærmelsesvis rigtige Forudsætninger for Beregningen, vil det imidlertid være nødvendigt at gaa tilbage til Differentialligningen for Varmens Bevægelse i en Stang:

$$\frac{d}{dx}kq\frac{du}{dx} = c\delta p\frac{du}{dt} + phu. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Som Koefficienter indgaa heri, foruden de tidligere benyttede Størrelser, p, Stangens Perimeter, og h, Koefficienten for den ydre Varmeledning. Alle disse Koefficienter ere imidlertid selv Funktioner af u, men naar u antages lille og ikke er store Forandringer underkastet, ville de dog med tilstrækkelig Tilnærmelse kunne udtrykkes ved:

$$\frac{c\delta}{k} = a_0(1+\alpha u), \quad \frac{ph}{kq} = b_0(1+\beta u), \quad kq = k_0q_0e^{\gamma u},$$

idet disse nye Koefficienter betragtes som konstante. Herved forandres Differentialligningen til

$$\frac{d^2u}{dx^2} = a_0(1+\alpha u)\frac{du}{dt} + b_0(1+\beta u)u - \gamma\left(\frac{du}{dx}\right)^2. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Det vil let ses, at man har:

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\,\frac{d^2u}{dx^2} = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta.$$

Endvidere vil man for en vilkaarlig Funktion $f(x)$ have:

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\,f(x) = l^2(f(l) + f(2l) + \ldots f((n-1)l)) = \frac{l^2}{12}(f(nl) - f(n-1)l) - f(l) + f(0)) + \ldots$$

hvilket Udtryk ogsaa, da man tilnærmelsesvis har:

$$f((n-1)l) + \tfrac{1}{12}(f(nl) - f((n-1)l)) = f\left(\left(n - \tfrac{11}{12}\right)l\right),$$
$$f(l) - \tfrac{1}{12}(f(l) - f(0)) = f\left(\tfrac{11}{12}l\right),$$

kan omdannes til

$$l^2\left(f\left(\tfrac{11}{12}l\right) + f(2l) + \ldots + f((n-2)l) + f\left(\left(n - \tfrac{11}{12}\right)l\right)\right) + \ldots$$

Med en lille Forandring af den tidligere Betydning af Σ, nemlig til

$$\Sigma = u_{\frac{11}{12}l} + u_{2l} + \ldots + u_{(n-2)l} + u_{(n-\frac{11}{12})l}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ville vi saaledes af (3) ved den angivne dobbelte Integration erholde tilnærmelsesvis:

$$\Delta = a_0 l^2 \frac{d\Sigma}{dt} + b_0 l^2 \Sigma + \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(a_0 \alpha u \frac{du}{dt} + b_0 \beta u^2 - \gamma \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right). \quad \ldots \quad (5)$$

Det sidste Integral vil altid kunne betragtes som en lille Størrelse i Sammenligning med de andre i Udtrykket indgaaende Led, naar kun Forsøgene udføres ved tilstrækkelig smaa Temperaturforøgelser. Vi kunne derfor ogsaa tilnærmelsesvis bestemme dette Integral, idet vi, for saa vidt Beregningen af dette angaaer, gaa ud fra den mere simple Differentialligning:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = a_0 \frac{du}{dt} + b_0 u,$$

og integrere denne med fornødent Hensyn til de Betingelser, under hvilke Forsøgene ere udførte. Det maa da bemærkes, at Opvarmningen af Stangen ledes saaledes, at Δ holder sig meget nær konstant, saalænge Maalingerne udføres. Denne Betingelse vil være tilfredsstillet ved et Integral af Formen:

$$u = A e^{x\sqrt{b_0}} + B e^{-x\sqrt{b_0}} + C e^{-\frac{b_0}{a_0}t},$$

og skjøndt ogsaa Integraler af andre Former her ere mulige, tør det dog antages, at ovenstaaende Udtryk i det væsentlige vil kunne gjengive Temperaturtilstanden i Stangen saaledes, som den har været, medens Maalingerne bleve udførte.

Stangens ene Ende er endvidere i Afstanden $\frac{1}{2}l$ fra det første Punkt, hvor Temperaturen u_0 maales. Da Varmetabet i Stangens Ende kun er lille, vil man derfor her tilstrækkelig nøjagtigt kunne sætte $\frac{du}{dx} = 0$ for $x = -\frac{1}{2}l$.

Man vil nu være i Stand til at eliminere Konstanterne A, B, C, og man vil derefter erholde:

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx\, u^2 = l^2 \frac{\Sigma^2}{n-1} + l^2 \Delta^2 f,$$

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \Delta^2 g,$$

hvor f og g ere visse, alene af $l^2 b_0$ afhængige Tal. Ved Indsættelsen af følgende Værdier for $l^2 b_0$, som omfatte de forskjellige Værdier, denne Størrelse antager i mine Forsøg,

$$l^2 b_0 = 0{,}01,\ 0{,}0225,\ 0{,}04,\ 0{,}09,\ 0{,}16,$$

har jeg fundet følgende tilsvarende Værdier for f og g:

$$f = 11{,}08,\ 9{,}34,\ 7{,}66,\ 4{,}86,\ 3{,}05,$$
$$g = 3{,}13,\ 2{,}78,\ 2{,}40,\ 1{,}76,\ 1{,}33,$$

hvilke Tal meget nær kunne gjengives ved de empiriske Formler:

$$f = \frac{68}{5 + 100 l^2 b_0}, \quad g = \frac{34}{10 + 100 l^2 b_0}.$$

Sættes endvidere

$$f b_0 l^2 \beta - g\gamma = \eta, \quad a_0\left(1 + \frac{\Sigma}{n-1}\alpha\right) = a, \quad b_0\left(1 + \frac{\Sigma}{n-1}\beta\right) = b,$$

idet altsaa a og b ere de til Middeltemperaturen $\frac{\Sigma}{n-1}$ svarende Værdier af $\frac{c\delta}{k}$ og $\frac{ph}{kq}$, saa reduceres Ligning (5) til

$$\Delta(1 - \eta\Delta) = a l^2 \frac{d\Sigma}{dt} + b l^2 \Sigma. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Da alle de i η indgaaende Størrelser kunne udledes af selve Forsøgene, har jeg kunnet beregne den i Leddet $\eta\Delta$ indeholdte Korrektion for alle mine Forsøg, og det har da vist sig, at denne Korrektion er aldeles uden Betydning for alle de bedre ledende Metaller. Ligeledes er den endnu for Nysølv, som hører til de slettere ledende Metaller, uden Betydning paa Grund af, at her γ undtagelsesvis er positiv, derimod beløber for Antimon Korrektionen i mine Forsøg sig til henved 5 Procent og for Vismuth endog til 10 Procent, med hvilken Brøkdel den fundne Værdi af a bør formindskes.

Idet nu Forsøgene anstilles som ovenfor er angivet, vil man, naar $\eta\Delta$ sættes lig 0, til Beregningen af a have Ligningen:

$$a l^2 = \frac{\Delta - \Delta'}{\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Endnu maa bemærkes, at Iagttagelserne ikke umiddelbart give Værdierne af $\frac{d\Sigma}{dt}$. Forsøgene ere anstillede saaledes, at de til givne Værdier af Σ, som $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ svarende Tidsmomenter $t_0, t_1, t_2, \ldots$ bestemmes, idet Σ voxer eller aftager med konstante Differenser. Er t det til $\Sigma = \frac{\Sigma_{m-1} + \Sigma_m}{2}$ svarende Tidsmoment, saa er

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{t_m - t_{m-1}}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}(t_m - t_{m-1})^2 + \ldots\right), \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

hvor allerede det anførte andet Led i Rækkeudviklingen kun opnaar en meget lille Værdi i mine Forsøg. Det vil imidlertid dog bestandig blive medtaget i Regningen.

De Metaller, som have været Gjenstand for mine Undersøgelser, ere Kobber, Magnium, Aluminium, Kadmium, Jern, Tin, Bly, Antimon og Vismuth, samt af Legeringer rødt og gult Messing og Nysølv. Af disse 12 Metaller lod jeg forfærdige cylindriske Stænger af 30 Centimeters Længde og 1,5 Centimeters Tykkelse. Disse Stænger bleve gjennemborede med en Række meget fine Huller, kun $0{,}4^{mm}$ i Gjennemsnit, af hvilke Huller et enkelt befandt sig 1^{cm} fra Stangens ene Ende, navnlig bestemt til Brug for de elektriske Modstandsbestemmelser, medens der i samme Afstand fra Stangens anden Ende begyndte en Række af 9, 2^{cm} fra hinanden fjernede, lignende Huller, som jeg vil betegne med 0, 1, 2, ... 8. Disse gik med hinanden parallele midt igjennem Stangen. Desuden var der endnu imellem 0 og 1 og imellem 7 og 8 anbragt to Huller i en Afstand af $\frac{1}{6}^{cm}$ henholdsvis fra 1 og 7. Disse sidste Huller vare borede vinkelret paa de andre og lidt excentrisk. Jeg vil betegne disse ved 1′ og 7′.

I disse Huller bleve Thermoelementerne anbragte. De bestode i Reglen af en $0{,}1^{mm}$ tyk Kobbertraad og en $0{,}3^{mm}$ tyk Nysølvtraad. Loddestedet var omviklet med Silke, som iforvejen var afviklet fra Kobbertraadens Overspinding, Kobbertraaden blev trukket helt igjennem Hullet, indtil Loddestedet befandt sig midt i dette, medens Nysølvtraadens Overspinding dannede et Bryst udenfor Hullet. Elementet var fuldstændig isoleret fra Stangen, hvad hver Gang særlig blev undersøgt.

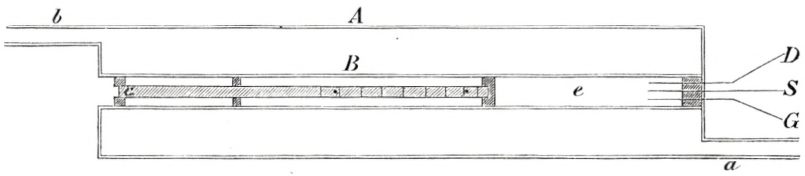
Til de to Huller 0 og 1 samt til 7 og 8 benyttedes Dobbeltelementer, idet to Kobbertraade med deres ene Ende vare loddede til Enderne af en enkelt, kun nogle Centimeter lang Nysølvtraad. Disse Dobbeltelementer angave alene Temperaturforskjellen for de to Huller 0 og 1 samt for 7 og 8. Desuden bleve de fra 0 og 7 kommende Kobbertraade forenede ved Lodning, saaledes at den thermoelektriske Differens i de fra 1 og 8 kommende Kobbertraade komme til at svare til den ovenfor ved Δ betegnede Temperaturdifferens.

Endvidere bleve 7 Thermoelementer anbragte i de 7 Huller 1′, 2, 3, ... 6, 7′ og forbundne til en sammensat Kjæde, saaledes at alle de Loddesteder, som befandt sig udenfor Stangen, under Forsøgene vare førte hen til et særskilt Rum, hvor de erholdt Omgivelsernes Temperatur. Den elektriske Differens i denne Kjædes Endepunkter svarede altsaa til den ved Σ (Ligning (4)) betegnede Temperatursum.

De to fra 8 og 1′ kommende Kobbertraade vare begge ved en Lodning forbundne med en 1^{mm} tyk Kobbertraad (G i omstaaende Figur), medens to andre 1^{mm} tykke Kobbertraade (D og S) vare forbundne, den første med den fra 1 kommende Kobbertraad, den anden med den fra 7′ kommende Nysølvtraad. De elektriske Differenser imellem G og D og imellem G og S svare altsaa henholdsvis til de Temperaturstørrelser Δ og Σ, som ved Forsøgene skulle bestemmes.

Efter at alt dette var ordnet, blev Stangen anbragt i det i Figuren fremstillede

Varmeapparat. Dette bestod af en lukket Cylinder A (47^{cm} lang, 10,5^{cm} i Diameter), hvorigjennem der gik et 4,3^{cm} vidt, aabent Rør B, alt af Messing og med tykke Vægge. Dette Apparat blev ved en gjennem Røret a ledet Vandstrøm holdt paa Vandledningens Temperatur eller ogsaa opvarmet til 100° ved en Strøm af Vanddampe, som traadte ind ved b og ud gjennem Røret a. Stangen blev ved Hjælp af to Korkproppe anbragt i det indre Rør B. En tredie, ikke tæt sluttende Korkprop, som var anbragt i nogen Afstand fra Stangens



forreste Ende c, tjente kun som Skjærm og tvang den fra den stærkest opvarmede Del af Stangen kommende Luft til at passere tæt forbi Rørets Vægge. Thermoelementerne vare trukne igjennem smaa Huller i den ved Stangens anden Ende anbragte Korkprop, saaledes at alle de Loddesteder, som skulde holdes paa Varmeapparatets Temperatur, befandt sig i Rummet e, hvor de vare omgivne af løst Bomuld. De tre ovenfor omtalte Kobbertraade D, G og S vare anbragte i en tætsluttende Korkprop.

Thermoelementernes elektromotoriske Kræfter bleve maalte paa følgende Maade. Paa et Bord var en 5 Meter lang, 1^{mm} tyk Kobbertraad anbragt saaledes, at den første halve Meter af Traaden var udspændt over en i Millimeter inddelt Maalestok, medens den øvrige Del af Traaden for hver halve Meter, regnet fra Maalestokkens Nulpunkt, var befæstet til Bordet og her dannede en lille Bøjle. Med denne Traad var forbunden en Siemens Rheostat, en Sinusbussole og et Daniells Element.

Fra den fra Varmeapparatet kommende Traadende G førte en Ledning til et Wiedemanns Spejlgalvanometer, hvis Spejl ved Hjælp af en stærk Magnet var holdt tilbørlig astatisk, og herfra til den ovenfor beskrevne Maaletraads Nulpunkt. Fra de to andre Traade D og S førte to Ledninger til den ved Maalebordet siddende Iagttager. Naar en af disse to Ledninger bringes i Berøring med Maaletraaden, saa gaar den fra Maaletraaden afledede saavelsom den fra Thermoelementerne kommende elektriske Strøm gjennem Galvanometret. Naar begge disse i Strømkredsen opstaaede elektromotoriske Kræfter ere lige store og modsatte, saa vil der intet Udslag af Galvanometret fremkomme. Paa denne Maade vare alle Galvanometeriagttagelserne kun Nulpunktsiagttagelser, og Maaletraaden giver da i Millimeter et Maal for de elektromotoriske Kræfter Δ og Σ, som Forsøgene gaa ud paa at bestemme, idet Δ bestemmes ved den fra D kommende Ledning og maales paa den udspændte Del af Maaletraaden, medens Σ bestemmes ved Ledningen fra S og maales kun for hver halve Meter paa den øvrige Del af Maaletraaden.

Alle Traadledningerne, heri indbefattet Maaletraaden og Galvanometrets Traad, bestode af den samme, 1^{mm} tykke Kobbertraad, og overalt, hvor to Traadender vare forenede ved Klemskruer, vare Traadene selv i umiddelbar Berøring med hinanden. Den ene Traadende, som blev ført hen til et Punkt af Maaletraaden, blev ikke berørt umiddelbart med Haanden, men var befæstet til et Træhaandtag. Maalingerne udførtes ved Lampelys, imod hvilket Galvanometret var beskyttet ved en Skjærm, navnlig var alt direkte Sollys altid holdt borte fra Iagttagelseslokalet. Daniells Element blev altid en Time før Maalingerne forbundet med Ledningen, hvorved opnaaedes en meget konstant Strøm under alle Maalingerne. Endelig vare ogsaa de elektriske Modstande i de forskjellige Dele af Maaletraaden nøjagtigt sammenlignede.

Ved de ovennævnte Forsigtighedsregler var der opnaaet, at naar Stangen i Varmeapparatet havde opnaaet Vandledningens konstante Temperatur, saa fandtes næsten altid Δ og Σ lig 0. Var derimod Apparatet opvarmet ved Vanddamp, saa var dette ikke længere Tilfældet, og Δ og Σ maatte da regnes fra de Punkter paa Maalestokken, som Maalingerne udviste, naar Stangen havde naaet den stationære Temperaturtilstand. Disse konstante thermoelektriske Kræfter fremkom for en Del i de tre til Varmeapparatet førende tykkere Kobbertraade, idet disse havde meget forskjellige Temperaturer i deres Endepunkter, imellem hvilke der paa Grund af den ene Traadendes foregaaende Opvarmning under Lodningen var opstaaet ikke ringe thermoelektriske Forskjelligheder.

Ved et Forsøgs Begyndelse er Røret i Varmeapparatet lukket ved c med en Korkprop, og Tiden afventes, indtil Stangen i Varmeapparatet har naaet dettes konstante Temperatur. Derefter bliver Proppen taget bort, og en iforvejen opvarmet Stang, i Reglen Kobberstangen, føres hen til c, medens Opvarmningen af den ydre Stang fortsættes ved en meget svag Lampe. Denne Opvarmning maa ledes saaledes, at den thermoelektriske Differens Δ for den i Apparatet anbragte Stang stiger raskt og derefter holder sig i nogen Tid nogenlunde konstant. For med Sikkerhed at kunne lede Opvarmningen, maa man sørge for en fuldstændig metallisk Berøring imellem de to Stænger, hvorfor den ydre Stangs Endeflade altid var frisk amalgameret. Iøvrigt kan jeg ikke give nogen almindelig Regel for Opvarmningen, den udkræver kun nogen Øvelse for at lykkes, og mere rationelle Opvarmningsmethoder maatte jeg forkaste. De slettere ledende Metalstænger, Antimon og Vismuth, maatte jeg, for at erholde den rette Opvarmning, gjøre noget kortere.

Saasnart Maalingerne vise, at Δ nærmer sig til at blive konstant, søger man at bestemme Σ, idet man bringer Spidsen af den fra S kommende Traad i kortvarig Berøring med en af de paa Maaletraaden anbragte smaa Bøjler, som angive 500, 1000, . . . indtil 5000 Millimeter af Maaletraaden fra dennes Nulpunkt, og man iagttager da ved et Penduluhr det Øjeblik, da Berøringen med et af disse Punkter ingen Strøm frembringer. Derefter bestemmes Δ nøjagtigt, og paany iagttages Tidsøjeblikket, naar Σ passerer den næste,

500^{mm} højere Inddeling paa Maaletraaden, og saaledes videre, indtil enten Δ ikke længere holder sig konstant, eller indtil det højeste Punkt, 5000^{mm}, paa Maaletraaden er naaet. Derefter afbrydes Opvarmningen, Apparatet lukkes atter med Korkproppen, og Δ aftager nu raskt og nærmer sig Nulpunktet. Iagttagelserne fortsættes da ved aftagende Σ ligesom før, indtil man er kommet tilbage til den først noterede lavere Grænse for Σ. Beregningen af en saadan Forsøgsrække udføres da ved Hjælp af Ligningerne (7) og (8).

For nærmere at undersøge de forskjellige mulige Fejlkilder ved disse Forsøg og fuldstændig være sikker paa Rigtigheden af de opnaaede Resultater, har jeg, forinden jeg begyndte de endelige Maalinger, udført en stor Mængde, paa forskjellige Maader varierede Forsøg med flere af Stængerne (ialt over 100 Forsøgsrækker). Saaledes bleve Forsøg udførte dels med det beskrevne Varmeapparat, som blev anvendt ved alle de endelige Maalinger, dels med et andet, dels ogsaa i fri Luft. I nogle Forsøg var Stangen omgiven med Bomuld eller Edderdun. Forskjellige Grader af Opvarmning bleve prøvede, idet den i Maaletraadens Strømkreds indskudte Modstand varierede fra 300 til 50 Siemens Enheder. Foruden de sædvanlig benyttede Thermoelementer af Kobber- og Nysølvtraad prøvedes ogsaa Elementer af Kobber- og Jerntraad. Da de første Elementers elektromotoriske Kraft voxer ved højere Temperaturer, de sidstes derimod aftager, saaledes at disse Elementers Temperaturangivelser altsaa afvige til modsatte Sider fra den sædvanlige Temperaturskala, ere disse Forsøg ikke uden Interesse, og jeg skal derfor i det følgende anføre en med Kobber-Jerntraad udført Forsøgsrække. Endelig har jeg ogsaa ved Jern-, Nysølv- og Vismuthstængerne anvendt Kobbertraade alene, der indsattes i Hullerne i ledende Forbindelse med Stangen, som Thermoelementer. Jeg skal med Hensyn til alle disse Forundersøgelser indskrænke mig til at bemærke, at jeg ikke fandt nogen væsentlig Uoverensstemmelse i de erholdte Resultater.

Efter Tilendebringelsen af disse meget tidsspildende Forundersøgelser kunde de endelige Maalinger, hvis Enkeltheder jeg i det Følgende skal meddele, bringes temmelig hurtig til Ende, da Forsøgene i og for sig efter nogen Øvelse ikke frembyde særlige Vanskeligheder.

Den elektriske Ledningsevne har jeg bestemt for alle Stængerne umiddelbart i absolut Maal ved 0° og ved 100° efter den samme Methode, som jeg tidligere har benyttet til Bestemmelsen af Kviksølvets elektriske Ledningsmodstand (Oversigt over Vidensk. Selsk. Forh. 1873, S. 67), ved hvilken Methode Maalinger af smaa Modstande lade sig udføre baade med Lethed og med Nøjagtighed. Til nærværende Maalinger har jeg i Stedet for en astatisk Dobbeltnaal benyttet Spejlgalvanometret, som er følsommere, medens rigtignok paa den anden Side Dobbeltnaalen mindre er udsat for forstyrrende Indvirkninger fra Strømmen i Maaleapparatets store Traadrulle. Da imidlertid denne sidste altid kan anbringes i saa stor en Afstand fra Galvanometret og drejes om til en saadan Stilling, at disse Indvirkninger

blive umærkelige, og da der desuden i Forsøgene selv er den fornødne Kontrol for de mulige Fejl af denne Art, har jeg her foretrukket Spejlgalvanometret.

Stængerne bleve holdte paa 0° ved at omgives med Is, og paa 100° ved at anbringes i kogende Vand eller i Varmeapparatet (Magnium og Aluminium), ogsaa bleve nogle Forsøg anstillede med Stængerne anbragte i fri Luft ved Stuens Temperatur. Resultaterne vare ved en given Temperatur de samme, hvad enten Stængerne vare omgivne af Luft eller Vand.

Jeg havde til disse Forsøg alene benyttet mit Apparats ydre Traadrulle, med hvilken jeg tillige udførte nogle Bestemmelser af Kviksølvets Ledningsevne. Resultaterne heraf vare de samme som de tidligere fundne, i hvilke jeg for Kviksølvets Modstand havde fundet en 2 Procent mindre Værdi end British Association's Comité. Senere er Hr. Rowland (Silliman's Journal, Vol. XV (1878), p. 281) kommet til et midt imellem disse liggende Resultat, men hertil maa endnu bemærkes, at disse og andre Iagttagere hidtil ikke have bestemt selve Kviksølvets Ledningsmodstand i absolut Maal, men alene Modstanden af de Siemen'ske Kopier, som ere bestemte ved Sammenligning med forholdsvis tynde Kviksølvsøjler.

I min ovenfor citerede Afhandling om Kviksølvets elektriske Ledningsmodstand havde jeg (S. 78) omtalt, at en Slutning eller Afbrydelse af Hovedstrømmen under Maalingerne havde en kjendelig Virkning paa Galvanometret. Dette Fænomen, som dengang var mig uforklarligt, har jeg nu fundet, hidrører fra Traadrullens inducerende Virkning paa Ledningen til Galvanometret. Naar man kun lader denne Ledning gaa til Traadrullen vinkelret paa dennes Vindinger, bortfalde disse Induktionsfænomener ganske.

Bestemmelsen af Metallernes Vægtfylde bleve udførte ved sædvanlig Temperatur, hvoraf Vægtfylden ved 0° og 100° blev beregnet, idet jeg gik ud fra de bekjendte Udvidelseskoefficienter. Disse og de følgende Forsøg bleve udførte med Stykker paa 6^{cm} Længde, der vare afskaarne af Stængerne.

Endelig har jeg ogsaa bestemt Varmefylden for alle Metallerne ved tre forskjellige Temperaturer. Det til disse Forsøg indrettede Varmeapparat bestod af en Kobbercylinder (156^{mm} høj, 55^{mm} i Gjennemsnit), som omgav et i Laaget anbragt (128^{mm} langt, 27^{mm} bredt), for neden lukket Rør. Cylindren indeholdt Æthylalkohol eller Amylalkohol, som holdtes vedvarende i Kog, idet Dampene fortættedes i et spiralformet Glasrør, hvorfra de som Vædske løb tilbage igjen til Cylinderen. Den lille Stang, hvis Varmefylde skulde bestemmes, var anbragt i Røret og blev her opvarmet til de to Vædskers Kogepunkter (78° og 131°). Endelig blev ogsaa det samme Apparat tilligemed Stangen sat ned i en Kuldeblanding af Is og Kogsalt.

Naar Stangen paa en af disse Maader havde opnaaet en konstant Temperatur, blev Opvarmningsapparatet ved et Haandtag ført hen til Kalorimetret, hvori Stangen hurtig blev styrtet. Forøvrigt udførtes Maalingerne paa sædvanlig Maade. Da Værelsets Temperatur ved disse Forsøg omtrent var 20°, saa var de til de fundne Varmefylder svarende Middel-

temperaturer meget nær 0°, 50°, 75°. Ved enhver af disse Temperaturer blev der udført mindst to Maalinger. De fundne Middelværdier ville blive anførte i det følgende.

Af disse Iagttagelser har jeg beregnet de til 0° og 100° svarende Varmefylder ved Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c + 0{,}45\,\varepsilon - 0{,}30\,\varepsilon', \\ c_{100} &= c + 0{,}20\,\varepsilon + 1{,}20\,\varepsilon', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

idet c, $c+\varepsilon$ og $c+\varepsilon'$ ere de af Iagttagelserne fremgaaede Værdier af Varmefylderne ved 0°, 50° og 75°. Disse Formler ere beregnede ved de mindste Kvadraters Methode, idet Vægtene af de fundne Værdier for c, $c+\varepsilon$ og $c+\varepsilon'$ ere anslaaede til henholdsvis 1, 2 og 3,4.

I de følgende Tabeller har jeg samlet Resultaterne af alle de saaledes udførte Maalinger i den Orden, hvori Forsøgene over Varmeledningen bleve udførte. ϑ er Varmeapparatets Temperatur, de i første Linie angivne Værdier af Δ og Σ ere de paa Maaletraaden i Millimeter maalte konstante Temperaturer ved Forsøgets Begyndelse, W er Modstanden i Maaletraadens Strømkreds. I Reglen har den benyttede Modstand været 102 Siemens Enheder, ved hvilken Modstand 1° C. svarer til 48^{mm} af Maaletraaden ved 0° og $58{,}5^{mm}$ ved 100°. Den første vertikale Række i Tabellerne indeholder Middeltallene $\left(\frac{\Sigma_m + \Sigma_{m-1}}{2}\right)$ af de to paa hinanden følgende, iagttagne Værdier af Σ, den anden Række det imellem disse to Iagttagelser forløbne Antal Sekunder (t), hvoraf i tredie Række $\frac{d\Sigma}{dt}$ er beregnet ved Hjælp af Ligning (8), som paa en lille Korrektion nær giver $\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{500}{t}$. Den fjerde Række indeholder de iagttagne Værdier af Δ. De tre følgende Rækker give de tilsvarende, ved den paafølgende Afkøling fundne Størrelser, idet nu Σ gjennemløber de samme Værdier i tilbagegaaende Retning. Endelig indeholder den ottende Række de ved Lign. (7) beregnede Værdier af al^2, hvor $l = 2$, medens den sidste Række indeholder de ved Hjælp af Ligningen:

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{d\Sigma'}{dt}}{\Sigma} + \frac{\Delta'}{4a\Sigma}$$

beregnede Værdier af $\frac{b}{a} \cdot 10^5$. Det maa bemærkes, at Δ og Σ maa regnes fra de ved Forsøgets Begyndelse bestemte faste Punkter ved Beregningen af $\frac{b}{a}$, hvorimod disse ere uden Betydning for Beregningen af a. Som absolute Enheder er her overalt antaget for Massen Grammet, for Længden Centimeteren, for Tiden Sekundet.

Tin.

1. $\vartheta = 6{,}0°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

Σ'	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	153	3,27	45	513	0,99	0	10,56	79
1750	187	2,67	44	376	1,34	1	10,72	82
2250	245	2,05	43	308	1,64	5	10,30	94

2. $\vartheta = 6{,}4°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

3250	109	4,59	82	178	2,82	5	10,39	102
3750	116	4,31	85	155	3,23	5	10,61	99
4250	114	4,40	90	141	3,55	9	10,19	105

3. $\vartheta = 8{,}2°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -30$, $W = 102$ S. E.

2250	98	5,10	73	265	1,90	−2	10,71	76
2750	105	4,76	72	213	2,36	−3	10,53	76
3250	114	4,39	70	183	2,74	−3	10,24	75
3750	130	3,85	71	153	3,27	−3	10,39	79
4250	130	3,85	74	147	3,41	0	10,19	80

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = 22$, $\Sigma = 700$, $W = 102$ S. E.

2250	120	4,17	88	320	1,57	22	11,54	101
2750	135	3,71	90	258	1,95	23	11,84	100
3250	160	3,13	90	214	2,34	25	11,88	102
3750	216	2,32	87	198	2,53	30	11,75	106

5. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -27$, $\Sigma = 1500$, $W = 102$ S. E.

3750	61	8,20	93	218	2,31	−27	11,42	103
4250	68	7,35	97	170	2,95	−27	12,04	108
4750	70	7,14	96	170	2,95	−22	11,70	104

De tre Forsøgsrækker 1, 2 og 4 ere udførte med thermoelektriske Elementer af Kobber- og Jerntraad, de andre og alle de følgende derimod med Elementer af Kobber- og Nysølvtraad.

Af Forsøgsrækkerne 1, 2 og 3 erholdes som Middel:

$$4a = 10{,}44 \text{ ved } 16° \text{ C.}$$

Af 4 og 5: $4a = 11{,}74$ ved 106° C.

Beregnes heraf de til 0° og 100° svarende Værdier, erholdes:

$$4a_0 = 10{,}21, \quad 4a_{100} = 11{,}64.$$

De iagttagne Varmefylder ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,05368,	0,05534,	0,05643,

hvoraf ved Formlerne (9) beregnes:

$$c_0 = 0{,}05360\,, \quad c_{100} = 0{,}05731.$$

De til 0° og 100° svarende Vægtfylder ere:

$$\delta_0 = 7{,}276\,, \qquad \delta_{100} = 7{,}226\,,$$

hvoraf

$$c_0\,\delta_0 = 0{,}3900\,, \quad c_{100}\,\delta_{100} = 0{,}4141.$$

Varmeledningsevnerne ved 0° og 100°, k_0 og k_{100}, ere altsaa

$$k_0 = \frac{c_0\,\delta_0}{a_0} = 0{,}1528\,, \quad k_{100} = \frac{c_{100}\,\delta_{100}}{a_{100}} = 0{,}1423\,, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}074.$$

De fundne elektriske Ledningsevner ved 0° og 100° ere

$$\varkappa_0 = 9{,}346\,.\,10^{-5}\,, \quad \varkappa_{100} = 6{,}524\,.\,10^{-5}\,, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}433\,,$$

hvoraf:

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1635\,, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2181\,, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}334.$$

Jern.

1. $\vartheta = 9{,}8°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 114$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a}\cdot 10^5$
2250	86	5,81	141	553	0,91	2	20,62	40
2750	84	5,95	144	440	1,14	2	20,03	41
3250	90	5,56	144	366	1,37	2	20,50	42
3750	90	5,56	146	308	1,62	2	20,06	43
4250	94	5,32	149	268	1,87	4	20,17	46
4750	99	5,05	151	240	2,08	8	20,06	50

2. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -13$, $\Sigma = 300$, $W = 62$ S. E.

2750	180	2,78	77	510	0,98	−8	22,60	49
3250	202	2,48	79	393	1,27	−6	22,67	54
3750	238	2,10	79	347	1,44	−2	22,88	56
4250	290	1,72	79	308	1,62	+3	22,75	59

Af 1 erholdes som Middel:

$$4a = 20{,}24 \text{ ved } 19° \text{ C.}$$

Af 2:

$$4a = 22{,}73 \text{ ved } 114° \text{ C.}$$

Heraf

$$4a_0 = 19{,}74\,, \quad 4a_{100} = 22{,}34.$$

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,1050,	0,1107,	0,1136,

hvoraf

$$c_0 = 0{,}1050\,, \quad c_{100} = 0{,}1165.$$

Endvidere er $\delta_0 = 7{,}828$, $\delta_{100} = 7{,}799$,

$c_0 \delta_0 = 0{,}8219$, $c_{100} \delta_{100} = 0{,}9086$.

Altsaa $k_0 = 0{,}1665$, $k_{100} = 0{,}1627$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}023$.

De elektriske Ledningsevner ere:

$$\varkappa_0 = 10{,}374 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 6{,}628 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}565,$$

altsaa $\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1605$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2455$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}530$.

Nysølv.

1. $\vartheta = 9{,}6°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 240$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2750	157	3,18	194	425	1,18	4	43,58	51
3250	167	2,99	193	375	1,33	6	43,29	49
3750	176	2,84	192	340	1,47	8	42,69	47
4250	202	2,48	191	320	1,56	20	42,33	51

2. $\vartheta = 10{,}3°$, $\Delta = 5$, $\Sigma = 100$, $W = 102$ S. E.

2750	146	3,42	207	442	1,13	13	42,64	50
3250	140	3,57	222	396	1,26	18	42,24	50
3750	159	3,14	221	380	1,32	30	42,83	50

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -29$, $\Sigma = 350$, $W = 102$ S. E.

3750	73	6,85	269	392	1,28	−15	34,93	49
4250	73	6,85	281	345	1,45	−13	35,42	49
4750	74	6,76	288	275	1,82	−11	34,85	53

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -21$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ S. E.

3750	276	1,81	94	432	1,16	−13	36,03	52
4250	298	1,68	96	400	1,25	− 7	35,15	52
4750	362	1,38	100	386	1,30	+ 3	36,19	53

Middel af 1 og 2:

$4a = 42{,}80$ ved 19° C.

Middel af 3 og 4: $4a = 35{,}43$ ved 108° C.

Heraf $4a_0 = 44{,}37$, $4a_{100} = 36{,}09$.

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,09153,	0,09292,	0,09401,

hvoraf $c_0 = 0{,}09141$, $c_{100} = 0{,}09467$.

Endvidere er $\delta_0 = 8{,}499$, $\delta_{100} = 8{,}457$,

$c_0\,\delta_0 = 0{,}7769$, $c_{100}\,\delta_{100} = 0{,}8006$,

altsaa er $k_0 = 0{,}07004$, $k_{100} = 0{,}08874$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}7893$.

De elektriske Ledningsevner ere:

$$\varkappa_0 = 3{,}766 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 3{,}632 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}037,$$

altsaa $\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1858$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2443$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}314$.

Kobber.

1. $\vartheta = 11{,}2°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	186	2,69	15	985	0,52	1	4,36	64
1750	162	3,09	18	680	0,74	2	4,18	72
2250	156	3,21	22	512	0,98	3	4,54	75
2750	154	3,25	24	406	1,24	4	4,45	79
3250	150	3,34	27	334	1,50	5	4,55	81
3750	156	3,21	29	288	1,74	6,5	4,55	86
4250	153	3,27	32	246	2,04	8,5	4,43	94
4750	150	3,34	35	224	2,23	10,5	4,40	98

2. $\vartheta = 100°$, $\Delta = 3$, $\Sigma = 150$, $W = 52$ S. E.

3250	99	5,05	39	287	1,75	7,5	4,63	88
3750	101	4,95	40	250	2,01	8	4,60	86
4250	107	4,68	41	220	2,28	9	4,60	87

Middel af 1 $4a = 4{,}43$ ved 19° C.

Middel af 2 $4a = 4{,}61$ ved 117° C.

Heraf $4a_0 = 4{,}40$, $4a_{100} = 4{,}58$.

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,08988,	0,09169,	0,09319,

hvoraf $c_0 = 0{,}08970$, $c_{100} = 0{,}09421$.

Endvidere er $\delta_0 = 8{,}827$, $\delta_{100} = 8{,}783$,

$c_0\,\delta_0 = 0{,}7918$, $c_{100}\,\delta_{100} = 0{,}8274$.

$k_0 = 0{,}7198$, $k_{100} = 0{,}7226$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}996$,

$\varkappa_0 = 45{,}74 \cdot 10^{-5}$, $\varkappa_{100} = 33{,}82 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}352$,

$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1574$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2137$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}358$.

Bly.

1. $\vartheta = 11{,}0°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -50$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	84	5,95	136	273	1,84	4	16,94	115
2250	86	5,81	140	211	2,38	5	16,48	116
2750	99	5,05	145	175	2,86	8	17,30	118

2. $\vartheta = 12{,}1°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

2250	142	3,53	105	210	2,39	5,5	16,81	121
2750	149	3,36	114	174	2,88	8	16,99	122
3250	162	3,09	120	146	3,43	11	16,71	126
3750	183	2,74	129	126	3,97	17	16,68	133

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -35$, $\Sigma = 500$, $W = 102$ S. E.

1750	111	4,51	78	380	1,33	—30	18,49	129
2250	132	3,79	79	263	1,91	—24	18,05	145

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -35$, $\Sigma = 630$, $W = 102$ S. E.

3250	233	2,16	76	112	4,47	—42	17,80	156
3750	273	1,84	84	94	5,32	—44	17,88	155

Middel af 1 og 2:

$$4a = 16{,}84 \text{ ved } 19° \text{ C.}$$

Middel af 3 og 4:

$$4a = 18{,}05 \text{ ved } 105° \text{ C.}$$

Heraf

$$4a_0 = 16{,}57, \quad 4a_{100} = 17{,}98.$$

Varmefylderne ere

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,03067,	0,03092,	0,03071,

hvoraf

$$c_0 = c_{100} = 0{,}03077.$$

Endvidere er

$$\delta_0 = 11{,}257, \qquad \delta_{100} = 11{,}163.$$

$$c_0 \delta_0 = 0{,}3464, \quad c_{100} \delta_{100} = 0{,}3435.$$

$$k_0 = 0{,}08362, \quad k_{100} = 0{,}07642, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}094,$$

$$\varkappa_0 = 5{,}141 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 3{,}602 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}427,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1627, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2122, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}304.$$

Messing (rødt).

1. $\vartheta = 12{,}7°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -42$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	110	4,55	70	558	0,90	3	12,29	50
2750	111	4,50	73	406	1,24	4	12,02	56
3250	108	4,63	77	348	1,44	5	11,86	56
3750	114	4,39	80	284	1,76	6	12,03	59

2. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -14{,}5$, $\Sigma = -273$, $W = 102$ S. E.

1750	90	5,56	65	460	1,10	−12	11,56	65
2250	86	5,81	68	318	1,58	−14	11,10	64
2750	83	6,02	72	194	2,58	−21	10,81	65
3250	80	6,25	77	131	3,82	−30	10,63	67

Afkølingen er i dette Forsøg paaskyndet ved en kortvarig Berøring med en kold Stang.

Middel af 1: $4a = 12{,}05$ ved 21° C.

Middel af 2: $4a = 11{,}02$ ved 107° C.

Heraf $4a_0 = 12{,}29$, $4a_{100} = 11{,}10$.

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,08991,	0,09224,	0,09396,

hvoraf $c_0 = 0{,}09005$, $c_{100} = 0{,}09396$.

Endvidere er $\delta_0 = 8{,}395$, $\delta_{100} = 8{,}348$,

$c_0 \delta_0 = 0{,}7559$, $c_{100} \delta_{100} = 0{,}7844$,

$k_0 = 0{,}2460$, $k_{100} = 0{,}2827$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}8704$,

$\varkappa_0 = 15{,}75 . 10^{-5}$, $\varkappa_{100} = 13{,}31 . 10^{-5}$, $\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}183$,

$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1562$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2123$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}360$.

Messing (gult).

1. $\vartheta = 12{,}0°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 173$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3250	65	7,69	143	324	1,56	11	14,27	76
3750	66	7,58	147	264	1,90	16	13,82	86
4250	67	7,46	150	204	2,46	18	13,31	93

2. $\vartheta = 10{,}3°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 120$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	304	1,66	44	505	1,00	8	13,53	75

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -6$, $\Sigma = 550$, $W = 102$ S. E.

2750	170	2,94	47	367	1,37	—5	12,05	66
3250	192	2,61	48	307	1,63	—3	12,03	69
3750	226	2,22	48	266	1,88	0	11,71	74
4250	275	1,82	48	255	1,96	4	11,64	76

Middel af 1 og 2: $4a = 13{,}73$ ved 20° C.

Middel af 3: $4a = 11{,}86$ ved 107° C.

Heraf $4a_0 = 14{,}16$, $4a_{100} = 12{,}01$.

Varmefylderne ere

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,08833,	0,09218,	0,09265,

hvoraf $c_0 = 0{,}08876$, $c_{100} = 0{,}09428$.

Endvidere er $\delta_0 = 8{,}140$, $\delta_{100} = 8{,}090$,

$c_0 \delta_0 = 0{,}7225$, $c_{100} \delta_{100} = 0{,}7627$,

$k_0 = 0{,}2041$, $k_{100} = 0{,}2540$, $\frac{k^0}{k_{100}} = 0{,}8035$,

$\varkappa_0 = 12{,}625 . 10^{-5}$, $\varkappa_{100} = 11{,}00 . 10^{-5}$, $\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}148$,

$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1617$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2309$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}428$,

Magnium.

1. $\vartheta = 10{,}9°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 210$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	63	7,94	56	153	3,27	2	4,82	104
4250	66	7,58	59	132	3,79	3	4,93	109
4750	63	7,94	61	115	4,35	4	4,64	115

2. $\vartheta = 10{,}8°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ S. E.

1250	121	4,13	23,5	514	0,99	0	4,59	82
1750	118	4,24	24,5	368	1,37	0	4,37	81
2250	124	4,03	26,5	268	1,88	0,5	4,40	90
2750	132	3,79	28	226	2,22	1	4,51	90
3250	137	3,65	30	190	2,64	2	4,45	97
3750	150	3,34	32	152	3,30	2	4,52	101

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -20$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2750	184	2,72	28,5	173	2,89	1,5	4,81	114
3250	204	2,45	30	145	3,45	2,5	4,66	121
3750	235	2,13	31,5	124	4,03	3	4,63	123
4250	273	1,83	30,5	122	4,10	4,5	4,38	119

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -2$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ S. E.

3250	81	6,17	44	148	3,38	−2	4,82	104
3750	96	5,21	40,5	125	4,00	−2	4,61	107
4250	129	3,88	38	119	4,20	−1,5	4,89	101
4750	166	3,01	35,5	105	4,76	+1,5	4,38	117

Den sidste Forsøgsrække er udført, ikke ved Opvarmning, men ved Afkøling, idet den ydre Stang kun var opvarmet til omtrent 80°, og under Forsøget afkøledes frit i Luften. Strømmen var derfor ogsaa her i Maaletraaden vendt om.

Af alle Forsøgene erholdes som Middel:

$$4a = 4{,}612.$$

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,2456,	0,2519,	0,2509,

hvoraf $c_0 = c_{100} = 0{,}2503.$

Endvidere er $\delta_0 = 1{,}739$, $\delta_{100} = 1{,}725$,

$c\delta = 0{,}4335$,

$k_0 = k_{100} = 0{,}3760$,

$\varkappa_0 = 24{,}47 . 10^{-5}$, $\varkappa_{100} = 17{,}50 . 10^{-5}$, $\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}398$,

$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1537$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2149$, $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}398$,

Aluminium.

1. $\vartheta = 13{,}7°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	61	8,20	72	202	2,48	3,5	6,41	81
4250	63	7,94	73	181	2,76	3,5	6,31	85

2. $\vartheta = 14{,}0°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2750	85	5,88	52	303	1,65	2	6,64	71
3250	88	5,68	54	243	2,06	3	6,59	77
3750	94	5,32	55	212	2,36	4	6,64	79
4250	96	5,21	57	164	3,05	4,5	6,35	88
4750	97	5,15	58	180	2,78	7,5	6,37	83

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -15$, $\Sigma = 220$, $W = 102$ S. E.

3750	94	5,32	41	209	2,37	−11	6,76	84
4250	92	5,43	44	181	2,76	−10	6,59	87
4750	92	5,43	47	167	2,99	−9	6,65	86

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -5{,}5$, $\Sigma = 320$, $W = 52$ S. E.

3250	221	2,27	23,5	216	2,32	−5,5	6,32	79
3750	290	1,73	23,5	191	2,62	−5	6,55	79
4250	388	1,30	23	177	2,83	−4	6,54	78

Af alle Forsøgene erholdes som Middel:

$$4a = 6{,}517.$$

Varmefylderne ere: ved 0° ved 50° ved 75°

$$0{,}2055, \quad 0{,}2088, \quad 0{,}2144,$$

hvoraf $c_0 = 0{,}2043$, $c_{100} = 0{,}2168$.

Endvidere er $\delta_0 = 2{,}739$, $\delta_{100} = 2{,}720$,

$$c_0 \delta_0 = 0{,}5596, \quad c_{100} \delta_{100} = 0{,}5897,$$

$$k_0 = 0{,}3435, \quad k_{100} = 0{,}3619, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0{,}9489,$$

$$\varkappa_0 = 22{,}46 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 17{,}31 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}297,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1529, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2091, \quad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}367.$$

Kadmium.

1. $\vartheta = 13{,}3°$, $\Delta = -1$, $\Sigma = -70$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	67	7,46	71	566	0,90	−1	8.61	68
1750	71	7,04	74	396	1,27	−1	9,03	70
2250	71	7,04	76	303	1,66	−1	8,85	72
2750	72	6,94	78	245	2,05	−1	8,79	73
3250	74	6,76	81	200	2,50	−1	8,86	75
3750	74	6,76	85	178	2,81	0	8,88	77
4250	75	6,67	88	156	3,21	+1	8,81	80

2. $\vartheta = 14{,}7°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	68	7,35	78	385	1,30	0	9,02	74
2250	74	6,76	78	286	1,75	0	9,16	78
2750	81	6,17	75	228	2,19	0	8,97	80
3250	98	5,10	71	197	2,54	2	9,03	85
3750	123	4,07	67	181	2,76	5	9,08	88

3. $\vartheta = 14{,}8°$, $\Delta = -140$, $\Sigma = -40$, $W = 102$ S. E.

1250	88	5,68	58	548	0,93	0	8,77	72
1750	95	5,26	59	378	1,33	0	8,98	74
2250	114	4,39	56	287	1,75	0,5	9,04	78
2750	140	3,57	52	235	2,13	1	8,95	80

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -33{,}5$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ S. E.

3250	67	7,46	55	290	1,73	−33,5	9,63	80
3750	60	8,33	62	236	2,12	−33,5	9,14	80
4250	65	7,69	64	196	2,55	−33,5	9,52	81
4750	67	7,46	69	153	3,27	−33,5	9,55	90

5. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -17$, $\Sigma = 550$, $W = 52$ S. E.

3250	133	3,76	39,5	215	2,33	−17	9,28	86
3750	149	3,36	42,5	185	2,70	−15,5	5,57	89
4250	187	2,67	43	163	3,07	−13	9,76	94

Middel af 1, 2 og 3: $4a = 8{,}927$ ved 24°.

Middel af 4 og 5: $4a = 9{,}493$ ved 110°,

hvoraf $4a_0 = 8{,}769$, $4a_{100} = 9{,}427$.

Varmefylderne ere

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,05562,	0,05643,	0,05607,

hvoraf $c_0 = 0{,}05585$, $c_{100} = 0{,}05632$.

Endvidere er

$$\delta_0 = 8{,}638, \qquad \delta_{100} = 8{,}556,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}4824, \qquad c_{100}\delta_{100} = 0{,}4819,$$

$$k_0 = 0{,}2200, \qquad k_{100} = 0{,}2045, \qquad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}076,$$

$$\varkappa_0 = 14{,}41 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 10{,}18 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}415,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1527, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2009, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}315,$$

Antimon.

1. $\vartheta = 16{,}5°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -60$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	138	3,63	174	274	1,84	0	31,81	102
2250	162	3,09	179	195	2,57	0	31,63	111
2750	192	2,61	181	165	3,04	2	31,68	112

2. $\vartheta = 15{,}1°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 180$, $W = 102$ S. E.

2750	89	5,62	278	156	3,21	0	31,47	125
3250	93	5,38	294	138	3,63	5	32,07	123
3750	100	5,00	304	115	4,35	8	31,64	129
4250	112	4,47	308	107	4,68	16	31,93	127

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -2$, $\Sigma = 800$, $W = 102$ S. E.

3250	133	3,77	257	121	4,14	−15	34,38	154
3750	141	3,56	276	107	4,68	−11	34,84	150
4250	168	2,99	291	90	5,56	− 6	34,73	160
4750	197	2,55	301	87	5,75	+12	34,78	158

Middel af 1 og 2:

$$4a = 31{,}75 \text{ ved } 24°.$$

Middel af 3:

$$4a = 34{,}68 \text{ ved } 108°.$$

Heraf

$$4a_0 = 30{,}91, \quad 4a_{100} = 34{,}40.$$

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,05162,	0,05174,	0,05070,

hvoraf

$$c_0 = c_{100} = 0{,}05120.$$

Endvidere er

$$\delta_0 = 6{,}673, \qquad \delta_{100} = 6{,}653,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}3417, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}3406,$$

$$k_0 = 0{,}04421, \qquad k_{100} = 0{,}03961, \qquad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}116,$$

$$\varkappa_0 = 2{,}199 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 1{,}522 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}445,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 2011, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2603, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}294.$$

Vismuth.

1. $\vartheta = 16{,}1°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2300	96	5,22	577	180	2,79	14	70,3	130
2800	112	4,47	583	150	3,34	28	71,1	133

2. $\vartheta = 15{,}8°$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S. E.

2400	105	4,77	551	178	2,82	12	71,0	125
2900	133	3,77	547	134	3,74	16	70,7	137
3400	181	2,78	528	109	4,60	0	71,5	135
3900	310	1,64	511	88	5,69	−10	71,1	142

3. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -4$, $\Sigma = 340$, $W = 102$ S. E.

1900	159	3,16	440	169	2,98	−30	76,5	169
2400	196	2,57	453	126	3,98	−48	77,0	164

4. $\vartheta = 100°$, $\Delta = -4$, $\Sigma = 380$, $W = 102$ S. E.

1900	176	2,85	408	223	2,26	21	75,7	170
2400	244	2,07	421	178	2,82	43	77,3	169
2900	424	1,22	422	152	3,30	70	77,9	166

Middel af 1 og 2:

$$4a = 70{,}95 \text{ ved } 25°.$$

Middel af 3 og 4:

$$4a = 76{,}88 \text{ ved } 105°.$$

Heraf

$$4a_0 = 69{,}10, \quad 4a_{100} = 76{,}51.$$

Varmefylderne ere:

ved 0°	ved 50°	ved 75°
0,03013,	0,03066,	0,03090,

hvoraf

$$c_0 = 0{,}3014, \qquad c_{100} = 0{,}03116.$$

Endvidere er

$$\delta_0 = 9{,}746, \qquad \delta_{100} = 9{,}707,$$

$$c_0\delta_0 = 0{,}2937, \quad c_{100}\delta_{100} = 0{,}3025,$$

$$k_0 = 0{,}01700, \qquad k_{100} = 0{,}01581, \qquad \frac{k_0}{k_{100}} = 1{,}071,$$

$$\varkappa_0 = 0{,}9293 \cdot 10^{-5}, \quad \varkappa_{100} = 0{,}6299 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_{100}} = 1{,}475,$$

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 1830, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} = 2510, \qquad \frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0} = 1{,}372.$$

Efter at have tilendebragt alle disse Forsøg, som havde varet fra Januar til Oktober 1880, ønskede jeg, navnlig foranlediget ved de imidlertid af Hr. H. F. Weber offentliggjorte (Berichte der Academie d. W. zu Berlin, 1880, S. 457) Forsøgsresultater, som i en paafaldende Grad afvige fra mine, at gjentage Bestemmelserne af Stængernes Varmeledningsevne paa en fra den først anvendte fuldkommen forskjellig Maade. Jeg valgte hertil Forbes's Methode: Iagttagelsen af den ved Opvarmning af Stangens ene Ende fremkomne stationære Temperaturtilstand i forskjellige Punkter af Stangen, og Iagttagelsen af Stangens Afkøling ved den ydre Varmeledning, efter at Stangen først havde været opvarmet til en ensformig Temperatur. Da jeg tillige ønskede at undgaa Anvendelsen af det tidligere benyttede Varmeapparat, var det min Hensigt at udføre disse Forsøg i fri Luft ved Stuens Temperatur, hvorved jeg altsaa opgav at bestemme Varmegradens Indflydelse paa Varmeledningsevnen.

Jeg begyndte disse Undersøgelser med Forsøg over den saakaldte ydre Varmeledning, idet jeg dels ved Hjælp af Thermometre, dels ved Thermoelementer undersøgte Afkølingen i fri Luft af opvarmede Legemer af forskjellige Størrelser og Former.

Til Beregning af disse Forsøg benyttede jeg først den i den nyere Tid indførte Formel for den ydre Varmeledning, ifølge hvilken den af Overfladeenheden i hver Tidsenhed til Omgivelserne afgivne Varmemængde udtrykkes ved $hu(1+\beta u)$, naar u er Forskjellen imellem Legemets og Omgivelsernes Temperatur, og h og β ere to af u uafhængige Konstanter. Denne Formel viste sig ogsaa fyldestgjørende, saalænge Afkølingen ikke fortsattes ud over en vis Grænse, som omtrent laa ved $u = \frac{1}{4}u_1$, naar u_1 var den først iagttagne Værdi af u. Under denne Grænse viste Iagttagelserne regelmæssige Afvigelser fra Beregningen.

Da denne empiriske Formel saaledes ikke ganske kunde tilfredsstille mig, forsøgte jeg ad theoretisk Vej at opnaa en mere brugbar Formel. Det første Skridt til en theoretisk Behandling af den ydre Varmeledning er først gjort for 2 Aar siden af Hr. A. Oberbeck (Wiedemanns Ann. Bd. 7, S. 27), men idet denne Forfatter har søgt at løse Opgaven ved Hjælp af Rækkeudviklinger efter stigende Potenser af den omgivende Lufts Udvidelseskoefficient, er det kun lykkedes ham at finde en Løsning, som alene kan bruges, naar den omgivende Luft er meget stærkt fortyndet, medens den egentlige praktiske Løsning ganske er undsluppen Forfatteren.

En Plade af Højden H og uendelig Brede tænkes ophængt vertikalt og holdt paa en konstant Temperatur, som antages højere end den omgivende Lufts. Der opstaar herved opadgaaende Strømninger i den omgivende Luft, og antages, at de i horizontal Retning gaaende Strømninger her blive uden Betydning, saa vil Lufttrykket p overalt i samme horizontale Plan blive det samme, medens det selvfølgelig forandrer sig fra et horizontalt Lag til et andet.

Er w Luftens vertikale Hastighed, η Koefficienten for den indre Gnidning, ρ' Luftens Vægtfylde og g Tyngdekraftens Acceleration, saa er med den nævnte Forudsætning Ligningen for Luftens Bevægelse:

$$\rho'\left(\frac{dw}{dt}+\frac{dw}{dz}w\right)=-\rho' g-\frac{dp}{dz}+\eta\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right). \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Er endvidere Luftens Temperatur i Punktet x, z $T+\vartheta$ Grader, regnet fra det absolute Nulpunkt, og T i uendelig Afstand fra Pladen, er c Luftens Varmefylde ved konstant Tryk og k dens Varmeledningsevne, saa er Ligningen for Varmens Bevægelse:

$$\rho' c\left(\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{d\vartheta}{dz}w\right)=k\left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{d^2\vartheta}{dz^2}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En Del af Temperaturforandringen skyldes Luftens Udvidelse, idet den stiger tilvejrs, men da Luften herved kun afkøles 1° C., for hver 100 Meter, eller 0,0001° C. for hver Centimeter, den stiger tilvejrs, saa kan denne Størrelse betragtes som meget lille i Sammenligning med de fra de øvrige Betingelser hidrørende Temperaturforandringer.

Betegnes Luftens Vægtfylde i uendelig Afstand fra Pladen ($x=\infty$) ved ρ, saa er

$$\rho T=\rho'(T+\vartheta) \quad \text{og} \quad \frac{dp}{dz}+\rho g=0,$$

altsaa er

$$\frac{dp}{dz}+\rho' g=(\rho'-\rho)g=-\frac{\vartheta}{T+\vartheta}\rho g.$$

Betragte vi endvidere alene den stationære Temperaturtilstand, som fremkommer, naar Pladens Temperatur holdes konstant, saa gaa Ligningerne (1) og (2) over til:

$$\frac{dw}{dz}w=g\frac{\vartheta}{T}+\frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{T+\vartheta}{T}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{d\vartheta}{dz}w=\frac{k}{\rho c}\cdot\frac{T+\vartheta}{T}\left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{d^2\vartheta}{dz^2}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

I disse Ligninger kunne vi med tilstrækkelig Tilnærmelse betragte Koefficienterne til de sidste Led som Funktioner alene af T i Stedet for af $T+\vartheta$, hvorved altsaa ϑ bortfalder i disse Koefficienter.

I hele det Luftlag, som er begrænset af to gjennem Pladens nederste og øverste Rand lagte horizontale Planer, vil Luften træde op igjennem det nederste Plan med en af x afhængig Hastighed w og bevæge sig videre til det øverste Plan uden væsentlig Forandring i Hastigheden, hvorimod Luftens Varmegrad i den samme Luftstrøm begynder for neden med at være kun lidet forskjellig fra T, men gaar dernæst hurtig over til en Temperatur $T+\vartheta$, som tilnærmelsesvis ligeledes holder sig konstant indtil den øverste horizontale Plade. Disse Forudsætninger nærme sig desto mere Virkeligheden, jo større Pladens Højde H er, og jo nærmere de betragtede Luftstrømme ligge ved Pladen, men da det netop er paa de nærmeste Luftlags Bevægelser og Varmeforhold, at hele Fænomenet i det væsentlige beror, vil der neppe gjøres nogen stor Fejl ved at overføre de samme Forudsætninger paa Luftstrømningerne i alle Afstande fra Pladen.

De mathematiske Forudsætninger ere altsaa, at w fra $z=0$ til $z=H$ er uafhængig af z og alene Funktion af x, medens ϑ og $\frac{d\vartheta}{dz}$ ere 0 for $z=0$, hvorefter $\frac{d\vartheta}{dz}$ hurtig voxer

og atter aftager til 0, saaledes at ϑ allerede for en i Sammenligning med H lille Værdi af z beholder ligesom w en konstant Værdi indtil $z = H$. I denne sidste Grænse selv antages baade w og ϑ konstante.

Ved Multiplikation af Ligningerne (3) og (4) med $\frac{dz}{H}$ og Integration fra $z = 0$ til $z = H$ erholdes saaledes:

$$0 = g\frac{\vartheta}{T} + \frac{\eta}{\rho}\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\vartheta w = \frac{k}{\rho c}\frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Da Luften saavel i umiddelbar Berøring med Pladen som i uendelig Afstand fra den er i Hvile, og da Luftlaget ved Pladen har dennes konstante Temperatur, som vi ville betegne ved $T + \vartheta_0$, saa bliver altsaa de til Differentialligningerne svarende Grænsebetingelser:

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{og} \quad w = 0 \quad \text{for} \quad x = 0,$$
$$\vartheta = 0 \quad \text{og} \quad w = 0 \quad \text{for} \quad x = \infty.$$

Sættes $x = \alpha x', \quad w = \beta w', \quad \vartheta = \vartheta_0 \vartheta',$

kunne α og β vælges saaledes, at Differentialligningerne erholde Formen:

$$0 = \vartheta' + \frac{d^2w'}{dx'^2} \quad \text{og} \quad \vartheta' w' = \frac{d^2\vartheta'}{dx'^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

idet man da maa sætte:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\eta k H T}{\rho^2 c g \vartheta_0}} \quad \text{og} \quad \beta = \sqrt{\frac{k g H \vartheta_0}{\eta c T}}.$$

Grænsebetingelserne blive nu:

$$\vartheta' = 1 \quad \text{og} \quad w' = 0 \quad \text{for} \quad x' = 0,$$
$$\vartheta' = 0 \quad \text{og} \quad w' = 0 \quad \text{for} \quad x' = \infty.$$

Da alle de konstante Koefficienter saaledes ere reducerede til rene Tal, vil der i Ligningernes Integraler kun kunne indgaa Talkoefficienter.

Betegnes ved L den Varmemængde, som Pladen i hvert Sekund og fra hver Kvadratcentimeter af Overfladen afgiver ved Ledning til den omgivende Luft, saa er:

$$L = -k\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]_{x=0} = -k\frac{\vartheta_0}{\alpha}\left[\frac{d\vartheta'}{dx'}\right]_{x'=0},$$

og, naar den ovenfor angivne Værdi for α indsættes,

$$L = N\sqrt[4]{\frac{c g k^3}{\eta H T}} \cdot \sqrt{\rho}\, \vartheta_0^{\frac{5}{4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

idet $$-\left[\frac{d\vartheta'}{dx'}\right]_{x'=0} = N$$

er et rent Tal, som jeg senere skal bestemme. For de fuldkomne Luftarter antager det fundne Udtryk for L en noget simplere Form, idet her $\frac{c\eta}{k}$ som bekjendt kun er meget lidt forskjellig fra 1.

Uagtet det fundne Resultat kun er fremkommet ved Hjælp af meget elementære Forudsætninger, og derfor kun kan betragtes som en første Approximation, udtrykker det dog i en paafaldende nøjagtig Grad Loven for den ydre Varmeledning (herunder ikke indbefattet Varmestraalingen). Som bekjendt have Dulong og Petit (Ann. de ch. et de ph. T. 7, 1817, p. 225—264 og 337—367) af deres Iagttagelser over forskjellige Legemers Afkølingshastighed fundet denne, naar den Del, som skyldes Udstraalingen, fradrages, proportional med $mp^c\vartheta_0{}^b$. Da Afkølingshastigheden er proportional med Varmetabet L, og da Luftens Tryk p er proportionalt med dens Vægtfylde ρ, ses det, at de to ved Forsøg og ved Beregning fundne Resultater allerede i Formen ere ganske overensstemmende. For alle de undersøgte Luftarter fandt endvidere Dulong og Petit $b = 1{,}233$, medens denne Exponent i (8) er 1,25, altsaa næsten ganske den samme, derimod fandtes c lidt forskjellig for de forskjellige Luftarter, nemlig lig 0,45 for atmosfærisk Luft, 0,315 for Brint, 0,517 for Kulsyre og 0,501 for Aethylen, medens den theoretiske Formel giver $c = 0{,}5$ for alle Luftarter. Naar man tager Hensyn til de Fejl, som de nævnte Iagttagere have begaaet i Beregningen af deres Forsøg paa Grund af deres mangelfulde Kjendskab til Lovene for stærkt fortyndede Luftarters Varmeledningsevne, maa ogsaa Overensstemmelsen her betragtes som tilfredsstillende.

Endvidere fandtes Konstanten m for atmosfærisk Luft, Brint, Kulsyre, og Æthylen proportional med $1 : 3{,}46 : 0{,}965 : 1{,}33$, medens de tilsvarende Forhold, beregnede af (8), blive $1 : 2{,}46 : 0{,}85 : 1{,}07$. Her kan imidlertid gjøres den samme Bemærkning, som ovenfor. Saaledes vil man med den af Stefan (Berichte der Wien. Acad. Bd. 79, II, 1879) angivne Korrektion for Brint i Stedet for Tallet 3,46 finde 3,11, som allerede er betydelig nærmere den beregnede Værdi 2,46.

Endelig have ogsaa Dulong og Petit fundet m uafhængig af den absolute Temperatur, hvilket ogsaa for saa vidt er i ret god Overensstemmelse med (8), som det viser sig, naar de af Winkelmann, Obermayer og E. Wiedemann fundne Temperaturkoefficienter for k, η og c (se «Theorie der Gase» af O. E. Meyer, 1877, p. 101 og 201) indsættes, at Koefficienten i (8) kun i ringe Grad forandrer sig med den absolute Temperatur (for atm. Luft og Brint $-0{,}14$, for Kulsyre $+0{,}04$, for Æthylen $+0{,}13$ Procent for 1° C.).

For numerisk at bestemme Tallet N i Udtrykket (8) maa man foretage en Integration af Ligningerne (7). Man indsætte heri $x' = \log \frac{1}{1-y}$, og udvikle ϑ' og w' i Række efter stigende Potenser af y, nemlig:

$$\vartheta' = 1 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots, \quad w' = a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$$

Disse Rækker skulle tilfredsstille Differentialligningerne og Grænsebetingelserne

$$\vartheta' = 1 \quad \text{og} \quad w' = 0 \quad \text{for} \quad y = 0,$$
$$\vartheta' = 0 \quad \text{og} \quad w' = 0 \quad \text{for} \quad y = 1.$$

Idet jeg efterhaanden har medtaget flere og flere Led af Rækkerne for ϑ' og w', har jeg fundet følgende Værdier for b_1:

$$-1\,,\quad -0{,}6667\,,\quad -0{,}5902\,,\quad -0{,}5642\,,\quad -0{,}5539\,,\ \ldots$$

en Række, som meget nær konvergerer til $-0{,}548$.

Nu er $$\left[\frac{d\vartheta'}{dx'}\right]_{x'=0} = \left[\frac{d\vartheta'}{dy}\right]_{y=0} = b_1 = -N,$$

altsaa er $$N = 0{,}548\ldots$$

For atmosfærisk Luft ved sædvanligt Tryk og 0° er endvidere med de antagne Enheder $g = 981$, $\rho = 0{,}001294$, $\eta = 0{,}00019$, $k = 0{,}00005$, $c = 0{,}238$, hvorved erholdes $$L = 0{,}000096\, H^{-\frac{1}{4}} \vartheta_0^{\frac{5}{4}}.$$

Ved Forsøg, hvis Enkeltheder jeg her forbigaaer, har jeg for en Messingplade, 11^{cm} i Kvadrat, fundet $$L = 0{,}000125\, H^{-\frac{1}{4}} \vartheta_0^{\frac{5}{4}}.$$

Da Koefficienten for en uendelig bred Plade maa blive mindre, maa ogsaa Overensstemmelsen mellem den beregnede og den iagttagne numeriske Koefficient betragtes som ret tilfredsstillende.

Antage vi altsaa Exponenten b i Dulongs og Petits Formel lig $\frac{5}{4}$, og gaa vi tillige ud fra den utvivlsom rigtigere, af Stefan indførte Formel for Varmetabet ved Udstraaling, saa vil Afkølingshastigheden for et i Luften ophængt Legeme være bestemt ved

$$-\frac{dT}{dt} = \frac{q\sigma}{mc}(T^4 - T_0^4) + \frac{q\lambda}{mc}(T - T_0)^{\frac{5}{4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

naar T og T_0 ere Legemets og Omgivelsernes fra det absolute Nulpunkt regnede Temperaturer, m Legemets Masse, c dets Varmefylde, q dets Overflade og σ og λ konstante Koefficienter.

Ved svagere Opvarmning kan Udstraalingen antages proportional med $T - T_0 = \vartheta$, og Formlen reduceres da til: $$-\frac{d\vartheta}{dt} = h\vartheta(1 + \eta\vartheta^{\frac{1}{4}}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

idet h og η ere Konstanter. Sættes $\vartheta = \vartheta_0$ for $t = 0$, erholdes heraf

$$t = \frac{4}{h} \log \frac{\vartheta^{-\frac{1}{4}} + \eta}{\vartheta_0^{-\frac{1}{4}} + \eta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Som Exempel paa denne Formels Brugbarhed skal jeg anføre et Afkølingsforsøg med en med Kviksølv fyldt Cylinder af forniseret Messingblik. Cylinderen, som var ophængt horizontalt, var $15{,}85^{cm}$ lang og $3{,}82^{cm}$ i Diameter. Temperaturen aflæstes paa et i $\frac{1}{10}$ Grader inddelt Thermometer. Der fandtes:

ϑ	=	12,9°,	9,9°,	6,9°,	2,4° 1,4°
t	=	0,	496,	1207,	3473, 4733 Sek.
t (ber.)	=	0,	499,	1208,	3470, 4733 —

De beregnede Værdier af t svare til $h = 0{,}0002463$ og $\eta = 0{,}63$.

Endnu yderligere kan Formlen for Afkølingshastigheden reduceres, naar den ved Udstraalingen tabte Varmemængde kun udgjør en ringe Del af det hele Varmetab, idet man da erholder

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = l\vartheta^{\frac{5}{4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

hvori kun den ene Konstant l indgaar. Heraf erholdes

$$t = \frac{4}{l}\left(\vartheta^{-\frac{1}{4}} - \vartheta_0^{-\frac{1}{4}}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Denne Formel finder især god Anvendelse paa mindre Legemer med metallisk Overflade. Som Exempler paa den Indflydelse, som Legemets Størrelse udøver paa Koefficienten for den ydre Varmeledning, skal jeg anføre følgende Resultater af mine Forsøg. Man vil heri tillige finde en Forklaring af de store Uoverensstemmelser, som ere til Stede i de Bestemmelser af denne Koefficient, som forskjellige Iagttagere have udført.

Forsøgene ere udførte dels med Thermometre dels med Thermoelementer. Beregningen er udført saaledes, at jeg først enten ved Formlen (11) eller ved (13) bestemmer t, og dernæst for Middelværdien T af den højeste og laveste iagttagne Temperatur beregner $\frac{dT}{dt}$, hvorefter jeg ved Hjælp af Ligning (9) eliminerer den Del af Varmetabet, som skyldes Udstraalingen. Jeg er herved gaaet ud fra den af Graetz (Wied. Ann. Bd. 11, S. 913) fundne Værdi for Glassets Emissionskoefficient σ, nemlig $\sigma = 1{,}085 . 10^{-12}$, idet jeg ved sammenlignende Forsøg bestemte Udstraalingen af de forskjellige benyttede Overflader i Forhold til Glasset. Tages dettes Emissionskoefficient som Enhed, er efter disse Forsøg Koefficienten for fernisseret Messing 0,79, for blankt Messing 0,11. For alle rent metalliske polerede Overflader fandtes meget nær den samme Koefficient, dog danne Antimon og Vismuth mærkelige Undtagelser, idet de udstraale 3 til 4 Gange mere end de andre Metaller i mine Stænger. For Antimonstangens Vedkommende kunde dette maaske forklares af dens Overflades porøse Beskaffenhed, derimod var Vismuthstangens Politur ikke kjendelig forskjellig fra de andre Stængers.

Ved disse Forsøg fandtes følgende Værdier for Koefficienten λ (Lign. 9) for den ydre Varmeledning:

For horizontalt ophængte Cylindere:

1. Diameter 3,82 cm, Længde 15,85 cm, $\lambda = 0{,}000069$,
2. Diameter 1,5 cm, Længde 23,8 cm, $\lambda = 0{,}000090$,
3. Diameter 0,46 cm, Længde 80,0 cm, $\lambda = 0{,}000166$,

For Kugler:

1. Diameter 10,64 cm, $\lambda = 0{,}000055$,
2. Diameter 4,74 cm, $\lambda = 0{,}000074$.

Da det kun var min Hensigt at konstatere den store Indflydelse, Legemets Størrelse har paa Koefficienten λ, har jeg ikke fortsat denne Undersøgelse videre.

De to Kugler vare hule, og Forsøgene bleve anstillede saavel med Kuglerne tomme som fyldte med Kviksølv. Ligeledes bleve Forsøg anstillede med et 6^{cm} langt Stykke af den ene Messingstang, hvorpaa de gjentoges, efterat Stangen var udboret og lukket med en Messingprop. Skjøndt der paa denne Maade erholdtes meget forskjellige Afkølingshastigheder ved uforandret Overflade, kunde jeg dog ikke spore nogen Forandring i den ydre Varmeledning. Dette Resultat er af Vigtighed for alle Forsøg over Metallernes indre Varmeledning, da der ved disse altid forudsættes, at Varmetabet til Omgivelserne er det samme ved samme Temperaturer, hvad enten det opvarmede Legemes Varmegrad er konstant eller variabel. Dette Spørgsmaal kan kun afgjøres ved Forsøg, da det af theoretiske Grunde kan være meget muligt, at Afkølingshastigheden selv kan faa Indflydelse paa den ydre Varmeledning. Man kan for Exempel tænke sig et af en slet Varmeleder omgivet opvarmet Legeme saa hurtig afkølet, f. Ex. ved Tilledning af koldt Vand til dets Indre, at det endog kunde komme til at modtage Varme fra de af Legemet selv forud opvarmede Omgivelser. Befandt Legemet sig i Luften, vilde der imidlertid paa samme Tid ogsaa fremkomme en stærkere Strømning, som vilde have den modsatte Virkning.

Efter Tilendebringelsen af disse Forundersøgelser bleve alle Stængerne, med Undtagelse af Magniumstangen, ad galvanoplastisk Vej overtrukne med et Lag Nikkel. Da Antimonstangen desværre var gaaet itu ved Afpudsningen paa Drejebænken, og Tinstangen ved tidligere Forsøg var bleven for kort, beholdt jeg saaledes kun 9 Stænger tilbage for de følgende Forsøg.

Disse Forsøg bleve udførte paa følgende Maade. Stangen blev med den ene Ende anbragt i det samme Varmeapparat, som tidligere havde været benyttet til Bestemmelsen af Varmefylden. Apparatet indeholdt Alkohol og blev vedvarende holdt paa Alkoholens Kogepunkt. Stangen var stillet horizontalt, omtrent 3 Decimeter over Bordpladen og vel beskyttet ved Skjærme mod Lufttræk og mod Varmen fra Varmeapparatet. Efter omtrent 5 Timers Forløb, naar Varmetilstanden viste sig stationær, blev efterhaanden Temperaturen maalt i de forskjellige Huller i Stangen ved et enkelt Thermoelement, som bestod af en $0{,}2^{mm}$ tyk Nysølvtraad og en $0{,}1^{mm}$ tyk Kobbertraad. Fremgangsmaaden var herved den samme, som den tidligere benyttede. Naar der i Maaletraadens Strømkreds var indskudt Modstanden 112 S. E., saa svarede med dette Element ved sædvanlig Temperatur $57{,}7^{mm}$ af Maaletraaden til 1° C. Thermoelementets Traadender vare i disse Forsøg lagte ved Siden af hinanden og sammenloddede i Spidsen. Begge Traadene vare lige indtil Loddestedet isolerede, og naar Elementet var sat ind i et Hul, befandt Loddestedet sig i Stangens Axe. En lille Draabe Olie var i Forvejen bragt ind i ethvert af Hullerne. Thermoelementets to andre Traadender vare forbundne med Ledningen til Galvanometret og til Maaletraaden, og de to Forbindelsessteder vare anbragte i to paa Bordet stillede Glas med Kviksølv.

Naar Temperaturen i Hullerne vare maalte, blev Stangen taget fra Varmeapparatet og opvarmet ensformig til en ikke lidet højere Temperatur end den, hvorved de paafølgende

Forsøg over Afkølingen skulde udføres. Naar Stangens Temperatur ved den efterfølgende Afkøling nærmede sig dette Punkt, blev Stangen, som var ophængt horizontalt i to Silkesnore, ført hen til det samme Sted, hvor de første Maalinger vare udførte, og hvor alt forblev uforandret paa det nær, at Stangen nu var udenfor Skjærmen foran Varmeapparatet, og at den derved fremkomne Aabning i Skjærmen var tilstoppet. Iøvrigt vedblev Lampen endnu at brænde under Varmeapparatet. Thermoelementet blev indsat i et af Stangens Huller, og Tidsmomenterne, da Temperaturen passerede visse faste Punkter paa Maaletraaden, bestemtes.

Man vil af de i det Følgende meddelte Resultater se, at Formlen (13) med kun en enkelt Konstant er fuldkommen tilstrækkelig til Beregningen af disse Afkølingsforsøg. Betegnes den med Maaletraadens Enheder bestemte Temperatur ved u, ville vi altsaa for Afkølingsforsøgene have

$$t = \frac{4}{l}\left(u^{-\frac{1}{4}} - u_0^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

medens den til de første Forsøg ved stationær Temperatur svarende Differentialligning bliver

$$\frac{1}{a}\frac{d^2u}{dx^2} = l'u^{\frac{5}{4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

idet ligesom tidligere $a = \frac{c\delta}{k}$. Konstanten l' forholder sig til l i den foregaaende Ligning som Stangens krumme Overflade forholder sig til dens hele Overflade, altsaa $l' : l = 1 : \left(1 + \frac{d}{2L}\right)$, naar d er Stangens Diameter og L dens Længde.

De Huller, i hvilke Temperaturen blev maalt, befandt sig $1, 3, 5, \ldots$ cm fra Stangens frie Ende. De maalte Temperaturer være betegnede ved $u_1, u_3, u_5, \ldots$

Tænkes Stangen forlænget saa meget, at dens cylindriske Overflade bliver saa meget forøget som Endefladens Areal, og tænkes Endefladen nu uigjennemtrængelig for Varmen, saa vil den tabe meget nær den samme Varmemængde til Omgivelserne som før. Betegnes denne Forlængelse ved ε, saa er altsaa $\varepsilon = \frac{1}{4}d = 0{,}375$, idet $d = 1{,}5$ cm for alle Stængerne. Vi kunne følgelig sætte:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{for} \quad x = -\varepsilon,$$

naar Koordinatens Begyndelsespunkt lægges i den virkelige Stangs Endeflade.

Af Ligning (15) erholdes nu:

$$\frac{du}{dx} = al'\int_{-\varepsilon}^{x} u^{\frac{5}{4}}dx,$$

og dernæst:

$$\int_{2n-1}^{2n+1}\frac{du}{dx}dx = u_{2n+1} - u_{2n-1} = al'\left[2\int_{-\varepsilon}^{2n+1}u^{\frac{5}{4}}dx + \int_{2n-1}^{2n+1}u^{\frac{5}{4}}(2n-1-x)\,dx\right].$$

Forandres de sidste Integrationer til Summationer, vil man erholde med stor Tilnærmelse:

$$u_{2n+1} - u_{2n-1} = 4al'\left[s_{2n-1} + \tfrac{1}{12}\left(u_{2n+1}^{\frac{5}{4}} - u_{2n-1}^{\frac{5}{4}}\right)\right],$$

idet $\quad s_{2n-1} = s_1 + u_3^{\frac{5}{4}} + u_5^{\frac{5}{4}} + \ldots u_{2n-1}^{\frac{5}{4}}, \quad s_1 = (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)u_1^{\frac{5}{4}}.$

Sættes efterhaanden $n = 1, 2, \ldots m$, vil heraf ved Summation erholdes:

$$u_{2m+1} - u_1 = 4al'S_{2m-1},$$

idet $\quad S_{2m-1} = s_1 + s_3 + \ldots + s_{2m-1} + \tfrac{1}{12}\left(u_{2m+1}^{\frac{5}{4}} - u_1^{\frac{5}{4}}\right).$

Jeg skal i det følgende angive de i Forsøgene iagttagne Størrelser og tillige under de første med Blystangen anstillede Forsøg som Exempel vise, hvorledes Beregningen er udført.

Bly. Lokalets Temperatur $\vartheta = 3{,}1°$ C.

Modstanden i Maaletraadens Strømkreds $W = 112$ S. E.

Stangens Længde $L = 23{,}7^{cm}$.

1. Opvarmningsforsøget ved stationær Temperaturtilstand gav følgende til $u_1, u_3, \ldots$ svarende Temperaturer:

$$u = 315,\ 324,\ 340,\ 364,\ 399,\ 439,\ 489,\ 558^{mm}.$$

Beregningen heraf udføres efter følgende Skema:

	u	$u^{\frac{5}{4}}$	s	S	$4al'$
1	315	1327	1576	1580	0,0057
3	324	1375	2951	4538	0,0055
5	340	1460	4411	8960	0,0055
7	364	1590	6001	14977	0,0056
9	399	1783	7784	22780	0,00544
11	439	2009	9793	32597	0,00534
13	489	2300	12093	44724	0,00543
15	558	2712			
	708			130156	0,005440

Den første Vertikalrække angiver det iagttagne Huls Afstand i Centimeter fra Stangens Ende. De følgende Rækker give $u_1, u_3, \ldots, u_1^{\frac{5}{4}}, u_3^{\frac{5}{4}}, \ldots$, o. s. v., og den sidste Række indeholder Kvotienterne $\frac{u_3 - u_1}{S_1}$, $\frac{u_5 - u_1}{S_3}$, o. s. v., som angive de til de efter hinanden iagttagne Temperaturer $u_3, u_5, \ldots$ svarende Værdier af $4al'$. Den endelige Værdi af denne Størrelse er bestemt ved Kvotienten

$$\frac{u_1 + u_3 + \ldots + u_{15} - 8u_1}{S_1 + S_3 + \ldots S_{13}} = \frac{708}{130156} = 0{,}005440 = 4al'.$$

2. Ved det umiddelbart derefter anstillede Afkølingsforsøg fandtes for

$$u = 600,\ 500,\ 400,\ 300^{mm}$$
$$t = 0,\ 114,\ 264,\ 463 \text{ Sek.}$$
$$t\,(\text{ber.}) = 0,\ 114,\ 261,\ 463\ —$$

Beregningen af t er udført ved Hjælp af Ligning (14), idet $l = 0{,}0003304$. Hertil svarer $l' = 0{,}0003203$, altsaa er $4a = \frac{0{,}005440}{0{,}0003203} = 16{,}98$ ved omtrent 10° C.

De efter den første Methode anstillede Forsøg havde givet $4a = 16{,}84$ ved 19° C.

Messing (rød). $\vartheta = 2{,}2°$, $W = 62$ S. E., $L = 23{,}8$.

1. u = 366, 372, 378, 386, 400, 419, 438, 461^{mm},

hvoraf $4al'$ = 0,001974.

2. u = 600, 500, 400, 300^{mm},
t = 0, 237, 549, 971 Sek.,
t (ber.) = 0, 239, 547, 970 — ,
l = 0,0001576, l' = 0,0001528,
$4a$ = 12,92 ved 16° (tidligere Forsøg 12,05 ved 21°).

Nysølv. $\vartheta = 2{,}9°$, $W = 62$ S. E., $L = 23{,}8$.

1. u = 361, 377, 396, 434, 488, 545, 635^{mm},

hvoraf $4al'$ = 0,006836.

2. u = 600, 500, 400, 300^{mm},
t = 0, 237, 539, 955 Sek.,
t (ber.) = 0, 236, 539, 956 — ,
l = 0,0001600, l' = 0,0001551,
$4a$ = 44,07 ved 17° (tidligere Forsøg 42,80 ved 19°).

Kadmium. $\vartheta = 3{,}4°$, $W = 62$ S. E., $L = 23{,}8$.

1. u = 368, 372, 380, 392, 409, 429, 454,

hvoraf $4al'$ = 0,002272.

2. u = 600, 500, 400, 350, 300, 250, 200,
t = 0, 138, 326, 439, 578, 743, 961,
t (ber.) = 0, 142, 325, 439, 576, 745, 962,
l = 0,0002656, l' = 0,0002575,
$4a$ = 8,82 ved 17° (tidligere Forsøg 8,927 ved 24°).

Kobber. $\vartheta = 4{,}3°$, $W = 62$ S. E., $L = 23{,}8$.

1. u = 331, 331, 333, 337, 342, 347, 352, 359,

hvoraf $4al'$ = 0,000656.

2. u = 600, 500, 400, 350, 300, 250,
t = 0, 251, 592, 805, 1047, 1358,
t (ber.) = 0, 259, 592, 801, 1050, 1358,
l = 0,0001456, l' = 0,0001412,
$4a$ = 4,65 ved 16° (tidligere Forsøg 4,43 ved 19°).

Messing (gul). $\vartheta = 3{,}2°$, $W = 62$ S. E., $L = 25{,}2$.

1. $u = 341, 345, 353, 365, 380, 400, 424, 450,$

hvoraf $4al' = 0{,}002420.$

2. $u = 600, 500, 400, 300,$

$t = 0, 237, 538, 962,$

t (ber.) $= 0, 236, 539, 956,$

$l = 0{,}0001600, \quad l' = 0{,}0001553,$

$4a = 15{,}58$ ved 17° (tidligere Forsøg 13,73 ved 20°).

Vismuth. $\vartheta = 1{,}6°$, $W = 112$ S. E., $L = 21{,}4$.

1. $u = 127, 138, 163, 202, 255, 329, 439,$

hvoraf $4al' = 0{,}02323.$

2. $u = 500, 400, 300, 250, 200,$

$t = 0, 130, 317, 442, 601,$

t (ber.) $= 0, 134, 318, 442, 601,$

$l = 0{,}0003624, \quad l' = 0{,}0003501.$

$4a = 66{,}35$ ved 7° (tidligere Forsøg 69,10 ved 0°).

Jern. $\vartheta = 4°$, $W = 62$ S. E., $L = 23{,}7$.

1. $u = 348, 354, 364, 378, 396$[1]), $418, 444{,}5$[1]), $476,$

hvoraf $4al' = 0{,}002793.$

2. $u = 450, 400, 350, 297,$

$t = 0, 184, 409, 677,$

t (ber.) $= 0, 185, 402, 678,$

$l = 0{,}0001400, \quad l' = 0{,}0001357,$

$4a = 20{,}58$ ved 18° (tidligere Forsøg 20,24 ved 19°).

Af de ved Afkølingsforsøgene for de forskjellige Stænger fundne Værdier for l' erholdes ved Multiplikation med $\frac{d}{4} c\delta$, hvor d er Stangens Diameter, c dens Varmefylde, δ dens Vægtfylde, den til $u = 1$ svarende Varmemængde, som afgives i Sekundet fra hver Kvadratcentimeter af Stangens Overflade. Er Legemets Temperatur 1° C. over Omgivelserne, bliver denne Varmemængde lig $l' . \frac{d}{4} c\delta . 57{,}7^{\frac{1}{4}}$ for $W = 112$ S. E. og $l' . \frac{d}{4} c\delta . 31{,}94^{\frac{1}{4}}$ for $W = 62$ S. E.

De paa denne Maade beregnede Koefficienter for det ydre Varmetab ere for de forskjellige forniklede Metaller, ordnede efter Størrelsen, følgende:

---

[1]) Disse to Temperaturer ere paa Grund af de to Hullers Tilstopning ikke iagttagne, men beregnede ved Interpolation.

Bly	0,000114,	Vismuth	0,000106,
Kadmium . . .	0,000111,	Messing (rødt)	0,000103,
Aluminium . . .	0,000109,	Messing (gult)	0,000100,
Tin	0,000109,	Kobber	0,000100,
Nysølv	0,000107,	Jern	0,000099.

Overensstemmelsen mellem disse Tal maa betragtes som tilfredsstillende, da dels Afkølingsforsøgene ikke bleve anstillede under ganske identiske ydre Betingelser, dels selve de forniklede Overflader ikke vare aldeles ens. Saaledes havde Blystangen øjensynlig den sletteste Politur. Navnlig fremgaar heraf, at Koefficienterne ikke ordne sig efter Stængernes Afkjølingshastigheder, idet f. Ex. Vismuthstangen, som er den af alle Stængerne, der afkøler sig hurtigst, her kommer midt i Rækken, og det stadfæster sig altsaa ogsaa ved disse Forsøg, at Afkjølingshastigheden selv ikke udøver nogen kjendelig Indflydelse paa den ydre Varmeledning.

Med Hensyn til Bestemmelserne af a og derigjennem af Metallernes Varmeledningsevne, betragter jeg Overensstemmelsen med de tidligere Forsøg som tilfredsstillende for alle Stængerne med Undtagelse af den ene Messingstang. Jeg betragter imidlertid min første Forsøgsmethode som den nøjagtigste for alle Stængerne med Undtagelse af Vismuthstangen, for hvilken de fundne Resultater udkrævede en Korrektion, som ifølge Beregningen skulde gjøre a omtrent 10 Procent mindre. Da de sidste Forsøg imidlertid kun give en omtrent 4 Procent lavere Værdi, anser jeg det for rigtigst ikke at gjøre Korrektionen større.

Nedenstaaende Tabel indeholder de efter den første Methode fundne Ledningsevner for Varme og Elektricitet ved 0° og ved 100°, dog for Vismuths Vedkommende med en Forøgelse af Varmeledningsevnen af 4 Procent.

	k_0	k_{100}	$\varkappa_0 . 10^5$	$\varkappa_{100} . 10^5$	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$	$\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0}$
Kobber	0,7198	0,7226	45,74	33,82	1574	1,358
Magnium	0,3760	0,3760	24,47	17,50	1537	1,398
Aluminium	0,3435	0,3619	22,46	17,31	1529	1,367
Messing (rødt) . . .	0,2460	0,2827	15,75	13,31	1562	1,360
Kadmium	0,2200	0,2045	14,41	10,18	1527	1,315
Messing (gult) . . .	0,2041	0,2540	12,62	11,00	1617	1,428
Jern	0,1665	0,1627	10,37	6,628	1605	1,530
Tin	0,1528	0,1423	9,346	6,524	1635	1,334
Bly	0,0836	0,0764	5,141	3,602	1627	1,304
Nysølv	0,0700	0,0887	3,766	3,632	1858	1,314
Antimon	0,0442	0,0396	2,199	1,522	2011	1,294
Vismuth	0,0177	0,0164	0,929	0,630	1900	1,372

Sammenholdes disse Resultater med andre Iagttageres Bestemmelser af Metallernes Varmeledningsevne i absolut Maal, vil man finde meget store Uoverensstemmelser. Skarpest træde disse netop frem ved Sammenligningen med de nyere Maalinger af Tait (Trans. Roy. Soc. of Edinb. 1878, p. 717) og af H. F. Weber (Monatsber. der Acad. Berlin 1880, p. 457), som begge ligeledes have bestemt Ledningsevnen for Elektricitet. Saaledes finder f. Ex. Weber Forholdet mellem Ledningsevnen for Varme og for Elektricitet ved 0° lig 2007 for Kobber og 1288 for Vismuth, medens jeg for Kobber har fundet 1574 (efter den anden Forsøgsrække 1500) og for Vismuth 1900. Da imidlertid begge disse Iagttagere have betegnet deres Meddelelser som kun foreløbige, skal jeg ikke her gaa ind paa en nærmere Undersøgelse af Grunden til disse Uoverensstemmelser.

Af ovenstaaende Tabel fremgaar:

1° en Stadfæstelse af Wiedemanns og Franz's Lov for de bedre ledende Metallers Vedkommende, idet Forholdet imellem Ledningsevnen for Varme og for Elektricitet er meget nær konstant for disse saavel ved 0° som ved 100°. For de slettere Ledere derimod voxer dette Forhold stærkt, naar Ledningsevnen aftager, saaledes at der paa denne Maade ligesom indledes Overgangen til de ikke metalliske Legemer, hvor som bekjendt Ledningsevnen for Varmen langt fra aftager saa stærkt som Ledningsevnen for Elektricitet. Grunden hertil kan ligge i disses større Gjennemstraalelighed og større Udstraalingsevne, og med Hensyn til det sidste Punkt er det værd at bemærke, at netop ogsaa Antimon og Vismuth udmærke sig ved en paafaldende stor Udstraalingsevne. Iøvrigt er det ogsaa muligt, at de stærkt fremtrædende thermoelektriske Kræfter hos Nysølv, Antimon og Vismuth kunne være medvirkende til en lettere Forplantning af Varmen.

2° Forholdet $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0}$ er for alle Metallerne, med Undtagelse af Jern, saa godt som ens og meget nær lig med Forholdet mellem de til 100° og 0° svarende absolute Temperaturer (1,367). Man vil altsaa for Ledningsevnerne k og $\varkappa$ ved den absolute Temperatur T have:

$$\frac{k}{\varkappa} = T \times \text{Konstant.}$$

Denne Lov synes endogsaa at være mere almindelig gjældende end den foregaaende, idet ogsaa Nysølv, Antimon og Vismuth i denne Henseende forholde sig som de øvrige Metaller. Meget paafaldende er den stærke Stigning af Varmeledningsevnen med Temperaturen hos Legeringerne Messing og Nysølv, medens Ledningsevnen for Elektricitet ligeledes forandrer sig ganske uregelmæssig, idet den aftager langt mindre end hos alle de andre Metaller. I en svagere Grad gjælder det samme for Aluminium.

Jeg havde allerede i 1872 i Vidensk. Selsk. Oversigter («Bestemmelse af Varmegrader i absolut Maal») udtalt som en Formodning, at «Forholdet imellem et rent Metals

Ledningsevne for Varme og Elektricitet er proportionalt med Temperaturen, regnet fra det absolute Nulpunkt». Denne Formodnings Rigtighed har saaledes bekræftet sig, og Forsøgene have vist, at Loven ogsaa lader sig udstrække til Legeringer. Med Hensyn til de videre Følgeslutninger kan jeg henvise til samme Afhandling, kun maa bemærkes, at det af de dengang bekjendte Iagttagelser bestemte Tal for Forholdet imellem de to Ledningsevner var meget for stort.

Det vilde maaske nu ikke være uden Interesse at forsøge paa at gaa et Skridt videre i theoretisk Retning.

Man tænke sig følgende Forsøg anstillet. En Metaltraad skjæres i en Mængde smaa Stykker af Længden l, en anden Metaltraad skjæres ligeledes i Stykker af en anden Længde l'. Disse Stykker loddes afvexlende sammen, og den saaledes dannede Traad indskydes i en elektrisk Strømkreds. Ved Strømmen vil der nu opstaa dels en Varmeudvikling i hele Traaden, dels ligeledes en Varmeudvikling i den ene Halvdel af Loddestederne og en Varmeabsorbtion i den anden Halvdel. De endelige stationære Temperaturer i Loddestederne være T_0 i de første og T_0' i de andre.

I Loddestederne ere tillige thermoelektromotoriske Kræfter tilstede, som ifølge den mekaniske Varmetheori kunne udtrykkes nøjagtig ved $-ET_0$ og $+ET_0'$, idet E er en Konstant, naar det for begge Metallerne forudsættes, at der ikke finder nogen thermoelektrisk Forskjel Sted imellem to ulige opvarmede Steder af det samme Metal. Ved den elektriske Strøms Gjennemgang gjennem to paafølgende Loddesteder vil altsaa det elektriske Potential blive formindsket med $E(T_0-T_0')$. Desuden vil selve Ledningsmodstanden i Traadstykket formindske Potentialet, men Traadstykkerne kunne antages saa korte, at dette Tab bliver forsvindende lille.

Under den samme Forudsætning ville ogsaa Temperaturerne T og T' i et Punkt i et af Stykkerne l og l' kunne udtrykkes ved

$$T = T_0 + ax + bx^2\,, \quad T' = T_0' + a'x + b'x^2\,,$$

idet x regnes fra det nærmest til venstre liggende Loddested i det betragtede Stykke. Imellem disse Konstanter ere Relationerne

$$T_0' = T_0 + al + bl^2\,, \quad T_0 = T_0' + a'l' + b'l'^2\,,$$

da det ene Traadstykkes Endepunkt maa have samme Temperatur som det andets Begyndelsespunkt.

Tillige maa Loddestederne selv afgive lige saa megen Varme, som de modtage. Loddestederne modtage ifølge den mekaniske Varmetheori ved Strømmens Gjennemgang Varmemængderne $AiET_0$ og $-AiET_0'$, naar A er Arbejdsenhedens Varmeækvivalent og i Strømstyrken. Ere endvidere k og k' de to Traadstykkers Varmeledningsevner, q begge Traadstykkernes Gjennemsnit, saa vil man altsaa have

$$AiET_0 = -kq\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} + k'q\left[\frac{dT'}{dx}\right]_{x=l'},$$

$$-AiET_0' = -k'q\left[\frac{dT'}{dx}\right]_{x=0} + kq\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=l}.$$

Ved Subtraktion af disse to Ligninger og Indsættelse af de ovenfor angivne Værdier for T og T' erholdes efter Elimination af Konstanterne a, b, a', b'

$$AiE(T_0 + T_0') = 2q(T_0 - T_0')\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right).$$

Det ved Strømmens Gjennemgang gjennem to paafølgende Loddesteder lidte Potentialtab vil altsaa være

$$E(T_0 - T_0') = AiE^2 \frac{\overline{T}}{q\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right)},$$

idet $\overline{T} = \frac{T_0 + T_0'}{2}$ er Loddestedernes Middeltemperatur.

Det ses heraf, at de thermoelektriske Kræfter alene frembringe en Modstand, som følger de sædvanlige Love for den elekriske Ledningsmodstand, idet nemlig en saadan vilde frembringe Potentialtabet $i\frac{l+l'}{q\bar{\varkappa}}$, naar ved $\bar{\varkappa}$ betegnes hele Traadens tilsyneladende elektriske Ledningsevne. Traaden vil altsaa i vort Forsøg forholde sig, som om den havde Ledningsevnen

$$\bar{\varkappa} = \frac{\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right)(l+l')}{AE^2\overline{T}}.$$

Vi ville endvidere tænke os, at den samme Traad, uden at være gjennemstrømmet af en elektrisk Strøm, bliver opvarmet i den ene Ende og afkølet i den anden, medens den iøvrigt er omgiven af fuldkomne Varmeisolatorer. Man vil da have, naar Temperaturerne i tre paa hinanden følgende Loddesteder ere T_0, T_1, T_2,

$$k\frac{T_0 - T_1}{l} = k'\frac{T_1 - T_2}{l'} = \bar{k}\frac{T_0 - T_2}{l+l'},$$

idet vi ved k betegne den Varmeledningsevne, man maatte tillægge Traaden, hvis man betragtede den som en ensartet Ledning. Heraf følger

$$\bar{k} = \frac{l+l'}{\frac{l}{k} + \frac{l'}{k'}} \quad \text{og} \quad \frac{\bar{k}}{\bar{\varkappa}} = \frac{AE^2\overline{T}}{\left(\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}\right)\left(\frac{l}{k} + \frac{l'}{k'}\right)}.$$

Den sidste Ligning angiver saaledes Forholdet imellem den betragtede Traads af Forsøgene fremgaaede tilsyneladende Ledningsevner for Varme og for Elektricitet.

Ethvert Legeme er i sit Indre diskontinuert. Der ere indre Grænseflader tilstede, i hvilke man tillige maa antage Tilstedeværelsen af thermoelektriske Kræfter eller, efter en nyere Betragtningsmaade, af elektriske Dobbeltlag. En elektrisk Strøm vil saaledes ved en

Gjennemgang gjennem et Legeme frembringe de samme Virkninger, som i det ovenfor beskrevne, tænkte Forsøg. Ligesom her vil en egentlig elektrisk Ledningsmodstand ikke komme til at spille nogen Rolle i Sammenligning med den Modstand, som fremkommer ved Gjennemgangen gjennem de elektriske Dobbeltlag, og der vil saaledes egentlig ikke blive nogen Grund til at antage, at nogen anden Modstand overhovedet existerer. Elektriciteten vil altsaa bevæge sit frit, uden Potentialforandring langs ad et Dobbeltlag, og der vil først fremkomme en Forandring i det elektriske Potential, naar Elektriciteten passerer igjennem et Dobbeltlag.

Der vil fremdeles heller ikke være nogen Grund til at antage en egentlig Varmeledning, da alle Temperaturforskjelligheder maa udjevne sig ved lokale elektriske Strømme. Ligesom Varmen som Straalevarme forplanter sig ved lokale, alternerende Strømme af samme Art som de Strømme, der fremkomme ved Udladningen af en Leydnerflaske igjennem en Metaltraad, saaledes forplanter Varmen sig ved Ledning ved lokale Strømme af samme Art som de Strømme, der fremkomme ved Udladningen af et galvanisk Batteri.

Vi tænke os nu en Linie lagt igjennem et Legeme, og at denne Linie skjærer tre paa hinanden følgende Dobbeltlag. Skjæringspunkterne være A, B, C, Afstanden imellem A og B være l, imellem B og C være l', Temperaturerne i A og C være T_0', i B T_0. Paa Grund af Temperaturforskjellen vil der fremkomme lokale Kredsløb af elektriske Strømme, som sandsynligvis i Gjennemsnit ville føre en lige saa stor Varmemængde fra B til A som fra B til C. Betragtes nu denne Overføring af Varme som fremkommen ved Varmeledning, og kaldes Ledningsevnen imellem A og B k, imellem B og C k', vil man have de fra B til A og til C overførte Varmemængder proportionale med $k\frac{T_0 - T_0'}{l}$ og med $k'\frac{T_0 - T_0'}{l'}$. Ere nu ifølge ovenstaaende Betragtning disse Varmemængder lige store, saa er

$$\frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}.$$

Herved gaar det ovenfor fundne Udtryk for Forholdet imellem Ledningsevnen for Varme og for Elektricitet, naar dette Udtryk overføres paa det betragtede Legeme, over til

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\varkappa}} = A\left(\frac{E}{2}\right)^2 \bar{T}.$$

Dette Forhold bliver saaledes proportionalt med Legemets absolute Temperatur, hvilket er i Overensstemmelse med Forsøgsresultaterne. Disse have tillige vist, at Forholdet er det samme for alle bedre ledende Metaller, hvoraf følger, at E har den samme Værdi for alle disse Metaller. Den numeriske Beregning giver $E = 30400$. Potentialforskjellen ET, som vi ville kalde den molekulære Potentialforskjel, bliver f. Ex. herefter omtrent 23 Gange større end den, som fremkommer ved Berøringen imellem Kobber og Nysølv.

Da den molekulære Potentialforskjel viser sig ens for forskjellige Legemer og pro-

proportional med den absolute Temperatur, ligger det nær at betragte denne Potentialforskjel som identisk med den absolute Temperatur. Man vil saaledes erholde et absolut Maal for Varmegrader, og 1 Centigrad vil blive lig 30400 absolute Enheder.

Jeg har i min ovenfor citerede Afhandling gjort opmærksom paa, at den ved en given Potentialforskjel $P_1 - P_0$ frembragte elektriske Strøm kun vil være i Stand til at frembringe en vis Temperaturforøgelse. Er Legemets Temperatur T_0, og er T_1 den højeste Varmegrad, hvortil Strømmen kan opvarme Legemet, saa vil man, naar det ovenfor foreslaaede absolute Maal for Varmegraden indføres, have $P_1 - P_0 = T_1 - T_0$. Opfattes altsaa Temperaturen som en molekulær Potentialforskjel, saa vil man kunne sige, at et Legeme, som gjennemstrømmes af en elektrisk Strøm, ikke vil kunne opnaa en større molekulær Potentialforskjel ved Strømmen end den, der forud fandtes, plus den numeriske Værdi af den største elektriske Potentialforskjel imellem to Punkter af Legemets Overflade.

Sættes et Daniell's Elements elektromotoriske Kraft lig $11 \cdot 10^7$ absolute Enheder, saa vil den største Opvarmning, det kan frembringe, ligeledes være $11 \cdot 10^7$ absolute Enheder eller $\frac{11 \cdot 10^7}{30400} = 3600$ Centigrader. I min tidligere Afhandling havde jeg paa Grund af de forhaanden værende mangelfulde Iagttagelsesdata fundet det lavere Tal 2780 Centigrader. Ligeledes maa nu Opfattelsen af den Forbindelse, som jeg dengang troede at finde imellem Lovene for Elektrolysen, Varmefylden og Varme- og Elektricitetsledningen, af samme Grund blive at modificere. Den faktiske Forbindelse imellem disse Love er følgende:

Ved Elektricitetsenhedens Gjennemgang gjennem en binær Forbindelse udskilles $\frac{N}{9600}$ Gram Metal, naar N betegner Metallets Atomtal. Til at opvarme N Gram Metal 1° C. udkræves omtrent 6,4 Varmeenheder eller $6{,}4 \cdot 42 \cdot 10^6$ Energienheder, og til at opvarme den samme Vægt en, efter den ovenfor givne Definition, absolut Grad udkræves $\frac{6{,}4 \cdot 42 \cdot 10^6}{30400} = 8800$ absolute Energienheder. Den ved Elektricitetsenheden udskilte Mængde af Metal vil altsaa udkræve $1\frac{1}{2}$ Energienhed for at opvarmes 1 absolut Grad, medens Elektricitetsenheden selv vilde udkræve 1 Energienhed til Forøgelsen af dens Potential med en Enhed.

Jeg skal sluttelig kun henlede Opmærksomheden paa, at den ovenfor udviklede Opfattelse af den elektriske Ledningsmodstands Natur, ifølge hvilken elektriske Strømme kunne vedblive at bestaa indenfor begrænsede Kredse uden Modstand og som Følge deraf uden Energiomsætning, staar i nøje Forbindelse med vor Theori om Magnetismen og Diamagnetismen, ja danner det nødvendige Grundlag for den.

Saadanne elektriske Strømme repræsentere en vis kinetisk elektrisk Energi. Betragte vi f. Ex. en sluttet lineær, uendelig god Leder, hvis Induktionskonstant er C, og nærmes til denne Leder en Magnetpol med Magnetismen m, saa vil man have

$$C\frac{di}{dt} + m\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

naar i er den inducerede Strømstyrke og ω Rumvinklen for en Kegle, hvis Spids er i Magnetpolen, og hvis Flade omhyller Strømlederen. Naar der altsaa oprindelig ingen Strøm var tilstede i Strømlederen, saaledes at til $\omega = 0$ svarer $i = 0$, saa er $Ci + m\omega = 0$.

Det ved Bevægelsen udførte Arbejde er

$$\int_0^{\omega} mid\omega = \tfrac{1}{2}Ci^2,$$

hvorved altsaa den af Strømmen repræsenterede Energi i denne Leder er bestemt.

Betragte vi et Legeme med uendelig god Ledningsevne, viser Beregningen, at der ikke ved ydre elektromotoriske Kræfter kan frembringes nogen Strøm i Legemets Indre, men kun i dets Overflade. Ledningen i det Indre kommer saaledes slet ikke til at spille nogen Rolle, og de elektriske Strømme blive ligesom den statiske Elektricitet kun Overflade- eller Grænsefladefænomener. Nærmes en Magnet til et saadant Legeme, vil der fremkomme vedvarende elektriske Strømme i Overfladen, og det vil forholde sig som et diamagnetisk Legeme. Har f. Ex. Legemet Form af en Kugle med Radius r, og er en Magnetpol med Magnetismen m bragt i Afstanden a fra Kuglens Centrum, saa vil efter min Beregning det magnetiske Moment M af de fremkomne elektriske Strømme være bestemt ved $M = \frac{mr^3}{2a^2}$ og den af disse Strømme repræsenterede Energi ved $\frac{M^2}{r^3}$.

Som Resultat af hele denne theoretiske Udvikling fremgaar, at vi sandsynligvis i et Legemes Indre ville finde foruden Massebevægelser elektriske Dobbeltlag med en med den absolute Temperatur proportional Potentialforskjel og elektriske Strømme som forskjellige Former for Energien.

Familien Podostemaceae.

Studier

af

Dr. **Eug. Warming.**

II. Afhandling.

II. Vegetationsorganerne hos *Castelnavia princeps* Tul. et Wedd.
III. Vegetationsorganerne hos *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul., og *Dicræa algæformis* Beddome.
IV. Fruktifikationsorganerne hos *Podostemon Ceratophyllum* Michx., *Mniopsis Weddelliana* Tul. og *Glaziovana* Warming, *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul. og *algæformis* Bedd., og *Castelnavia princeps* Tul. et Wedd.

Med 9 Tavler.

Avec un résumé et une explication des planches en français.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 3.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1882.

II.

Vegetationsorganerne hos *Castelnavia princeps* Tul. et Wedd.[1])

Denne Art har hidtil kun været højst ufuldkomment kjendt. Det Exemplar, som findes afbildet hos Tulasne (Monographia Podost., tab. XI, fig. 1), gjengiver næsten samme Udviklingsstadium som min Fig. 4, Tav. XIII, nemlig den afblomstrede og visnende, hvide, frugtbærende Plante, og at Tulasne ikke har kjendt den i anden Skikkelse fremgaar af hans Ord (l. c. pag. 164): «Frons simul caulis et foliorum vices gerens saxis obrepit, circiter 3 mm. in crassitudinem obtinet, sed in ambitu sterili maxime tenuatur et late membraniformis evadit; paulo supra basim in lobos 2 æquales scinditur qui 4—6 centim. singulatim longi retrorsum incurvantur et ipsi in segmenta plura abbreviata dichotome discedunt. Frondis hujus in superficie nudæ et inæqualis contextus totus mere utricularis est; ejusdem penetralia loculis ovatis obliquis oreque integro donatis excavantur, in quibus aptatis flores fovent, deinque fructus absconditos sed tumentes cohibent. Flores hoc modo in ipso frondis sinu, sicut sporangium in *Riccia*, solitarii gignuntur ....» og hos Weddell i De Candolles Prodromus, XVII, 1873, p. 80, tales ligeledes om «frons dichotome divisa, fastigiatim expansa, foliis genuinis omnino ut videtur destituta».

Af dette fremgaar, at Plantens vegetative Dele hidtil have været opfattede som et løvlignende, til Substratet tæt trykket Legeme, der er mere eller mindre tydelig dikotomisk delt, og i hvilket Blomsterne ere nedsænkede. Jeg blev derfor ikke lidet forbavset, da jeg først fra Stockholm fik Materiale i Spiritus, samlet ved Caldas af Hjalmar Mosén, og senere fik et særdeles rigeligt og udmærket Materiale i Spiritus fra den bekjendte svenske Læge og Botaniker, Dr. A. F. Regnell i Caldas[2]), der viste, at Planten i sin fyldigst ud-

[1]) 1ste Afhandling findes i Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, II, 1, og omhandler: I. Vegetationsorganerne hos *Podostemon Ceratophyllum* Michx., *Mniopsis Weddelliana* Tul. og *Mniopsis Glazioviana* Warmg.

[2]) Alt mit Spiritus-Materiale er saaledes fra Caldas i den brasilianske Provins Minas geraës. Dr. Regnells er mærket III, 2053.

viklede Form har lange, elegante, særdeles fint delte Blade, saaledes som fremstillet paa min Fig. 1 og 2, Tav. XIII. Jeg bringer herved min hjærteligste Tak saavel til Dr. Regnell som til Prof. Wittrock, der godhedsfuldt laante mig Riksmuseets Materiale til Undersøgelse.

Dr. Regnell ledsagede sin Sending med et Brev, dat. Cidade de Caldas d. 15. Mai 1881, af hvilket jeg aftrykker følgende, som giver en udmærket Forestilling om Plantens hele Levevis, og som tillige viser, med hvilken Omhu og Intelligens han har indsamlet Materialet.

«Fyndorten för dem var en bergshäll med omkring 45° stupning ned i en liten «bassin» fylld ständigt med sakta flytande vatten från vid ena änden befintlig vildfors och vattenfall. Den 21 Februari var denna bergshäll i vattenkanten och så långt ned skönjas kunde tätt besatt med plantor i den utveckling, röret no. 1 visar: långa stjelkar och de fint fördelade bladen nående vattnets yta, bildade en vacker mörkgrön garnering af bassinen åt denna sida (se Fig. 1, Tav. XIII). Från andra sidan, der vattnet flöt ut ur bassinen liksom öfver ett dammbord, och der bassinen tycktes vara djup, fanns intet. — Den 28 Mars gjordes en excursion till dylik forss och vattenfall i Rio verde, der *Castelnavia* återfanns ännu med långa stjelkar och fina blad, men nu med stjelkarna vid basen mycket uppsvulnade (se Fig. 2 og 3 A—D) och med en mängd röda punkter eller knölar på undre sidan, hvilka befunnos innehålla könsorganer med 2 ståndarknappar, hvilkas färg syntes genom den tunna epidermis af stjelken.

Den 24 och 28 April fanns å förstnämda fyndorten, ribeirão dos Bugres, blott en mängd stumpar af stjelkarne sticka öfver vattenytan (påminnande om stubb på et afmejadt sädesfält) vid basen försedde med många flera röda punkter, nu bildande knölar isynnerhet på den till en frons utvecklade vid klippan starkt vidfästa delen. Mellan dessa, och der vattnet var ännu mera grundt, fanns andra med en och annan stump af gamla (ursprungliga) bladstjelkar och på den mycket mer utbredda frons, i kanten af densamma, fransar (nybildningar af stjelkar och blad?), och mellan dessa ännu andra med mycket mer förgrenad (klynnedelt) frons utan tecken till blad eller fransar; blomknölarne många fler och mer utvecklade, men könsorgan ännu inneslutna. Uti vattenkanten och dels utom den samma, der klippan blott då och då fuktades, funnos först former med utsluppna könsorganer (se Fig. 15, Tav. XIII); de långa stigmata stucko nu fram som ett par horn och äfven ståndarsträngarne tycktes tilltagit mycket i längd; exemplar med knapparna uppsluppna funnos på det nära nog torra; frons af dessa former grönbrun (ungefär som *Fusus vesiculosus*), kunde sällan fås hel och hållen från klippan, och segmenter voro så talrika och tätt intill hvarandra packade, att något centrum af frons sällan kunde finnas. Att nu vilja draga den slutsatsen, det dessa små former uppkommit ur den ursprungliga (af d. 21 Febr. och 28 Mars), är väl kanske något förhastadt; jag har blott velat

visa, huru de förekommit efter hvarandra, allt efter som vattnet sjunkit undan, som mig tyckes. . . . . De af 3 Maj funnos i en annan «remanso» än den ofvanför först beskrifna, men i samma ribeirão dos Bugres, med djupare vatten och mera lugn yta, hvilken spetsarne af bladen nådde. Syntes mig märkelig genom finare stjelkar och blad och särdeles deri, att den befanns i samma utvecklingsgrad som de et par månader tidigare tagna.» —

Saa vidt Dr. Regnell. Sammenfatter jeg hans værdifulde Iagttagelser med mine egne Undersøgelser af de tilsendte Planter, kunne Resultaterne i al Korthed udtrykkes saaledes. *Castelnavia princeps* har en kort, bred, kjødfuld, dorsiventral Stængel (hvis Forgrening og Bladstilling nedenfor skal forklares), der som ganske ung bærer langstilkede, særdeles fint delte, indtil 15 Cm. lange Blade (Fig. 1, 2), hvis Basaldele voxe sammen indbyrdes og med Stænglen, hvorved den nedre løvlignende Del af Planten fremkommer. Under sin senere Udvikling bliver Stænglen større, bredere (Fig. 3), og nye Blade komme til; Stænglerne hæfte sig med Hapterer (Fig. 6, 7) fastere og fastere til Underlaget, og medens de unge Stængler dannede en spids Vinkel med dette (se Fig. 7), ligge de ældre fladt ud over det; medens de unge Skud have en mere eller mindre hul Rygside, blive de ældre ofte ganske fladt udbredte og faa derved endnu mere Lighed med et Likenthallus. Blomsterne skjules paa en særdeles mærkværdig Maade inde i det løvlignende, som anført af Stænglen og de sammensmæltende Blades Basaldele dannede, Legeme og fremkalde Opsvulmninger paa dette; de skimtes som smaa røde Knuder i dets Indre. Exemplarer, som voxe paa dybt og roligt Vand, synes længe at kunne bevare deres fint delte Blade og blomstre vist ogsaa under Vandet. Men de Exemplarer, som voxe i stærkere bevæget Vand, især nær Bredden, slides saa stærkt af Vandet, at der snart ikkun er Stumper af Bladstilkene tilbage (Fig. 15). Paa Randene af saadanne af Bølgerne og Strømmene ødelagte «Løv» kan man finde ganske unge Blade, som fine Frynser, siddende mellem Resterne af de gamle. Gjennem Overfladen af det af Stænglerne og sammenvoxede Bladrester dannede, nu ganske løvlignende, til Klipperne tiltrykte Legeme, der, efterhaanden som Vandstanden hen i Tørtiden (omtrent fra April af) bliver lavere, ere komne til at ligge mere udsatte for Lysets og Luftens Paavirkning, bryde Blomsterne nu frem og udfolde Ar og Støvknapper (XIII, 15). Senere hen, naar Vandet i Tørtiden er faldet endnu mere, afbleges og indtørre de tiloversblevne løvlignende og nu frugtbærende Vegetationsorganer ganske, udsatte for den tropiske Sols Hede paa de tørlagte Klipper, og frembyde da det Udseende som paa XIII, 4. I den udtørrede og paa Grund af de luftfyldte Cellerum hvide Masses mange Blomsterhulheder ses nu glinsende kastaniebrune Kapsler eller Kapselklapper nedsænkede; disse udtørrede Stængel- og Bladdele vise sig paa Overfladen ganske fint grubede paa Grund af de store, indfaldne Parenkymceller.

Jeg skal nu søge at forklare Vegetationsorganernes Bygning (Tav. XIII).

Ved en første Betragtning var det mig ikke muligt at forstaa den; jeg fandt, som paa Fig. 1, et nederste noget hult, bredt og kjødfuldt Legeme (man ser paa Figuren ind i en Hulhed), hvilket det jo laa nærmest at betragte som Stængel, og paa hvis Rand fandtes større og mindre Blade, tilsyneladende uden Orden. Paa ældre, større Planter er Tallet af Blade betydeligere, og man ser nu langt tydeligere end forhen, at Dele med unge Blade mere eller mindre stærkt hvælve sig udad i blidt afrundede Partier og springe stærkere frem end de mellemliggende, med ældre Blade besatte Stængeldele; se f. Ex. Fig. 3 C: Partierne m^1 og n^1 springe stærkere frem end det Parti, der bærer de ældre Blade m og n, eller Fig. 3 B: Midterpartiet med de allerældste Blade a og b ligge længere tilbage end de yngre, og af disse springe de alleryngste (o^1, x^1—x^2 o. s. v.) allerstærkest frem. Men Totalformen af den løvlignende nedre Del er den samme som før; hvis man under en svag Hvælvning af sine Hænder vil slutte dem sammen, omtrent som naar man vilde øse Vand med dem, og man dernæst tænker sig Randen af dette svagt hule Legeme bugtet ud og ind, og langstilkede Blade anbragte paa Randen af Bugterne, de ældste paa de mest indspringende Bugter, de yngste paa de mest udspringende, vil man faa en omtrentlig Forestilling af Vegetationsorganernes Form. I Fig. 3 A ses ind i Hulheden af et saadant løvlignende Legeme, i Fig. 3 B ses det samme fra den modsatte, mod Underlaget vendte Side, og Fig. 3 C og 3 D fremstille det fra højre og venstre Side. Diagrammet (XV, 10) vil ogsaa hjælpe til at forstaa Stillingen, og Fig. 3 E, Tav. XIII, viser os det hele Legeme tænkt fladt udbredt med Bladene siddende i Randen.

Efter at jeg imidlertid havde lært Forgreningen og Bladstillingen hos *Podostemon Ceratophyllum* og *Mniopsis*-Arterne at kjende (se 1ste Afhandling), blev det mig ret let, efter noget Studium, at henføre *Castelnavia*'s Vegetationsorganer til den selv samme mærkværdige Type.

Man vil se af 1ste Afhandling, at Skuddene ere stærkt dorsiventrale; at Bladene staa i to Rækker paa Flankerne, men dreje deres Plader saaledes, at Bugsiden vender opad, Rygsiden nedad (mod Stænglernes Bugside); at Knopperne rykke ud af Bladaxlerne og hen til den yderste Rand af Bladgrunden paa Bladets notoskope, ved Drejningen af Bladet fra Skuddets Medianplan bortvendte Side, hvor de omgives af en extraordinær Stipel; at hver Knops 1ste Blad vender bort fra Moderskuddet, og at Blomsterne ere endestillede.

Hvis man nu vil tænke sig en Plante opbygget efter disse samme Principer og paa den ene Side tillige simplificeret, for saa vidt som hver Axe i den florale Region kun bærer 2 Blade og derpaa afslutter med en Blomst, men paa den anden Side ført endnu yderligere i Retning af Dorsiventralitet og stærk Forgrening, har man *Castelnavia*'s Stængel. Den er bygget som en sædvanlig dikotomisk Cyma; men alle Blade ere drejede saaledes, at deres gastroskope Rand vender indad mod den relative Hovedaxe, og deres Axelknopper ere

rykkede helt ud af Axlen og komme til Udvikling ved Bladets notoskope Rands Basis (se Diagrammet, XV, 10, og tilhørende Figurforklaring). Ligesom hos de i 1ste Afhandling behandlede Arter vender hver Knops 1ste Blad bort fra Moderskuddets Medianplan.

Efter disse Bemærkninger vil Fig. 3 E (og dermed i det hele det i Fig. 3 som Exempel afbildede Skud) kunne forstaas. Den relative Axe af 1ste Orden ender med Blomst 2 (den forudgaaende Axe er ikke fuldstændig til Stede; dens Blomsterhule ses ved 1 i Fig. 3 A, 3 C og 3 E), og denne Axe bærer Bladene a og b; a er det nederste og støtter ved sin udad vendte (notoskope) Rand den kraftigste Knop, som ender med den efter 2 næst største Blomst 3 og bærer de to stærkeste Blade a^1 og a^2. Blad b støtter paa samme Maade ved sin bortvendte Rand et lidt svagere Skud, der ender med den efter 3 næst største Blomst 4 og bærer de to Blade b^1 og b^2. Paa samme Maade støtter a^1 ved sin ydre Rand Skuddet, som ender med Blomst 5 og bærer de to Blade y^1 og y^2, og a^2 støtter Skud 6 med Bladene α og β, af hvilke α som Skuddets 1ste Blad vender bort fra Moderskuddets Medianplan og derfor hen mod Bedstemoderskuddet ($2-ab$), o. s. v.

Det vil herefter være let at forstaa Resten, og ved Hjælp af den punkterede Linie, der fra hver Blomst fører ud til Periferien, vil det være let at finde de til hvert Skud hørende Blade; kun maa det bemærkes, at nogle Skud ikke have mere end 1 Blad. Dette er saaledes Tilfældet med de allerfleste af de yngste Skud, der ikke have faaet deres Blomster numererede; saaledes, naar man begynder fra venstre, det Skud, der støttes af n^1, af b^2 (Skud 8 med Blad o), af x^1, β^1, z^1, y^1. Ogsaa dette er i Overensstemmelse med det hos *Podostemon Ceratophyllum* og hos *Mniopsis* bemærkede, idet Tallet af Blade ogsaa her fandtes at være mindre hos Skud af højere Orden end hos Skud af lavere (se f. Ex. Tav. IV, Fig. 19 A). For øvrigt er det nok muligt, at nogle af de her som 1bladede betegnede Skud ved nærmere Undersøgelse ville findes at have et 2det, men endnu meget lille Blad. Det bør nemlig tillige bemærkes, at endnu mange flere Skudanlæg og unge Blade kunne findes ved en mikroskopisk Undersøgelse af de ved de yngste, for det blotte Øje synlige, Skud værende Dele.

Begyndes fra venstre Side ses i Fig. 3 E nederst Hulen for en Blomst af den i dette tegnede Parti ældste Generation, og Basaldelen af det ene til dette Skud hørende Blad. Dette Blad er Moder for Skud 2 med dets Blade a–b. For øvrigt høre de forskjellige Dele saaledes sammen:

Blomst 12 med Blad m^1 og et ikke mærket Blad.
— 7 — m og n.
— 13 — n^1 og et ikke mærket Blad.
— 4 — b^1 og b^2.
— 8 — o.
— 14 — o^1 og o^2.
— 2 — a og b.
— 10 — x^1 og x^2.
— 6 — α og β.
— 11 — β^1.

Blomst 3 med Blad a^1 og a^2.
— 9 — z^1 og z^2.
— 5 — y^1 og y^2.

Desuden findes der nogle ikke mærkede Blomster med tilhørende Løvblade, og en stærkere Forstørrelse vilde lære, at endnu mange flere, ganske smaa Skud ere anlagte.

Det Spørgsmaal opstaar naturlig, om der ingen Skud findes, som have flere end 2 Blade. Dette gjør der ganske sikkert, og det tør antages, at de først dannede, mere vegetative Skud altid ville have flere, saaledes som det jo ogsaa viste sig hos *Podostemon* og *Mniopsis*, men naar en vis Alder er naaet, synes der kun at frembringes tobladede Blomsterskud i et overordentlig stort Antal af Generationer. Et Skud med mere end 2 Løvblade er afbildet XIII, 2 (Bladene *a*, *b*, *c*, *d* o. s. v. høre til et og samme Skud).

At det hele Skudkomplex ikke kommer til at ligge i en eneste udstrakt Flade, følger af Bladstillingsmaaden, og vil ogsaa lettelig fremgaa ved en Betragtning af Diagrammet i XV, 10.

Paa ganske samme Maade ere de rigere forgrenede Skud hos *Podostemon* og *Mniopsis* skeformig hule i deres øvre Ender, hvilket kan ses af V, 1, skjønt ikke saa tydelig, som jeg havde ønsket at fremstille det.

Fig. 3, Tav. XIII, viser, at de ældre Bladpar komme til at sidde i en Indbugtning paa Randen af det thalluslignende Legeme; dette er en Følge af, at der paa hver Side af dem findes Vækstpunkter (Sideaxer), som grundlægge nye Skudkomplexer, der for at faa Plads maa hvælve sig lidt frem uden for de ældre.

Det næste, der bliver at forklare, er, hvorledes Blomsterne, som jo ere terminale paa deres relative Hovedaxer, komme til at ligge indesluttede i det hidtil som en fladt udbredt Stængel betragtede løvlignende Legeme, og langt fjærnede fra dettes Rand, saaledes som f. Ex. Blomst 2 i Fig. 3 E. Hermed forholder det sig saaledes. Blomsterne ere i Virkeligheden ganske exogene, og naar man gaar tilbage til de alleryngste Udviklingstrin (se f. Ex. de to Blomster XIII, 19, som ligge mellem β—b og a—a), finde vi dem ogsaa meget tydelig liggende frit mellem Foddelene af to unge, ulige store Blade og i umiddelbar Forbindelse med Omverdenen, men meget hurtig begynde de omgivende, til selve Blomstens Skud hørende, Blade at voxe op omkring Blomsten og tillige sammen indbyrdes, og det ender med, at denne kommer til at ligge dybt indsænket i det kjødfulde og løvlignende, blegt grønne, straaleformig og dikotomisk delte «Løv», der altsaa viser sig for en særdeles stor Del at være dannet af sammenvoxede Foddele af Blade. Det er ganske bekvemt at have en fælles Benævnelse for dette af Stængel- og Bladdele dannede Legeme, og jeg vil derfor i det følgende benævne det «Løvet» eller «det løvlignende Legeme». Til enhver Tid kan der paavises en snæver Kanal, som fører ned til Blomsten, men som er saa snæver, at den i Tværsnit ved en Forstørrelse af c. 200 Gange ikke viser sig større end som i XIII, 14. I Begyndelsen, indtil jeg blev nøjere bekjendt med Sammenhængen, antog jeg den paa Tværsnit gjennem

«Løvet» for en Karstræng. Man vil i Fig. 8 A og B finde to Tværsnit lagte gjennem de to Blade *a*—*b* i Fig. 3; Fig. 8 *a* er ført lidt neden for Kløften mellem dem, Fig. 8 *b* lige ved denne; den lille Stjærne antyder Kanalen, medens de 6 mørke Prikker betegne Karstrængene i Bladene, af hvilke de to yderste nylig ere opstaaede ved Deling af en enkelt. Man vil heraf se, at Kanalen findes mellem de to Blade, inde i det ved Sammenvoxningen dannede fælles Fodstykke, og at den udmunder netop i Kløften, der hvor Bladene skilles fra hverandre og nærmest Rygsiden af dem (Fig. 8 *b*; Rygsiden vender nedad paa Figuren).

Paa XIII, 19 vil man se Kanalen, der fører ned til Blomsten mellem Bladene *a* og *b*, overskaaret tæt neden for Sammenvoxningsstedet mellem disse. Ligeledes vil man i Fig. 18 se den i Længdesnit, førende fra Blomst *b* ud til Omverdenen, og ved Blomst *a* vil man se dens indre Munding i Blomsterhulen; derimod har Snittet ikke truffet den ved Blomst *c*.

De Blomsterne dækkende Vævdele ere tyndere paa Bugsiden end paa Rygsiden.

Bladenes frie Foddel er bred og noget skedeformet, saa at den omfatter de nærmest liggende yngre Dele (se f. Ex. XIII, 3 C og 3 D). Den holder sig længe opret, efter at den løvlignende Del af Planten har lagt sig vandret. Pladen er meget fintdelt, nærmest i alternerende fjerformig Forgrening (XIII, 1, 2, 5); ved Grunden af de større Sideflige findes der en fint delt Flig snart nærmest sammenvoxen med Hovedribben, snart nærmest rykket ud paa Sidefligen (XIII, 5).

Bladenes Udvikling er i alt væsentligt som hos *Podostemon Ceratophyllum*, men Forgreningen er langt rigere. Alle de Spidser af Hoved- og Sideflige, som jeg har udpræpareret, have tydelig vist, at Sidedelene anlægges i opstigende Følge og mere eller mindre tydelig alternativt (XIII, 17, 19; XV, 5, 13), og at alle Nydannelser anlægges under Epidermis (XV, 11, 12; se ogsaa 4). Knoplejet er som hos de tidligere undersøgte.

Angaaende Stænglens og Bladenes Anatomi kan mærkes følgende. Kiseldannelser mangle i hele Planten. Alle Cellevægge ere uforvedede. Intercellulære Rum mangle eller ere dog kun yderst smaa. Overhuden er yderst simpel, dannet af forlænget polygonale eller rektangulære Celler. Grundvævet er storcellet og dannet af tyndvæggede Parenkymceller; efter Døden, naar Planten ved Vandstandens Synken kommer til at ligge paa det tørre, fyldes de fleste af disse Celler med Luft, og derfra skriver sig det hvide, næsten kalkagtige Udseende, som de hentørrede, frugtbærende Exemplarer faa (XIII, 4).

Karstrængenes Forgrening vil ses af XIII, 16, 18 og XV, 1, 2, 3. Den er yderst simpel og staar i nøje Forbindelse med hele Skuddets Forgrening. Hver Axe modtager 1 Stræng, som løber ud i Blomsterbunden (XIII, 16 ved *a*, 18 ved *a*; XIV, 3, 26) og dèr deler sig i flere, som forsyne Støvdragere og Ovar; fra denne Stræng udgaar endvidere neden for Blomsten én Stræng til hvert af det paagjældende Skuds Blade, hvilke

Strænge senere sædvanlig dele sig i 3 og højere oppe i Bladene i endnu flere (XV, 3; *m* og *n* betegne de to til II hørende Blade, i hvilke 3 Nerver ere dannede). Ligeledes udgaar der fra disse Strænges udadvendte Sider Grene til de paagjældende Blades Sideskud, der paa lignende Maade tredele sig, hvis disse Sideskud bestaa af 1 Blomst og 2 Blade, eller tvedele sig, hvis de kun bestaa af 1 Blomst og 1 Blad; og saaledes fremdeles.

Karstrængforgreningen er altsaa den samme som hos *Podostemon Ceratophyllum* (II, 7) og de andre Podostemaceer, jeg hidtil har undersøgt.

Det følger af sig selv, at man paa ethvert Tværsnit gjennem det af Stængel og Bladfødder dannede løvlignende Legeme vil træffe mange Karstrænge (hvis Tal tilsyneladende oven i Kjøbet bliver større ved de karstrænglignende Kanaler), som løbe til de forskjellige, længere ude staaende Organer (XIV, 1, 2); hos de andre hidtil undersøgte Podostemaceer, hvis Skudkomplexer ikke ere saa rige og indviklede, er Tallet af Strænge paa et Tværsnit meget mindre (se IV, 3; VI, 8; IX, 53).

Karstrængenes histologiske Bygning. Strængene bestaa af Kambiform og til Dels meget langt udtrukne Trakeider. Tværsnit vise dem bestaaende af snævre og tyndvæggede Elementer; uden om disse ligger et snævercellet Væv med tykke, gullige Vægge — et kollenkymatisk, mekanisk virkende Væv, som længere ude gaar jævnt over i det meget tyndvæggede Væv, der danner Hovedmassen. En særlig Kollenkymmasse i Skuddenes Bugside findes ikke her eller er dog ikke saa fremtrædende, som hos de i 1ste Afhandling undersøgte Arter. Sirør har jeg ikke kunnet paavise sikkert.

Det ældre «Løv» er ganske tæt tiltrykt til Underlaget; det er sikkert stærkt negativt heliotropisk, thi man finder det inderlig læggende sig op til Stenenes Overflade, følgende alle deres Ujævnheder og bøjende selv om næsten retvinklede Kanter, i det det lægger sig lige saa fast til den lodrette som til den vandrette Side (XIII, 4, paa venstre Side).

Hapterer. Stænglen viser sig, naar den er bleven ældre, paa Undersiden besat med Hapterer, som søge lodret nedad og fæste sig tæt til de Gjenstande, med hvilke de komme i Berøring, i det de i Spidsen brede sig eller næsten lige som gyde sig ud over dem; exempelvis er der i XV, 16 afbildet en Hapterrække, der fatter om en lille Sten.

Som Figurerne vise, ere Haptererne højst uregelmæssige i Form; nogle ere frit og isoleret stillede, kegleformede, i Tværsnit trinde Legemer (XIII, 6; XV, 16), andre ere formede som lange, uregelmæssig takkede og vortede Bjærgrygge eller kamformede Kjæder, der følge med Stænglernes Underflade (derimod næppe gaa over paa de egentlig bladagtige Dele) og forgrene sig i Overensstemmelse med Stænglernes Forgrening (XIII, 7).

Jeg har haft Lejlighed til her, bedre end tidligere, at følge Hapterernes Udvikling. De ere exogene Dannelser, opstaaende i Epidermis og det subepidermale Lag. Den XIII, 10 tegnede synes væsentlig dannet i det sidste; men jeg har set en kjædeformig Hapter lige i Dannelse, der aabenbart for en meget væsentlig Del opstod i Epidermis. Ligeledes er det

meget tydeligt dels af Cellernes Ordning, dels af Celleindholdets Beskaffenhed, at de ældre voxe især i deres Omkreds ved Deling af dennes Celler; de alleryderste af disse ere altid meget mindre end de andre og danne en Slags Overhud, der dog naturligvis ikke, netop paa Grund af Væxtmaaden, danner ét, bestemt begrænset Cellelag (XIII, 9, 11, 12, 13). Naar Hapteren afslutter sin Vext og naar Underlaget, udgaar der Rodhaar fra denne Pseudo-Overhud (XIII, 11).

Paa gamle Stænglers Underflade kan man finde hele store Pletter, der ved deres Udseende vise sig at være omdannede til Hæfteapparater; de ere ujævne og brunlige, Sandkorn o. l. hæfte fast til dem; man kan endog finde Underfladen af omtrent det hele «Løv» omdannet paa denne Maade.

Ligesom alle andre iagttagne Hapterer føre disse aldrig Karstrænge; de bestaa kun af et storcellet, temmelig stivelsefrit og klart Parenkym (XIII, 10).

Castelnavia's Rødder. Lige saa dominerende i Plantens Liv Rødderne ere for de tidligere omtalte Podostemaceer og for de i det efterfølgende omtalte *Dicræa*-Arter, lige saa ubetydelig en Rolle synes Rødderne at spille hos *Castelnavia*; jeg er endog tilbøjelig til at tro, at den ingen har. Hos alle de af mig undersøgte Exemplarer har jeg ingen Rødder fundet, og de af Tulasne i hans Monografi givne Afbildninger af *Castelnavia princeps* (Pl. XI, 1) saa vel som af *C. fimbriata* (Pl. XI, 2) vise ikke saadanne forbindende Strænge mellem de enkelte «Løv», som man anden Steds finder mellem Skud eller Skudkomplexer f. Ex. hos *Podostemon*, *Mniopsis* o. s. v. Det er endog naturligst at sige, at der hos *Castelnavia* end ikke findes nogen Hovedrod.

Spiringen af Frøene er det nemlig lykkedes mig at iagttage, efter at jeg havde udsaaet friske, i et Brev fra Dr. Regnell modtagne Frø; dog lykkedes det mig ikke at faa Kimplanterne udviklede ud over en ringe Begyndelse; de gik da til Grunde, vist til Dels kvalte af de Alger, hvis rigelige Udvikling jeg ikke kunde forhindre (XV, 15, 18, 19, 22—27).

Frøet fæster sig ved Hjælp af sin slimede Frøskal (som senere nærmere omtales) fast til Underlaget. Idet Skallen sprænges, træder den, i Kimtilstanden yderst ubetydelige, hypokotyle Stængel frem og voxer saa vel som især Kimbladene i Længden, førend disse afkaste Skallen og udbrede sig (XV, 15). Den unge Kimplante farver sig strax grøn. Paa Enden af den hypokotyle Stængel komme en Mængde Rodhaar strax til Udvikling; de tjene ligesom den slimede Skal til at hæfte Kimen fast. Ved nærmere Betragtning ses de at udvikle sig over hele Rodenden lige hen til den brune Rest af Kimtraaden, som endnu forefindes (XV, 15, 19, 22—27); der er tydelig nok ingen Rodhætte, og at der ikke kan tales om nogen Hovedrod, synes mig klart (se nedenfor, Kimdannelsen hos *Mniopsis*).

Den epikotyle Stængel har jeg set udvikle sig til det i XV, 15 afbildede Stadium; der har her dannet sig nogle faa og ganske smaa Blade af ufuldkomne Former.

Allerede den unge Kimplante er stærkt dorsiventral; det viser sig tydelig, at den epikotyle Stængel ikke udvikler sig midt mellem de to Kimblade, men nærmest til den ene Side, og hele Kimen krummer sig ofte i Overensstemmelse hermed (XV, 18); ligeledes dreje Kimbladene sig saaledes, at Bugsiderne vende til samme Side, Rygsiderne til den modsatte; jeg har forsøgt at fremstille dette paa XV, 15.

Rodhaarene[1]), som udvikle sig paa den hypokotyle Axes Ende, have alle i deres Spids en tykkere Væg end ellers (XV, 22, 24, 26, 27); maaske skal den her ophobede Cellulose bruges, naar Rodhaaret i sin Spids skal brede sig ud i Lapper for at gjøre Tjeneste som Haptér. Lignende Bygning kjendes ogsaa hos andre Rodhaar, og paa samme Maade ophobes der som bekjendt Cellulose i *Oedogonium*-Cellen, der bereder sig til Deling, og i mange Støvkorns Intine.

[1]) Om denne Benævnelse se 1ste Afhandl. S. 12.

III.

Vegetationsorganerne hos *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul., og *Dicræa algæformis* Beddome.

Materialet til Undersøgelsen af disse er mig tilsendt i Spiritus fra Henry Trimen, Bestyrer af den botaniske Have i Peradeniya paa Ceylon[1]), som jeg herved bringer min hjærtelige Tak; desuden er Herbariemateriale benyttet, og f. Ex. Fig. 20, Tav. X, er efter et af Thwaites under Nr. 2259 samlet Exemplar. Ogsaa Arterne *Dicræa dichotoma* (Gardn.) Tul. og *Dicræa stylosa* Wight[2]) ere sammenlignelsesvis undersøgte, men alene ved Hjælp af Herbariemateriale og ikke saa indgaaende, som de i Overskriften nævnte Arter.

Som fælles Karakterer kan anføres: Kiseldannelser mangle. Spaltaabninger mangle. Overhudscellerne ere simple, rektangulært-polygonale. Grundvævet er ufarvet og kollenkymatisk, især dets nærmest Karstrængene liggende Væv, og Intercellulærgange mangle næsten alle Vegne fuldstændig. Karstrængene indeholde ingen forvedede eller dog kun svagt forvedede Elementer og bestaa fortrinsvis eller alene af Blødbast.

Rødderne ere i det mindste to Slags, nemlig: a) vandret liggende, over Underlaget krybende og ved Hapterer til det fast hæftede Rødder, og b) saadanne, som udgaa opret fra disse og bølge frit i Vandet.

De krybende Rødder kjender jeg egentlig kun fra *D. elongata* og i korte Stykker; om de kunne opnaa saadanne Længder som hos *Podost. Ceratophyllum* og *Mniopsis*-Arterne er mig tvivlsomt (X, 1, 2, 20; XI, 1 *r*); deres Hapterer ere afbildede X, 16—20; de ere snart kortere, snart længere, snart udelte, snart forgrenede; snart staa

[1]) «*Podostemon* (*Dicræa*) *elongatum* Gardn. Mahawelliganga near Peradeniya, Ceylon, Febr. 1881.» *Dicræa algæformis*; ibidem.

[2]) De paa Tav. XII, Fig. 1 og 2, afbildede Exemplarer ere fra Herbarier, i hvilke de laa betegnede *Dicræa stylosa* med Tulasnes Originaletikette; jeg har derfor beholdt denne Benævnelse, skjønt jeg nærer Tvivl om, at den er rigtig. Wights Afbildninger stemme ikke videre godt med disse Exemplarer, der forekomme mig at maatte være *D. algæformis*. Blomsterdelene vare for lidet udviklede til, at en god Analyse kunde gjøres og Tvivlen derved hæves.

de enkeltvis og ere trinde, snart som i X, 17 udvikle de sig flere i Række, eller der dannes som en hel lille Kam, der fungerer som Hæfteapparat; naar de naa til Underlaget, brede de sig altid ud i en Hæfteskive og lægge sig tæt op til dette, i det der danner sig Masser af paa de undersøgte Exemplarer brunsorte Rodhaar. Jeg har ikke haft passende Materiale til Forfølgelse af deres Udviklingshistorie; men de synes ganske at stemme med de hos *Podostemon Ceratophyllum*, *Castelnavia* og *Mniopsis*-Arterne iagttagne Hapterer.

At vandret løbende Rødder kunne udspringe fra de oprette ses af X, 1, 2, 3, 20. Om de regelmæssig bære korte, blomstrende Rodskud, véd jeg ikke, men jeg formoder, at dette ikke er Tilfældet.

De oprette Rødder bølge frit i Vandet lig mange fastsiddende Algers Thalli (X, 20; XII, 1). De ere paa to Sider mere eller mindre tæt besat med yderst smaa i Række stillede Skud (Dværggrene), af hvilke de nederste ere blomsterbærende, de øverste sterile; Rødderne kunne aabenbart ikke have nogen ubegrænset Vækst som andre Rødder, men afslutte deres Længdevækst lige saa regulært som et Blad. Paa Grund af de talrige Blomster og Blade, med hvilke de ere besatte, ere de tidligere blevne opfattede som Stængler[1]). Skuddene ere dorsiventrale ligesom selve Rødderne, paa hvilke de sidde, om end ikke i nogen fremtrædende Grad. Den Side, mod hvilken Skuddenes Bugside vender, kalder jeg Røddernes Bugside.

Røddernes Form er forskjellig hos de to Arter. Hos *Dicræa elongata* blive de frit bølgende Rødder indtil 5 Decimeter lange (X, 20); de ere trinde, tykkest ved Grunden og blive mod Spidsen jævnt tyndere, indtil de løbe ud i en piskeformig afsmalnet Ende; de ere normalt kun lidt forgrenede (X, 1, 2, 3), fortrinsvis i deres nederste Del, og Grenene udgaa oftest næsten vandret. Derimod er *Dicræa dichotoma* meget stærkere forgrenet, og Grenene udgaa under en temmelig spids Vinkel fra Moderroden, eller ere endog næsten knippeformig samlede og oprette (se Tulasnes Monogr., Pl. IX, I og II).

Dicræa algæformis (XII, 20, 22) og *D. stylosa* (XII, 1, 2) have en i sin største Udstrækning ganske fladtrykt, baandformig eller næsten bladagtig Rod, der paafaldende minder om visse Havalger og Halvmosser. Tværsnit af den ses XII, Fig. 4 og 5. Allerede hos *Mniopsis Weddelliana* findes der Antydninger af, at Roden kan brede sig baandformig ud (V, 12, 18); men hos disse *Dicræa*'er er det langt stærkere. Den forgrener sig stærkt, som Figurerne vise. Jeg har fundet Spor af, at de med deres Grund undertiden trykke sig op til Underlaget og hæfte sig fast til dette, i det en større eller mindre Strækning af Overfladen udvikler sig som Hæfteapparat med Rodhaar o. l. (XI, 22 *ep*; XII, 7). Bug-

[1]) *Dicræa dichotoma* har efter Weddell (De Candolles Prodr. XVII, p. 70): «caules graciles flagelliformes fluitantes»; *Dicræa algæformis* har «caules elongati fluitantes frondiformi-compressi». — *Dicræa* har efter Hooker & Benth. Genera, III, 112: «Caules plus minus evoluti, sæpe ramosi, nunc ramosissimi, gemmis floriferis quam in *Eupodostemone* paucioribus secus ramos lateralibus».

fladen er ofte lidt stærkere, næsten ribbeformig hvælvet, hvilket staar i Forbindelse med de nedenfor omtalte stærke Delinger i dens Parenkym.

Dicræa-Rødderne ere stærkt klorofylholdige; der findes endog Klorofyl i selve Overhuden, især op til Bagvæggene. Jeg har fundet, at Klorofylkornene danne Stivelse paa deres Overflader, som afbildet XI, 20 og XII, 10, og de saaledes dannede Stivelsekorn ere oftest meget uregelmæssige. Derimod er den Stivelse, som, rimeligvis sekundært, dannes i Karstrængenes Nærhed, sædvanlig mere regelmæssig formet (XI, 16, *m*). Den Lighed, som disse Rødder saaledes i Form og Klorofylrigdom have med Blade, forhøjes yderligere ved deres anatomiske Bygning (XI, 22) og Karstrængforgreningen (XII, 2, 20, 22 o. a.), hvorom nedenfor.

Rodhætten dækker Spidsen helt rundt hos *Dicræa elongata* og kan hos denne Art undertiden være ret stor (X, 6, 13); men derimod er den hos *D. algæformis* ligesom hos *Mniopsis* og *Podostemon Ceratophyllum* kun en lille, neglformet Plade, der aldeles ensidig findes paa Rodspidsens Rygside (XII, 20, 22, 23, 24, 25). Jeg har endog fundet Grene uden Rodhætte (XII, 20 og 22), men om de fra først af have været uden denne eller de i Tidens Løb have tabt den, formaar jeg ikke at afgjøre. Det er dog aabenbart, at Rodhætten ikke spiller nogen stor Rolle her og nærmest maa betegnes som «rudimentær» og paa Vejen til at gaa tabt; intet Under om den virkelig undertiden helt mangler (se ogsaa 1ste Afhandl., S. 8).

Rodforgreningen. Alt for Haanden værende Materiale af *Dicræa elongata* er for gammelt til, at det med Sikkerhed kan afgjøres, om Rodgrenene ere exogene eller endogene; den Omstændighed, at der ikke ses noget tydeligt Spor af Brud ved deres Basis, berettiger endnu ikke til den Slutning, at de ere exogene, thi det samme er Tilfældet med de ældre Rodskud, skjønt de bevislig ere endogene.

Paa de yngste Udviklingsstadier af *Dicræa algæformis*, som jeg har kunnet undersøge, og i langt højere Grad paa alle ældre, ser det ud, som om Rodgrenene vare exogene; man betragte Fig. 20 og 22 B: Bugtningerne mellem Moderroden og dens Grene ere saa jævne, og Overgangen fra den enes Overhud i den andens synes lige saa kontinuerlig, som om Grenene vare exogene Dannelser; ingen Saarflade, intet ringformigt Ar, ingen kraveformig eller skedeformig Dannelse ved deres Grund antyder nogen endogen Oprindelse selv paa de alleryngste, jeg har kunnet finde. At Grenene i ethvert Fald ikke, som ellers, anlægges dybt inde i Moderroden, i Centralcylinderens Periferi, tror jeg at turde antage for givet, men jeg er ikke vis paa, at de dog ikke, ligesom Rodskuddene, dannes i Moderrodens alleryderste Væv, maaske kun dækkede af to eller tre Cellelag, der afkastes eller opløses uden at efterlade sig noget varigt eller endog kun kort varigt Ar. Men naar en Rod danner sig paa en ældre Del af Moderroden, altsaa mere adventivt, er den i ethvert Fald endogen, hvad det uregelmæssige Ar om dens Grund viser (XII, 23).

Rodens Anatomi. Det er især de oprette Rødder, som jeg har undersøgt, men de krybende have ikke vist sig væsentlig forskjellige fra dem.

Overhuden er som sædvanlig dannet af ensartede, rektangulære eller 6-kantet-rektangulære Celler. Rodhaar mangle undtagen dèr, hvor Rødderne hæfte sig fast. Hos *D. algæformis* iagttog jeg den for en Rod usædvanlige Omstændighed, at Overhudscellerne undertiden strakte sig radialt og delte sig tangentialt paa de til Underlaget tæt trykte Steder (XI, 22; XII, 7).

Grundvævets Celler ere desto videre, kortere og mere tyndvæggede, jo nærmere de findes ved Periferien — desto snævrere, længere og mere kollenkymatisk tykvæggede, jo tættere de ligge ved Centralcylinderen (X, 10, 11), især gjælder dette for *Dicræa elongata*; men selv tæt op til denne blive de dog kun til langstrakte kollenkymatiske Parenkym-celler, undtagen paa Centralcylinderens Floemside, hvor de faa Udseende som Protofloem-Celler. Intercellulær-Rum mangle. I de inderste Celler findes simple, runde Porer (X, 12).

I de ældre, allerede fortykkede Celler optræder der ofte talrige Længde- og Tværdelinger, kjendelige paa de tyndvæggede Celler, der gruppevis ligge sammen omfattede af en tykkere Væg (X, 12; XI, 17, 18). Sædvanlig ere de tangentiale Vægge overvejende. Særlig gjælder dette for *D. algæformis*; undertiden ere de tre nærmest under Overhuden paa Rygsiden følgende Cellelag hos denne saa stærkt strakte i radial Retning og delte ved tangentiale Vægge, at Rodens Tykkelse derved næsten voxer til det dobbelte (XI, 22). Mærkværdig er den Lighed med et sædvanligt Løvblads Bygning, som en saadan Rod frembyder; man tror at se et Pallisadevæv opadtil, et pnevmatisk (rigtignok uden Intercellulærer) nedadtil; hertil maa man endnu erindre, at denne Rod er stærkt klorofylførende. Ogsaa i Bugsidens Grundvæv findes ofte talrige Delinger af samme Art; ved disse er det især, at Bugfladens Midtlinie kommer til at springe ribbeformig frem (som paa XII, 5).

Strængskede mangler, lige saa vel som Perikambium; Centralcylinderens Floem og Xylem grænse umiddelbart op til Grundvævet (X, 10, 11; XI, 18, 22; XII, 3, 12).

Centralcylinderen. Roden maa kaldes diark, om dette end ofte, navnlig paa de trinde, strængformede Rødder af *D. elongata* (se f. Ex. X, 10, 11; XI, 18), slet ikke fremtræder tydelig. For det første vises det deraf, at der i de kraftigere og bredere, især de basale Roddele ses to tydelig adskilte Strænge; se f. Ex. XII, 4 og XI, 22. Af denne sidste Figur synes det at fremgaa, at der er to ved Grundvæv helt adskilte Strænge, men det viser sig tydeligere i Naturen, end det er lykkedes mig at gjengive det paa Tegningen, at det mellemliggende Væv paa Grund af sit Indhold m. m. hører med til disse to Strænge og sammenbinder dem til en Enhed. For det andet ses det ofte tydelig paa unge Rødder af *Dicræa algæformis*, selv om det senere kan være mindre fremtrædende, at de ere delte i to Partier (XII, 12). For det tredje staa Rodskuddene i to Rækker paa Flankerne af den dorsiventrale Rod, og Grenene der udgaa fra Centralcylinderen til disse Rodskud udgaa

hos *D. algæformis* lige saa regelmæssig som Nerverne i et fjernervet Blad, med hvilket de unge, tynde og endnu gjennemsigtige Rødder have en mærkværdig Overensstemmelse (XII, 20, 22 B. Ligesaa *D. stylosa*, XII, 1, 2). Endelig stemmer denne Rodbygning med den hos *Podostemon Ceratophyllum* og *Mniopsis*-Arterne iagttagne, hos hvilke Centralcylinderen ligeledes er diark og undertiden endog meget tydelig har to adskilte Xylempartier (III, 15; VI, 2, 3). Centralcylindere, som de X, 11, XI, 18, XII, 3 afbildede, maa da opfattes som fremkomne ved en fuldstændig Sammensmæltning af de to Strænge. Men denne Rod er alligevel ikke diark paa samme Maade som en sædvanlig Rod, i det Blødbast- og Ved-Strænge her ikke alternere med hinanden, men maa siges at ligge kollateralt.

Centralcylinderens Histologi. I de svageste Strænge bestaar Centralcylinderen alene af Blødbast (X, 10, 11); i alt Fald har jeg ingen Trakeider kunnet finde, og om nogle af de parenkymatiske Elementer, som findes paa Xylemsiden, skulle regnes til Xylemet som Vedparenkym eller til Floemet som Bastparenkym, kan næppe afgjøres. Hos *D. algæformis* har jeg i nogle Tilfælde, selv i kraftige Strænge, ingen Trakeider fundet, i andre derimod fandtes saadanne i det ene Hjørne af Centralcylinderens Bugside, og i atter andre Tilfælde fandtes de i begge Hjørner eller i hele Bugsiden. Naar der er Xylem til Stede, findes dette altid paa Strængens Bugside, medens Floemet vender mod Rygsiden; desuden kan Floemsiden kjendes derpaa, at den mod Grundvævet begrænses af lange, snævre, stærkt fortykkede Celler, medens Xylemet grænser op til vide, ikke fra de andre Grundvævsceller afvigende Celler; dette ses tydeligt af XI, 15, 18 og af XII, 3; ogsaa XII, 12 viser, skjønt endnu saa ung, at de Floemet mod Rygsiden begrænsende Celler afvige fra de øvrige Centralcylinderen omgivende. Om disse Celler skulle opfattes som Protofloemceller eller som Grundvævsceller, kan jeg ikke afgjøre.

Hver af de to Strænge i XI, 22 bestaar altsaa, naar Udviklingen føres saa vidt, som muligt, paa Bugsiden af Xylem, paa Rygsiden af Floem. En saa kontraheret Centralcylinder, som de i XI, 18 og XII, 3 afbildede, bestaar paa samme Maade af Xylem paa Bugsiden og Floem paa Rygsiden, uden at det har været mig muligt at paavise en Ordning i to Grupper, i alt Fald er der ingen skarp.

Sammenlignes hermed det for *Podostemon Ceratophyllum* og for *Mniopsis* om Rodens Bygning oplyste, fremgaar det, at de hidtil undersøgte Podostemacé-Rødder paa en mærkelig Maade afvige fra alle andre Rødder. Om de end kunne kaldes diarke, for saa vidt de bestaa af to Floem- og to Xylempartier, ere disse fire Partier dog ikke ordnede alternativt som i alle andre Rødder, men snarest som Floemet og Xylemet i en sædvanlig Stængel- eller Bladstræng; Floemet ligger som ellers i en Bladnerve paa Rygsiden, og Xylemet modsat det paa Bugsiden. Jeg tvivler ikke om, at dette anatomiske Forhold staar i Forbindelse med Rodens Dorsiventralitet.

I alle Tilfælde har jeg fundet, at Xylemets mest karakteristiske Del, Trakeiderne, vare korte, parenkymatiske eller dog ikke særdeles lange Celler, forsynede med ring-, skrue- eller nétformede Fortykkelser (XI, 15, 16). Trakeiderne grænse ikke umiddelbart op til de fortykkede Grundvævsceller, men skilles, som det synes normalt, fra dem ved tyndvæggede Parenkymceller, der vistnok maa benævnes Vedparenkym (XI, 15).

Floemet bestaar i de kraftigst udviklede Rødder af Sirør med Adjunktivceller, og desuden af Parenkym. Tværsnit gjennem ældre Strænge, som den i XI, 18 og XII, 3 afbildede, vise, at der har fundet en Mængde sekundære Delinger Sted i næsten hver eneste Celle i den hele Centralcylinder, saavel i Xylem- som i Floempartiet. Længdesnit vise os de samme Delinger (XI, 15, 16, 19; XII, 9, 11), og det fremgaar med største Tydelighed, at Floemet væsentligst bestaar af tyndvæggede Parenkymceller, som etage- og gruppevis ligge mange sammen og ere kjendelige paa deres Protoplasma og Cellekjærner; i hver Gruppe findes der et Sirør, der er kjendeligt paa sit ofte stribede Indhold, den stærkere Udvidelse af sine Ender og sin Mangel af Cellekjærne. Tværvæggene gjøre ofte tydeligt Indtryk af at være gjennemhullede, men Forholdene ere for smaa og for utydelige til, at det med Sikkerhed kan siges, om de ere byggede som ægte Siplader.

En Celle i den oprindelige unge Stræng kan altsaa ved Deling give Oprindelse til et Sirør med en Mængde i nøjagtig samme Højde liggende snævre Parenkymceller, hvilke jeg derfor tror mig berettiget til at kalde Adjunktivceller, men mere end 1 Sirør i hver saadan Gruppe har jeg ikke iagttaget. Ogsaa Tværdelinger i Adjunktivcellerne forekomme (XII, 9). Derimod er det blevet mig mindre tydeligt, hvorledes Trakeiderne og Vedparenkymet er ordnet i de enkelte Grupper.

Rodskuddene staa hos *D. elongata* udelukkende, hos *D. algæformis* og *stylosa* næsten udelukkende paa Flankerne af Roden, i to Rækker. Hos de to sidste komme nemlig ogsaa enkelte Skud til Udvikling inden for Flankerne paa selve Rodens Flade (ved *g* i XII, 1).

De blomstrende Skud findes, saa vidt jeg har kunnet se, kun paa de oprette Rødders nederste Dele; efter dem følger der paa den øvre Del kun sterile Skud, der ere yderst ubetydelige og frembringe nogle ganske faa og smaa Løvblade og ere uforgrenede, ja ikke en Gang have nogen tydelig Stængeldel (X, 15, 21, 22; XII, 4, 6, 22—24).

Skuddene vise en lignende Tilbøjelighed til at staa parvis, over for hinanden (se f. Ex. X, 20, 22), som hos *Podostemon* og *Mniopsis*, men det er ikke saa gjennemført.

Der hvor en Siderod udgaar, findes der i Regelen en Knop i dens øverste Vinkel, dog nærmest Rygsiden (X, 1, 3).

De blomstrende Skud bøje sig sædvanlig noget tilbage og konvergere mod Bugsiden, baade hos *Dicræa elongata* og *D. algæformis*, og en svag Dorsiventralitet findes ogsaa udtalt hos dem i Bladenes Forhold (sammenlign XI, 7*b* med 7*b*[1]).

Skuddene anlægges endogent i Barkens Periferi, strax inden for de to yderste Cellelag, og uden at der fra først af er nogen særlig Forbindelse med Centralcylinderen (X, 4, 5, 6; XII, 21); senere iværksættes en saadan Forbindelse ved Omdannelse af de mellemliggende Parenkymceller til Karstræng (X, 21; XII, 1, 2, 4, 9, 20, 22 o. s. v.); i de unge, endnu ganske tynde Rødder af *D. algæformis* ses saavel Centralcylinderen som disse til Skuddene udgaaende Karstrænge, naar Rødderne holdes op for Lyset, og Roden ser da ud, som om den havde en fjerformig Nervation (XII, 1, 2). Fig. 4, Tav. XII, viser Karstrængen udgaaende fra Centralcylinderen til et Skud i et Tværsnit af Roden.

Naar Roden af *Dicræa stylosa* og *D. algæformis* er bleven gammel og mere eller mindre medtaget af Vandet, ses den ofte ligesom takket paa Siderne (XII, 1 for oven til højre og anden Steds); dette hidrører derfra, at Dele af dens Sider ere blevne opløste, men de mere resistente Væv, nemlig Karstrængene og de til dem sig sluttende Celler blive staaende længere Tid og springe derfor frem over Resten af Roden.

Det Sted, hvor et Skud danner sig, antydes hos *Dicræa algæformis* ogsaa udvendig ved en lille vorteformig Fremragning (XII, 24). Skuddene gjennembryde dernæst de dækkende Cellelag, hvilket i alt Fald for en Del ligefrem synes at ske ved Opløsning af dem; man vil saaledes paa XII, Fig. 21, se, at en Del Cellevægge over Spidsen af Bladet (ved *) ere forsvundne, og der er nu en Aabning ned til dette, som endnu ikke har hævet sig op over Moderrodens Overflade. Senere voxer det mere frem, andre følge efter, og til sidst sidder der et helt Knippe (X, 8, 15, 14, 9 o. s. v.; XII, 20, 22, 23, 24), hvis yderst ubetydelige Stængeldel dog forbliver skjult inden for Rodens Overflade. I alt Fald er dette Tilfældet med de sterile Skud; de blomsterbærende derimod voxe længere frem. Heller ikke disse sidste har jeg fundet forgrenede (X, 7; XI, 2—7; XII, 13—18).

Om Bladstillingen kan jeg for de vegetative Skuds Vedkommende ikke sige meget med Sikkerhed. Det er baade hos *D. algæformis* og *D. elongata* tydeligt nok, at det første Blad paa de unge vegetative Skud (kun af saadanne har jeg haft unge Udviklingstrin) staar fjærnere fra Rodens Medianplan end det 2det, som tillige synes at staa noget nærmere mod Rodspidsen (se XII, 26, hvor de to første Blade ere mærkede 1 og 2, og sammenlign hermed X, 4, 8, 14 og XII, 24), og tillige, at det 1ste Blad bøjer sin Spids hen imod Rodspidsen ligesom paa de i 1ste Afhandling omtalte Arter, *Podostemon Ceratophyllum* og *Mniopsis*-Arterne. Men paa noget ældre Skud, hvor flere Blade vare dannede, har det altid set ud, som om Bladene opstaa i nedstigende Følge og snarest i en Zigzagrække (se X, 9, 21; XII, 6).

Skjønt jeg ingen ganske unge florale Skud har fundet, anser jeg det ikke for tvivlsomt, at de i Henseende til Anlægsmaade stemme med de sterile. Paa de ældre Udviklingstrin, som jeg har haft til Raadighed, er der ikke Tegn til, at Skuddet har haft endogen Oprindelse, f. Ex. i Form af et ved Skuddets Grund værende Ar (se f. Ex. XI, 2—4), men

jeg antager, at Gjennembruddets Mærker meget let udslettes, især fordi de gjennembrudte Cellelag kun ere to. Dette bestyrkes derved, at ogsaa Blade synes at kunne opløses og forsvinde uden at efterlade sig noget tydeligt Ar; jeg anser det saaledes for rimeligt, at der paa XI, 2—4 har siddet Blade neden for de nu synlige nederste, som ere opløste, og navnlig har der ved * i Fig. 3 sikkert siddet et, af hvilket der endnu saas Antydning.

Hvad der imidlertid udmærker de blomstrende Skud fremfor de golde, er deres udviklede Stængeldel. Det bliver da ogsaa lettere at se Stillingen af Bladene; disse staa, som X, 7, XI, 2—7 og XII, 13—18 vise, i to Rækker, som ligge i Moderrodens Dorsiventralitetsplan, den ene Række vendende hen mod og den anden bort fra Rodspidsen (den «akroskopiske» og den «basiskopiske» Bladrække); altsaa er Bladstillingen her ganske som hos de i 1ste Afhandling omhandlede Arter. Antallet af de til Udvikling kommende Blade synes at være forskjelligt. Medens de nederste Blade ligne de golde Skuds Blade i at have simple, nerveløse eller 1-nervede, liniedannede eller lidt spateldannede Plader uden eller uden synderlig stor Skededel, faa de højere stillede, den endestillede Blomst omfattende Blade en langt større, baadformet Foddel, som paa de ældre Skud er det eneste til Stede værende, i det Pladedelene nemlig falde af (se især X, 7 Blad *d* og *e* paa det nederste Skud), og meget hurtig udviskes Sporene af den affaldne Plade. De vegetative Blade, som ses i Fig. 13—18, Tav. XII, er sikkert alle kun de nedre baadformede Foddele af Blade, hvis Plader ere forsvundne.

Paa disse Skud træder det ogsaa tydelig frem, at Pladerne ere sværdformede eller sammentrykte fra Siderne og, naar Hensyn tages til Foddelene, ridende (X, 7 øverste Skud, o. fl. a.).

Det synes at være Regelen, at de florale Skud udvikles i nedstigende Følge. I alt Fald ses det tydelig saa vel af X, 2 og 20 (især Roden til venstre), samt XII, 1 (Grenen til venstre og til Dels den store midterste), at de øverste Skud ere videre i Udvikling end de nederste, f. Ex. allerede i fuld Blomstring, medens disse endnu have smaa, fuldstændig lukkede Blomsterknopper. Jeg antager dog, at de blomstrende Skuds Anlægsfølge lige saa vel er opstigende som de golde Skuds; Materialet har ikke tilladt Afgjørelsen af dette Spørgsmaal.

Hvert floralt Skud frembringer kun én Blomst, som er terminal.

Betragtes de hidtil gjennemgaaede Podostemaceer med Hensyn til deres Vegetationsorganer og tages *Podostemon Ceratophyllum* til Udgangspunkt, synes Udviklingen at være gaaet i to Retninger.

Hos den nævnte *Podostemon* ere Rødderne krybende, ubegrænsede i deres Vext og bære forholdsvis kraftige Rodskud (indtil c. 5—6 Cm. lange), ret rigt forgrenede og besatte med kraftige Blade (I, 6; II, 1 o. s. v.). Rødderne ere her kun svage Assimilationsorganer, Skuddene ere som ellers de vigtigste.

Paa den ene Side af denne Art staar *Castelnavia princeps*; Rødder synes her at mangle fuldstændig; Skuddene ere særdeles rigt forgrenede og en Mængde Skudgenerationer komme til Udvikling; der fremkommer et af sammensmæltede Stængel- og Bladdele dannet thalluslignende assimilerende Legeme, og Bladene ere store og meget fint delte.

Paa den anden Side af *Podostemon Ceratophyllum* staa først *Mniopsis*-Arterne. Rødderne ere ubegrænsede, men blive ofte en hel Del bredere end hos *Podostemon* (indtil 2—3 Mm. brede), medens Skuddene ere mindre, samt mindre forgrenede og mindre bladrige, altsaa i det hele mindre kraftige Assimilationsorganer (IV, 14 o. s. v.). Hos *Dicræa elongata*, til hvilken *D. dichotoma* aabenbart slutter sig, er der krybende Rødder, fra hvilke andre og oprette Rødder udgaa; disse ere aabenbart begrænsede i deres Vækst, trinde og sikkerlig mere klorofylholdige end de først nævnte Arter; Rodskuddene ere derimod ganske ugrenede, samt ubetydelige i Størrelse og Bladrigdom (X, 1, 2, 20, 22 o. s. v.). Hos *Dicræa algæformis* og *D. stylosa* blive de oprette Rødder til brede, baandformede, i deres Længdevækst begrænsede, stærkt klorofylholdige Legemer, altsaa til kraftige Assimilationsorganer, og samtidig hermed reduceres Rodskuddene til omtrent intet i vegetativ Henseende; Roden har overtaget den Rolle, som ellers tildeles Stængler og Blade (XII, 1). Noget videre i samme Retning gaar den i Tab. IX, Fig. 55, afbildede (ubestemte) indiske Podostemacé, idet Roden er bleven relativ bredere og mere thalluslignende. Naturen gaar imidlertid endnu et Skridt videre, men da jeg hidtil ikke har andet end tørt Materiale af de paagjældende Planter, udsætter jeg Bearbejdelsen af dem en Stund endnu; jeg tænker paa saadanne Arter som *Hydrobryum olivaceum*, afbildet efter et tørret Exemplar Tav. IX, Fig. 54. Saa vidt jeg ser, er Roden her omdannet til det brede, i Omkreds næsten kredsformige, bladagtige, uregelmæssig lappede, sikkerlig grønne Legeme, der ligger tæt tiltrykt til Underlaget og paa en ganske mærkelig Maade gjengiver et Liken-Løvs Udseende, og fra hvis hele Flade der, som det synes uden Orden, udgaa uanselige Blomsterskud; at disse ere endogene, derfor tale de Spalter i Moderorganet, der ses ved hvert Skuds Grund (se f. Ex. Figurens højre Side). Paa ganske den samme Maade som denne Plantes maa sikkert ogsaa flere andre Podostemaceers vegetative Organer opfattes, f. Ex. *Terniola*'s (Tulasnes Monografi, Tav. 13, III).

Sammenholdes hermed, hvad ovenfor meddeltes om *Castelnavia*, vil man se, at Udviklingen fra Former, som *Podostemon Ceratophyllum*, der aabenbart i vegetativ Henseende fjærner sig mindst fra de sædvanlige Planteformer, er gaaet ad to Veje, der begge ende med et løvlignende Legeme, men i det ene Tilfælde er dette et af sammensmæltede Stængel- og Bladdele dannet Skudkomplex, i det andet Tilfælde er det en Rod, der hidtil er enestaaende i Henseende til Metamorfose og som er Plantens næsten eneste Assimilationsorgan af løvlignende Bygning.

IV.

Fruktifikationsorganerne hos *Podostemon Ceratophyllum* Michx., *Mniopsis Weddelliana* Tul. og *Glazioviana* Warming[1]), *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul. og *algæformis* Bedd., og *Castelnavia princeps* Tul. et Wedd.

Blomsterne ere, som alt nærmere er omtalt, endestillede.

De bestaa af følgende Dele: 1) Yderst et Hylster, Forfatternes «spatha», «utriculus» eller «involucrum», der i Knoppen omfatter alle inden for værende Dele. 2) Traadformede

[1]) Af *Mniopsis Glazioviana* har jeg siden min første Afhandling faaet nyt Materiale (Glaziou Nr. 13144), nemlig afblomstrede Exemplarer, af hvilke her derfor afbildes nogle paa Tav. IX, Fig. 37—40, sete forfra og bagfra. Man vil ved Sammenligning med de paa Tav. VI, Fig. 13, afbildede Exemplarer se, at Bladene nu ere ødelagte af Vandet, paa de brede, noget hjærtedannede Basaldele nær. Det bliver mig derfor endnu mere sandsynligt, end det var tidligere (se 1ste Afhandling, S. 16), at *Mniopsis scaturiginum* kun existerer i mutilerede, ukomplette Exemplarer (se Tav. VI, Fig. 16). Ogsaa hos *Mn. Glazioviana* blive Frugterne til sidst næsten klasestillede, ligesom de af Tulasne ere afbildede og omtalte hos *Mn. Weddelliana* (se min Tav. V, 2), i det de Blade, som tidligere skilte Frugterne fra hverandre, opløses af Vandet, og i det Stænglerne ligeledes slides mere eller mindre tynde af dette (IX, 38, 39).

Jeg fandt her for 2den Gang en skælformet Dannelse lige neden for Blomsten, mellem denne og det øverste Blad (*x* i Fig. 48 *a*, afbildet helt i 48 *b*); sammenlign Figurforklaringen til VI, 13 A. Hvad denne Dannelse egentlig er, er mig uklart.

I IX, 53 er afbildet et Tværsnit gjennem Stængel og Bladbasis for at vise Strængenes Fordeling og Kollenkymstrængenes Beliggenhed: der er et stærkt lysbrydende Kollenkym omkring Strængene, især paa deres Rygside; desuden en selvstændig bred Stræng i Stænglens Bugside. Lige saa ere Bladenes Strænge paa Bugsiden forsynede med Kollenkym. Kollenkymets Celler ere meget lange med vandrette eller skjæve Endevægge. Trakeider mangle.

Om denne nye Art skal jeg endnu tilføje, at dens Rodskud naa 1—2 Cm. Højde. De ere oprette og udgaa tueformig, ofte meget tæt samlede, fra Rødderne. Mest karakteristisk for den synes være, at saa vel Stipel- som Bladrande ere nedløbende, hvormed følger en furet-kantet Stængel; navnlig springer Bladranden skarpt og vingeformig frem paa Rygsiderne (IX, 38, 39). Bugsiden er afrundet som vist i IX, 40. Endvidere er den brede, næsten lidt hjærtedannede Bladbasis ejendommelig. Af det florale maa fremhæves: de udelte Ar (IX, 46).

De nævnte Arter haves i Spiritusmateriale fra følgende Lokaliteter (*Castelnavia* og *Dicræa*-Arterne opførtes ovenfor):

Legemer, sædvanlig i et Antal af tre. For Kortheds Skyld vil jeg som de tidligere Forfattere kalde dem «Staminodier», skjønt jeg ikke, paa mit nuværende Standpunkt, tror, at de ere golde Støvblade. 3) To Støvdragere, enten helt frie eller forenede fra Grunden af højere eller længere op. 4) En Støvvej med en 2rummet Frugtknude og to Ar.

Diagrammet af Blomsten ses VII, 10 og XII, 29; mellem det ringformig sluttede Hylster og Støvvejen ses Androeceet, altid stillet paa Blomstens Bugside, d. e. den Side, som vender hen mod Skuddets Bugside (IV, 24 og XV, 10). Det ene af de tre Staminodier findes mellem de to Støvdragere, de andre to hver paa sin Side af Androeceet. De to Frugtblade ligge i Skuddets Medianplan.

Den hele Blomst er stærkt skjæv, hvilket især ses paa Længdesnit som VIII, 5; IX, 47. Skjævheden viser sig i, at Blomsterbunden er forlænget til den ventrale Side, Frugtknudens Rum ulige store og Placenta skjævt stillet i Forhold til Blomstens Længdeaxe. Dette staar aabenbart i Forbindelse med hele Skuddets stærke Dorsiventralitet.

Hylsteret er i Knoptilstanden tæt lukket og slutter tæt om de indre Dele. Naar Blomstringen indtræder, sprænges det uregelmæssig, og Støvknapperne samt Arrene træde frem (VIII, 1, 2; XI, 5; XII, 13—16 o. a.). Det mangler Karstrænge og er aldrig bygget af andet end Parenkymceller i indtil 4 Lag (VII, 2, et ungt Hylster). Cellerne ere tyndvæggede eller, især de yderste, noget kollenkymatisk tykvæggede, og hos de Arter, der have Kiseldannelser, findes saadanne ogsaa i Hylsteret. Hos *Castelnavia* er det inderste Lags Celler størst og mest tykvæggede, og der kan findes lave, ikke tæt stillede Porer; Hylsteret er ner i sin største Udstrækning kun 2 Cellelag tykt, men paa Bugsiden lidt tykkere.

Det er ellers omtrent ens tykt helt rundt hos de fleste andre; kun hos *Dicræa algæformis* fandtes den Side, der vender mod Rygsiden, betydelig tykkere (dannet af flere Cellelag) end den modsatte (XII, 29)). Om deraf kan sluttes, at Hylsteret bestaar af et eneste Blad, hvis Rygside vender mod Skuddets Rygside, véd jeg ikke. Paa ganske unge Blomster af *Castelnavia princeps* anlagdes Hylsteret aabenbart tidligere paa Bugsiden end paa Rygsiden (XIV, 5, 6, 8, 11), men dette er maaske kun et Udtryk for den stærke Dorsi-

---

Podostemon Ceratophyllum Michx., misit Dr. Wm. Canby, Wilmington, Delaware.

Mniopsis Weddelliana Tul. — Ad Caldas, prov. São Paulo, m. Martio et Aprili florentem legerunt ill. Dr. Anders Fredrik Regnell et Hjalmar Mosén. — In provincia Rio de Janeiro leg. ill. Dr. Aug. Glaziou: no. 8888: «Rio da boa Esperança, versant méridional de la chaîne des Orgues, à 1200 Mètres d'altitude environ; Mai 1876.» — «12192. Rio Soberbo (Serra dos Orgãos), le 23 Mars 1880.» — «12194. Petropolis dans le Rio Piabanha le 3 Mai 1880.» — 12197. — «12198. Petropolis, dans le Rio Itamaraty, le 3 Mai 1880.» «Dans le rapide du Mondemo, le 9 Dec. 1878; sterile.»

Mniopsis Glazioviana Warming, leg. ill. Dr. A. Glaziou. «12191. Rio Soberbo (Serra dos Orgãos) le 23 Mars 1880.» — «12193. Haut du Rio Soberbo, près du Sitio le 24 Mars 1880.» — «Rio Bengala, entre Novo Friburgo et le Alto. 11 Févr. 1881.» — 13144.

ventralitet, som i det hele hersker hos denne Plante. Kun en sammenlignende Betragtning af alle Familiens Arter og af dens nærmeste Slægtninge, hvis disse kunne udfindes, vil muligvis kunne oplyse dette med Sikkerhed. For øvrigt voxer Hylsteret i Vejret som et helrandet, sækformet Organ, med omtrent ens Tykkelse, indtil det begynder at lukke sig over Blomstens indre Dele, i det talrige Længde- og Tværdelinger tage deres Begyndelse i dets Rand (XIV, 4).

Staminodierne danne den næste Krans af Bladorganer. Af dem findes der et paa hver Side af Androeceet og fremdeles, naar *Dicræa elongata* og *Castelnavia princeps* undtages (XI, 8 og XIV, 1), et mellem de to Støvdragere (f. Ex. VII, 3; IX, 50; XII, 19).

Staminodierne staa lidt, men ogsaa kun lidt uden for Støvdragerne; tydeligst ses dette paa det midterste, mellem de to Støvdragere staaende (VII, 3, 8; IX, 49, 50). Mindst tydelig saas det hos *Dicræa*; man skulde endog snarest tro, at de her stod paa samme Højde som eller selv inden for Støvdragerne (XII, 19). I den ganske unge *Castelnavia*-Blomst staa de, saa vidt jeg kunde se, paa samme Højde som Støvdragerne (XIV, 8), men de anlagdes senere end disse (sammenlign XIV, 7 og 8). Deres Former og Længdeforhold ere kun lidet forskjellige; sædvanlig ere de traaddannede, lidt afsmalnede mod begge Ender, undertiden lidt tykkere oven for Midten eller hen mod Spidsen end længere nede. Hos *Mniopsis Glazioviana* ere de lidt mere kølledannede og klodsede end hos de andre (IX, 49, 50). De sidestillede naa omtrent op til Ovariets Spids. Staminodierne bestaa alene af tyndvæggede Parenkymceller, i hvilke der kan findes Stivelse. Hos *Podost. Ceratophyllum* (VII, 13) danner der sig oven for deres Midte smaa Intercellulær-Rum, og det ikke blot mellem de indre, men ogsaa mellem de alleryderste Celler; de findes hyppigere i de rette Vægge mellem to sammenstødende Celler end i Krogene, hvor 3—4 støde sammen. Nærmere mod Spidsen af Staminodiet blive Intercellulær-Rummene større og talrigere, og selve Spidsen faar fuldstændig Bygning som gjennembrudt Arbejde, et Gitterværk af løst sluttede Celler. — Meget svagere findes dette hos *Mniopsis Weddelliana* (VIII, 27) og *Mn. Glazioviana* (IX, 41), og hos *Dicræa*-Arterne, hos hvilke de dog findes næsten fra Basis af (XI, 14). Staminodiernes morfologiske Betydning maa jeg lade henstaa uafgjort, indtil jeg af Autopsi kjender alle andre Podostemaceer. Den Mening synes mig dog den rimeligste, at de ere Perigonblade.

Androeceet ligger i Knoptilstand trykket tæt ind til Ovariet (VII, 1, 6; XI, 9 o. a.), til dettes Bugside. Normalt har jeg ikke fundet mere end to Støvknapper hos nogen af de undersøgte Arter. Disse Knapper kunne være baarne hver af sin helt eller næsten helt frie Traad (*Castelnavia*, XIV, 1, 2, 3), i saa Fald deler den Karstræng, som gaar til Androeceet, sig allerede i Blomsterbunden i to, en for hver Støvtraad (XIV, 26, 27). Men deres Traade ere hyppigere ved Grunden og til højt op forenede i ét Knippe (VII, 1, 3, 8; VIII, 4;

IX, 50; XI, 8; XII, 19), og i Overensstemmelse hermed gaffeldeler hin Stræng sig først længere ude, i selve Androeceets fælles Stilk (se de punkterede Linier i en Del af de anførte Figurer).

Det vigtige Spørgsmaal opstaar her: Af hvor mange Støvblade er Androeceet dannet? To Forhold kunne tænkes. Det kunde være dannet af kun et eneste Støvblad, som i nogle Tilfælde dedoublerer sig ved Kløvning lige til Grunden, i andre Tilfælde først forgrener sig længere ude; i saa Tilfælde maatte vi sikkert søge Podostemaceernes Slægtninge mellem de ikke mange Familer, hos hvilke forgrenede Støvblade forekomme. Eller det kunde tænkes dannet af to selvstændige Støvblade.

Det er mig ikke muligt endnu at føre noget Bevis for Rigtigheden af det ene eller det andet. Men en komparativ Betragtning af de øvrige Slægter bringer mig til den Antagelse, at Androeceet bestaar af to Støvblade. Fællesstilken er da enten opstaaet ved en Sammenvoxning mellem Traadenes Basaldele eller er en Forlængelse af Blomsterbunden, altsaa en Axedannelse, og naar jeg atter antager det sidste for det sandsynligste, er det fordi Blomsterbunden i det hele hos disse stærkt dorsiventrale Blomster er saa skjæv, og fordi ogsaa et Staminodium sædvanlig har sin Plads paa Fællestraaden, paa den udvendige Side af Kløften mellem de to specielle Traade. Hos *Castelnavia*, der er den af de undersøgte Arter, som har de stærkest adskilte Støvdragere (XIV, 1), opstaa disse som adskilte selvstændige Vorter paa Blomsterbunden.

Abnormt kan saa vel Antallet af Støvdragerne som af Staminodierne forøges. I VII, 7 er fremstillet et Tilfælde, i hvilket en fælles Traad bærer 3 Antherer; der gaar to adskilte Strænge ud i Traaden, af hvilke den ene gaffeldeler sig for at forsyne de to Antherer; kun 1 Staminod fandtes som tegnet. I VII, 8 er et andet abnormt Tilfælde fremstillet: en tredje Støvdrager er ogsaa her kommen til, men den er gold og er helt adskilt fra de andre, paa normal Vis forenede. Mærkeligt er, at dens Spids har en lignende Bygning som Staminodierne, hvilket kunde synes at tale for disses Støvdragernatur.

Et tredje abnormt Tilfælde fandtes hos *Mniopsis Glazioviana* (IX, 49); det stemmer nærmest med VII, 7, i det der til det normale Knippe af to Støvdragere, som det ses af Fig. 50, og *b*—*c* i Fig. 49, er kommet en tredje Støvdrager (mærket *a*), hvis Traad er sammenvoxet med det normale Knippe indtil omtrent halv Højde, og som ligeledes faar sin egen Karstræng, men denne Støvdrager er steril; at mærke er for det første, at dens opsvulmede Spids er papilløs paa en lignende Vis som Staminodierne, og for det andet, at der sidder et Staminodium ud for hvert Mellemrum mellem to Støvdragere.

Tværsnit af Støvtraaden ses VII, 4 og XIV, 7.

En stærk Strækning af Støvtraadspartiet finder Sted under Blomstringen hos *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 19) og *Mniopsis Weddelliana* (VIII, 4). Hos *Castelnavia princeps* strække Traadene sig under Afblomstringen betydelig og blive efter Afkastning af Knap-

perne staaende som to kraftige hornformede Legemer, der rage ud af den Hule, hvori Blomsten sidder nedsænket (XV, 17 og XIII, 15).

Det dorsiventrale, uregelmæssige i den hele Blomst gjør sig ogsaa gjældende i Støvknappernes Former; hver Knap er altid skjæv paa en lignende Maade som hos visse Labiatiflorer (f. Ex. Acanthaceer), i det den ene Halvdel, nemlig den indad, mod Blomstens Symmetriplan vendende, er mindre end den udad vendte og sidder vel og en Smule højere (VII, 3, 8; VIII, 18; IX, 49, 50; XI, 8; XII, 8). Denne Skjævhed staar sikkert ogsaa i Forbindelse med den stærke Dorsiventralitet og med det Tryk, som Knapperne i Knaplejet ere udsatte for. Hos *Castelnavia* er Knappen symmetrisk.

Støvknapperne ere for øvrigt indad vendte, basifixe eller kun ganske lidt dorsifixe, fra først af paa sædvanlig Vis 4-rummede; de aabne sig med to Længdespalter. *Castelnavia*'s afvige fra de andres derved, at Rygsiden er saa hvælvet og uden nogen Fure; tillige er Knappen lidt stærkere udskaaren ved Grunden (XIV, 1).

Jeg har hos alle Arter inden for Overhuden fundet fibrøse Celler med ring-, halvring-, skrue- eller netformige Fortykkelser, paa den indre Væg især, dannende et eller paa Rummenes Indersider flere (4—5) Lag helt rundt om Rummene (VII, 14). De fibrøse Celler ere især strakte i tangential-horisontal Retning, Overhudens derimod tangential-lodret (VII, 15; XIV, 24).

Udviklingen af Støvknappen har jeg ikke fulgt; kun nogle faa ganske unge Stadier ere blevne undersøgte. De fremviste ved Tværsnit en Gruppe nydannede Celler inden for Epidermis, men Anordningen af dem var ikke saa regelmæssig som ellers (XIV, 22).

Pollenkornene ere enlige hos *Castelnavia* (XIV, 25), men forenede to og to i et sammensat Korn hos *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 16), *Mniopsis* (VIII, 19—25; IX, 51—52), *Dicræa* (XI, 13). De ere lidt nedtrykt-kuglerunde og sædvanlig 4(—5)-lappede, det vil sige, stærkt udhvælvede paa fire eller fem fra Pol til Pol rækkende Partier, der tillige ere fint punkterdde, medens de mellemliggende Partier ere glatte; fra disse sidste er det, at Støvrørsdannelsen finder Sted (VIII, 21, 24, 25; XI, 13). Ikke sjælden ere de to Celler i Kornet ulige dannede, i det den ene er lappet og prikket, samt tilsyneladende helt udviklet, medens den anden gjør et umodent Indtryk, er kuglerund, ulappet, glat, og ofte uprikket (VIII, 19; IX, 51). Dog kunne ogsaa ganske kuglerunde Korn være prikkede. Jeg har ikke set Støvrør udvikle sig fra disse kuglerunde (se f. Ex. XI, 13 *b*). Begge Celler i et helt udviklet Korn kunne danne Støvrør.

I *Castelnavia*'s Korn fandt jeg ofte to Cellekjærner, og ligeledes har jeg undertiden ogsaa hos de andre Arter fundet to tættere Protoplasmakugler i hver Celle, som jeg maa tyde som Cellekjærner (VIII, 23), men det var langt fra altid Tilfældet. Om disse Cellekjærner bør sættes homologe med de først af Strasburger hos mange Fanero-

gamer paaviste to Cellekjærner i Støvkorn, eller de antyde en ikke udført Tetradedeling, vover jeg ikke at afgjøre, førend jeg har kunnet følge Udviklingshistorien.

Bestøvningen er vist som Regel Selvbestøvning. Jeg har truffet Støvkornene spirende i Støvknappen, og jeg har ligesaa gjentagne Gange og hos forskjellige Arter truffet dem paa Arrene (*Mniopsis Weddelliana*, *Dicræa algæformis* og *elongata*, se f. Ex. XII, 27), der vare i en tæt Berøring med de aabne og endnu støvholdige Antherer. Bestøvningen synes at kunne foregaa lige saa godt under Vandet, som ovenfor dette, skjønt det sikkert oftest er Tilfældet, at de Planter, som blottes for Luftens Adgang, lettere blomstre end de nedsænkede (cfr. Regnells Meddelelser ovenfor).

Pistillen er dannet af to Frugtblade, sammenvoxede i ét Ovarium med to terminale Ar. I Knoppen ere disse altid bøjede nedad mod Anthererne, altsaa mod Blomstens Bugside (VII, 1, 5, 6; IX, 47; XI, 9; XIV, 1).

Arrene ere meget forskjellige hos de forskjellige Arter: hos *Podost. Ceratophyllum* udelte og nogenlunde stærkt papilløse (VII, 5), hos *Mniopsis Weddelliana* delte i et forskjelligt Antal Flige og endnu stærkere papilløse (VIII, 3, 4, 6); hos *Mniopsis Glazioviana* ligeledes stærkt papilløse, men udelte (IX, 42, 46). Hos *Castelnavia* forlænget kegleformede, næsten hornformede, ganske glatte Legemer (XIV, 1); af Farve ere de her røde ligesom Anthererne. Hos *Dicræa elongata* kort kegleformede, tykke, budte, udelte og glatte (XI, 9, 10); hele Periferien er navnlig om Spidsen dækket af et Lag af radialt strakte Celler, men de rage ikke frem over Overfladen i Form af Papiller. Hos *Dicræa algæformis* ere de brede, korte og lidt lappede (XII, 27). Efter Blomstringen falde Arrene ofte fuldstændig af, saa Frugtens øvre Ende bliver ganske afrundet (VII, 17—19 o. a.).

Ovariet er ellipsoidisk, glat, selv om Frugten bliver ribbet (sammenlign VII, 17 med 18 og 19), og torummet med en meget tyk Placenta, som ved to meget tynde Vægge forbindes med Ydervæggen. Hos *Castelnavia princeps* og *Mniopsis Glazioviana* svinde disse Skillevægge meget tidlig, saa at Ovariet egentlig bliver enrummet (IX, 43; XIV, 15, 27).

Jo mere dorsiventral Blomsten er, desto større er Forskjellen paa Rummenes Størrelse. Omtrent lige store ere de hos *Dicræa elongata* og *algæformis*, hvis Skud i det hele ikke ere stærkt dorsiventrale (XI, 12; XII, 29). Stærkt ulige store, i det det notoskope Rum er betydelig større end det gastroskope, ere de hos *Mniopsis Weddelliana* (VIII, 29), hvis Blomst i det hele er meget skjæv (se Længdesnittet VIII, 5), og hos *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 10, 11).

I Forbindelse med denne Forskjel i Rummenes Størrelse staar Opspringnings-Sømmenes Beliggenhed. Følgende Figurer vise, at disse dele Ovariet i to ulige store

Stykker, i det de fra Toppen løbe i en skraa Retning over mod Bugsiden og ende ved Basis af Androeceet: VII, 1, 17—19; VIII, 4; IX, 46; XV, 7—9.

Blomsterbundens Form frembyder intet mærkeligt undtagen hos *Castelnavia*, hos hvilken den paa Rygsiden hvælver sig stærkt i Form af en glat, tolappet, kjertelformet Opsvulmning (XIV, 1, 3, 14, 26).

Om Karstrængforgreningen i Blomsterbunden kan nævnes, at den Stræng, som gaar ud til Blomsten, i Blomsterbunden deler sig i flere, hvoraf 1 eller ved en hurtig Deling af den (dèr, hvor de to Støvdragere ere frie næsten til Grunden: XIV, 26) 2 gaa til Androeceet, og en til Ovariet, hvilken sidste Stræng dels sender en Gren op i Placenta til dens Midte, dels sender Grene op i Frugtbladenes Basaldele (VII, 9; VIII, 5; XIII, 16; XIV, 3, 14, 26).

Jeg har kun kunnet følge Blomstens Udviklingshistorie nogenlunde hos en eneste Art, nemlig *Castelnavia princeps*. Allerførst viser Blomsten sig som en halvkugleformet Vorte (f. Ex. XIII, 19); derefter kommer Hylsteret til Syne og, som allerede omtalt, tidligere paa Bugsiden end paa Rygsiden (XIV, 5, 6 og det histologiske Billede Fig. 11). Efter dette anlægges Støvdragerne, medens Blomsterbunden oven for dem stærkt hvælver sig i Vejret (XIV, 7). Samtidig med at dernæst de to Staminodier komme til Syne, begynder Ovarievæggen at træde frem som en ringformig Valk omkring en i Axens Spidse stærkere fremtrædende lille Kegle, den vordende Placenta (XIV, 8). Ovarievæggen hæver sig nu jævnt i Vejret samtidig med, at Placenta ogsaa voxer i Vejret, og Blomsterbundens særegne Udvikling tager sin Begyndelse (XIV, 10). Under fortsat Udvikling af de allerede anlagte Dele komme nu ogsaa Æggene til Syne (XIV, 3, 14, 16, 2). Disses videre Udvikling omtales nedenfor.

Ovarievæggens og Frugtvæggens Bygning er af de tidligere Forfattere benyttet som Slægtsmærke; *Mniopsis* har «ovarium læve» (Tulasne) eller «prorsus enerve» (Weddell in Prodr. 76) og «capsula lævis», det vil sige, den er uden Ribber, medens *Podostemon* efter Weddell (l. c. 72) har «ovarium 8-nerve v. subenerve» og «capsula nervis plus minus prominentibus, raro fere omnino lævis». I Virkeligheden er Strængenes Antal i de ribbede Kapsler 10, som man vil se af VII, Fig. 10—12; herom nedenfor mere. Hvilken Betydning dette Forhold har i systematisk Henseende, tør jeg først udtale mig om, naar jeg har faaet alle Arter studerede.

Naar man ser bort fra denne Forskjel, frembyder Ovarievæggen i øvrigt en overordentlig Ensartethed hos alle de undersøgte Arter, nemlig følgende. Tallet af Cellelag i Væggen er c. 5—6.

A. Inderst findes et meget i Øjne faldende Cellelag, en indre Epidermis, hvis Celler ere strakte i tangential-horisontal Retning og have tykke, brunlige Inder- og Ydervægge, men tyndere Sidevægge (Laget *epi* paa VII, 20, 21, 22; VIII, 30—33; IX, 45; XI, 11, 21; XV, 14).

Paa radiale Længdesnit gjennem Ovariet træder det stærkt frem paa Grund af Cellernes regelmæssig firkantede Lumen (VII, 9).

B. Det næstinderste Cellelags Celler (*sep* i Figurerne) krydses med først nævntes (*epi*) under rette Vinkler, i det de ere strakte i lodret Retning (VII, 23; VIII, 28); paa et Tværsnit gjennem Ovariet ville disse Celler derfor frembyde omtrent samme Udseende som det først nævntes paa radialt Længdesnit, nemlig som temmelig regelmæssige Firkanter (f. Ex. XI, 11).

I den udviklede Frugt har dette Lags Celler altid stærkt fortykkede og lagdelte Vægge; jeg har fundet C-formede Fortykkelser som afbildet hos *Mniopsis Glazioviana* (IX, 45), hos *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 22), *Dicræa elongata*, *algæformis* (XI, 21) og *rigida*, og hos *Castelnavia*; en ens stærk Fortykkelse næsten helt rundt hos *Mniopsis Weddelliana* (VIII, 32, 33).

C. Efter dette Lag følge de Strænge, der fremkalde Ribberne i den modne Frugt hos *Podostemon*, *Dicræa* og *Castelnavia*. Disse Strænge ere ordnede som Ribberne i en Umbellifer-Frugt (VII, 10—12; XI, 12; XII, 29, hvor en er forglemt): der er en Midtstræng i Ryggen af hvert Frugtblad (af hvilke en kommer til at ligge ud for Mellemrummet mellem Støvdragerne), to Sidestrænge og endelig to Randstrænge, der slutte sig mere eller mindre tæt til Opspringningsømmen. Undertiden ligge de to Randribber, som støde op til samme Søm, tydelig adskilte, men sædvanlig ligge de saa tæt sammen, at de i den modne Frugt kun træde frem som en eneste, men bred Ribbe. Man vil derfor ogsaa finde Frugter beskrevne som 8-ribbede, skjønt de i Virkeligheden ere forsynede med 10 Sklerenkymstrænge. En Afvigelse er afbildet XIV, 27: her er der 6 Strænge i hvert Frugtblad.

Disse Strænge bestaa af ensartede prosenkymatiske Celler (Sej-Bast); kun allernederst i Midtribben, altsaa i Frugtbladenes Rygribbe, har jeg set Skrue- og Ring-Trakeïder (se f. Ex. XV, 20 og 21).

Disse Strænge mangle hos *Mniopsis* (VIII, 29; IX, 43), dog med Undtagelse af, at en Karstræng fra Blomsterbunden af kan træde ud i Frugtbladets Ryg og løbe et kort Stykke op i denne.

For øvrigt er Resten af Frugtvæggen omtrent ens; til det stærkt fortykkede, næst inderste Lag slutter der sig undertiden

D, nogle, mindre regelmæssig i Lag ordnede, stærkt fortykkede Celler (VIII, 32, 33), og Resten er

E, et tyndvægget Parenkym, som i gamle Frugter kan være mere eller mindre ødelagt og forsvundet (f. Ex. XI, 21).

Castelnavia's Ovarievæg er den, der afviger mest fra den i det foregaaende skildrede Bygning, i det Væggens inderste Lags Celler strække sig stærkt radialt der, hvor de ligge ud for Ribberne, og disse støde lige op til det ligesom de paa den anden Side ogsaa naa lige ud til ydre Overhud (XV, 14); ogsaa ud for Opspringningssømmen er Bygningen en lidt anden.

Om Frøgjemmets Udviklingshistorie kan jeg oplyse følgende. I den ganske unge, endnu helt tyndvæggede Frugtknudevæg ere Strængene allerede anlagte som Prokambiumstrænge, dannede af snævre, lange Celler, og der er en Mængde Stivelsekorn til Stede i alle Celler, baade i disse Prokambiumstrænge, i hvilke de dog ere smaa og mindst talrige, og i de parenkymatiske Vægceller; kun det inderste Cellelag (*epi*) er stivelsefrit (se VII, 20, 21 og sammenlign hermed VII, 22; fremdeles VIII, 30 og 32—33; XI, 11).

De Forandringer i Retning af Væg-Fortykkelser, der senere foregaa under samtidig Forsvinden af den, dertil sikkert bestemte, Stivelse ere omtalte ovenfor. Frugten er en Kapsel af mørk brun Farve og glinsende. Naar den er moden, løsner den ventrale, hos de stærkt dorsiventrale Arter meget mindre, Klap sig fuldstændig og falder af, Placenta med Frøene falde ud, medens den dorsale, betydelig større Klap bliver staaende eller hos *Castelnavia* siddende nedsænket i det thalluslignende Legemes Gruber. Opspringningen er skillevægbrydende (VII, 18—19; VIII, 31; XV, 6—9).

Placenta er altid meget mægtig, — en tyk, af særdeles tyndvæggede og med Stivelse tæt fyldte Parenkymceller dannet Masse, der næsten udfylder Ovariehulheden og mellem sig og Ovarievæggen kun lader en ringe Plads tilbage, der udfyldes af Æggene og de to ovenfor omtalte tynde Skillevægge; denne Bygning minder mest om mange til Labiatiflorernes og Tubiflorernes Familier hørende Planters. Den er fra først af fri opad til, men dens Spids lægger sig saa nøje op til Ovarierummets øvre Ende, at det paa ældre Frugtknuder ser ud, som om de altid havde været sammenvoxede (XIV, 2, 3, 8, 10, 14 o. s. v.). Kun i Midtlinien af Placentaens nederste Del findes der en fra Blomsterbunden udgaaende Karstræng, der sædvanlig lidt før, end den naar op til Placentaens Midte, løser sig op i til alle Sider eller især til to Sider udstraalende korte Trakeider (VII, 9, 10). Det midterste, karstrængfrie Parti i Placenta udmærker sig ved sin mørkere Farve (VIII, 29; XI, 12).

Abnormt har jeg én Gang fundet Placentaen tvedelt i en Blomst af *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 12); dette har Interesse, for saa vidt som det taler for, at Placentaen er et alene af de opsvulmede Bugsømme dannet Legeme, i hvilket Blomsterbunden ikke tager Del.

Æggene og Frøene. Æggenes Antal er overordentlig stort i hvert Rum. De ere anatrope og amfitrope, i det de øverst paa Placenta stillede ere apotrope og oprette,

men de andre for største Delene epitrope og hængende, naar enkelte ud til Siderne liggende undtages, der ere vandrette (VII, 9, 11; XIV, 2). Hos *Castelnavia* opstaa de, efter Størrelsesforholdene at dømme, i opstigende Følge (XIV, 3, 14, 16).

Æggets Udviklingshistorie er fulgt hos *Mniopsis Weddelliana* og til Dels hos *Castelnavia* o. a. Det opstaar paa sædvanlig Vis ved Deling af nogle faa eller fra først af maaske kun 1 subepidermal Celle, hvorved den overliggende Epidermis drives i Vejret (XIV, 17). Snart begynder det at krumme sig, og Epidermiscellerne paa Rygsiden begynde at voxe stærkere end de andre (VIII, 7; XIV, 18). Dette er Begyndelsen til ydre Integument, der snart træder bestemtere frem ved antikline og perikline Delinger (VIII, 8); ydre Integument opstaar meget tydelig tidligere paa Rygsiden end paa Bugsiden. Ogsaa inden for Epidermis findes Delinger og Cellevæxt, der maa tydes som hørende med til Integumentdannelsen. Indre Integument opstaar tydelig langt senere end ydre (se f. Ex. XIV, 13, hvor det lige netop er antydet), undertiden ensidig som dette (VIII, 11; XIV, 19), undertiden omtrent samtidig i hele Omkredsen, altsaa ringformet (VIII, 9).

Indre Integument naar aldrig op over den meget ubetydelige Nucellus; den væsentligste, Kimsækken indeholdende Del af denne ligger frit uden for indre Integument, men helt omsluttet af det ydre (VIII, 10, 12, 13, 15—17; XIV, 9). I f. Ex. VIII, 13 og 15 bestaar Nucellus af 3 indre Celler, omgivne af en sig for neden udkilende Epidermis; den øverste af de 3 Celler er den største. Vi ville nu først holde os til denne. Snittene VIII, 16 og 17 vise indre Integuments to mørkvæggede (mørkebrune) Cellerækker, der omslutte Basis af den lille pære- eller omvendt ægformede eller ellipsoidiske Nucellus-Ende. I Fig. 16 ses tydelig en buet, stærkere lysbrydende Tværvæg gjennem det af Epidermis omsluttede større øvre Rum; i Fig. 17 ses derimod ingen saadan, men en tættere, mere lysbrydende Masse har samlet sig i den øvre Del af Rummet. De to i XIV, 21 afbildede Nucelli vise det indre dannet af en kort Række protoplasmafyldte Celler, og det samme har jeg set anden Steds. Hvad der videre foregaar i Nucellus har Materialet ikke tilladt mig at oplyse; det har ikke været mig muligt at finde Antydning af de sædvanlige i en Kimsæk forekommende Celler (Ægcelle, Synergider o. s. v.), men der er ingen Tvivl om, at i denne øvre (i XIV, 9 mørkere) Del af Ægget danner Kimen sig (se f. Ex. IX, 1, 2), her maa da ogsaa Kimsækken med Tilbehør udvikle sig.

Af Fig. 9, Tav. XIV, faar man det Indtryk, at Nucelli største og derfor maaske ogsaa væsentligste Del ligger neden for den nu omtalte øvre, over indre Integument fremragende Del, og omsluttet af dette mørke indre Integument. I Fig. 10—15, Tav. VIII, vil man se, at denne nedre Del oprindelig er en enkelt Række af nogle ganske faa (omtrent 2) Celler, som omgives af den for neden sig udkilende Overhud paa Nucellus, og som fortsættes ned i Chalaza (se især Fig. 15) af en lignende Cellerække, der begrænses af Integumenterne. Denne nedre Del af Nucellus voxer senere meget betydelig ved Strækning af sine Celler

og tillige ved tøndeformig Udvidning af de midterste, men uden paafølgende Deling af dem; den omsluttende Del af indre Integument voxer lige saa stærkt, men her optræde talrige Delinger; derfor vil et Længdesnit gjennem denne Del af et ældre Æg vise os en stor indre ellipsoidisk Hulhed, gjennem hvilken der ud imod Periferien løbe to yderst tynde Længdevægge, hvorimod der kun hist og her ses en Tværvæg (XIV, 9; se ogsaa VIII, 17). I VII, 28 ses det samme indre Parti af Nucellus med sine tynde Vægge, inden for det mørke indre Integument, men Tværsnittet har truffet et Sted, hvor Udvidningen i Bredden ikke er indtraadt. Men selv om denne ellipsoidiske Del af Nucellus er den største, er den dog ikke den væsentligste; den er altid meget klar og fattig paa Protoplasma, kun hist og her ses en Cellekjærne, Reservenæring (der i saa Fald maatte tydes som en Slags Perisperm) dannes ikke; dette store Rums Bestemmelse er blot at optage Kimen; kun dennes første Anlægstrin findes i den øvre, uden for indre Integument liggende Del af Nucellus; er den bleven lidt ældre, ses den paa Vejen ned i det nedre Rum (IX, 6, 7, hvor den allerede er ført ned i dets allerøverste Del), og i det udviklede Frø fylder den dette helt ud. Til Frøhvide har jeg overhovedet ikke set noget som helst Spor.

Vende vi nu tilbage til Integumenterne, ville vi se, at det mørke indre Integument altsaa bestaar af to Lag Celler; det yderste Lags ere næsten dobbelt saa talrige som det indres (VII, 28), hvad der jo ogsaa ellers saa ofte er Forholdet mellem de to Lag i et indre Integument. Cellerne ere ordnede i Afsnit efter Længden, og Afsnittene ere enten kun dannede af enkelte Cellerækker, eller hyppigere have disse, navnlig midt paa Ægget, delt sig ved Længdevægge (VIII, 26). Disse to Cellelag gjenfindes kun lidet forandrede i det modne Frø (se f. Ex. VIII, 34; VII, 25); de løsnes let fra Frøets af ydre Integument dannede Del og spaltes ved Spiringen (og ved Tryk efter Behandling med Kali) let efter Længden ved fra Mikropyle udgaaende Spalter, som næsten kunne naa til Chalaza (XV, 19, 25).

Fig. 15, Tav. VIII, og lige saa VII, 28 vise, at ydre Integument bestaar af 2—3 Lag Celler, der ere meget tyndvæggede og tidlig fylde sig med Stivelse. Under Frøskallens Udvikling forsvinder denne, i det den aabenbart benyttes til Fortykkelse af det allerydeste Cellelags Vægge. Dettes Celler blive nemlig helt (f. Ex. VII, 25 og XII, 28) eller næsten helt, paa et ubetydeligt nærmest Indersiden liggende Rum nær (f. Ex. VIII, 34), udfyldte med en hvid, i tør Tilstand indskrumpet, i Vand let svulmende Masse, ganske paa samme Maade som yderste Cellelag i Frøskallen af *Linum*, *Cydonia* o. a. (sammenlign VII, 28 med 25). Et modent Frø af *Podostemon Ceratophyllum* ser derfor i tør Tilstand ud som afbildet VII, 26, men i Vand som i VII, 27 (Gjennemsnit); alle Celler i det yderste Lag ere i sidste Tilfælde svulmede ganske betydelig op, og Frøets Overflade er slimet. Den biologiske Betydning af dette Lag omtales senere, under Spiringen. Hos *Dicræa* fandtes det fint, men tæt kornet paa Overfladen (XII, 28). De andre, indre Lag i ydre Integument trykkes sammen

og forsvinde mere eller mindre, saa at der paa deres Plads kun ses et Lag af utydelige brunlige, sammenfaldne Celler (VII, 25; VIII, 34; XII, 28).

Funiculus er yderst kort, og der findes hverken Karstræng i den eller i Raphe, saa lidt som i selve Placenta, naar den fra Blomsterbunden opstigende Stræng undtages, der taber sig i Placentas Midte.

Naar der altsaa, som det vil ses, er blevet visse Punkter uopklarede i Æggenes Udviklingshistorie og, som det vil ses af det følgende, ligeledes i Kimens første Trin, er Grunden de usædvanlig mange Vanskeligheder, som disse Æg frembyde. For det første ere de overordentlig smaa og rives saa let løs fra Placenta, saa at det er meget vanskeligt at faa gode Snit gjennem dem. For det andet ere de saa uigjennemsigtige, dels paa Grund af indre Integuments brune Farve, dels paa Grund af ydre Integuments store Stivelserigdom, at man ikke kan se gjennem dem uden ved Hjælp af klarende Reagenser, der netop ødelægge Indholdet i Cellerne, altsaa det, man skulde undersøge.

Kimen er normal dikotyledon, men ofte noget skjæv, i det det ene Kimblad er større og videre udviklet end det andet (IX, 44), og uden Plumula, saa længe den endnu er hvilende (IX, 34). Kimen er en Del sammentrykket; betragtes den fra «Bredsiden», ses begge Kimbladene, og i denne Stilling ere de fleste Figurer, Tav. IX, tegnede; der maa ogsaa i Frøets Form være noget til Stede, der gjør, at det indtager en bestemt Stilling, naar det lægges paa et fladt og jævnt Underlag, thi fra denne Side er det næsten altid, at Kimen præsenterer sig, naar det paa et Objektglas liggende Frø ved Kali er gjort gjennemsigtigt. «Kantbilleder» af Kimen ses f. Ex. IX, 29 (hvormed Bredsidebilledet Fig. 27 kan sammenlignes), 7 og 12; Tværsnit gjennem Kim ses IX, 35 *b* (35 *a* er set fra Bredsiden), VIII, 34 o. a.).

Jeg har haft Materiale til nogenlunde at følge Kimudviklingen hos *Mniopsis Weddelliana* (Tab. IX). De første Stadier ses Fig. 1 og 2; jeg antager, at Fig. 1 maa forstaas saaledes: Ægcellen har delt sig i 2; i Fig. 2 har den nedre af disse Celler begyndt Delingen ved Dannelsen af to Cellekjærner, den øvre Celle synes derimod at være mindre funktionsdygtig end tidligere eller være paa Vej til at gaa til Grunde. I Fig. 3 er der tydelig en Kimholder, hvis øverste (nærmest Mikropyle liggende) Celler ikke synes funktionsdygtige (?), og et tocellet Anlæg til «den egentlige Kim»; denne er allerede ført ned i øverste Ende af det store ellipsoidiske Rum inden for indre Integument. En tilsvarende Figur ses Fig. 4. Fig. 5 forestiller Kimen set mest fra Enden; en Korsdeling ved lodrette Vægge har fundet Sted; Kimholderens Ende ses stikke frem under Kimen. Fig. 6 viser, at den egentlige Kim grundlægges af to Celler, nemlig en øvre (i Figuren nedad vendt), der danner Hovedmassen af Kimlegemet, og som nu er delt i 8 Celler ved lodrette og vandrette Vægge, og for det andet en Hypofysecelle, der vil vise sig at danne en yderst

ringe Afslutning af Kimens Rodende. I Fig. 8 er Hypofysen begrænset af den med o—o mærkede Væg, og Ækvatorialvæggen gjennem Hovedcellen, ved hvilken denne deles i øvre og nedre Etage, er mærket ×—×. Kimen er saaledes nu delt i 3 Etager: en nederste, dannet af Hypofysen, en mellemste og en øverste. Med disse Navne vil jeg i det følgende for Kortheds Skyld betegne disse indre Afsnit i Kimen.

Kimens nederste Etage. Fig. 9 *a* og *b* vise os nedre Etage delt ved lodrette, korsstillede Vægge; hertil vil svare Fig. 36, der fremstiller et Tværsnit af denne Etage. Den er nu 4-cellet. Følge vi den videre, viser det sig, at denne Etages Celler endnu kun deles ved nogle faa lodrette Vægge, og at de midterste i den hele Etage derpaa ogsaa deles ved nogle perikline Vægge, saaledes som Fig. 25, 31, 33 og 34 vise. Dette ubetydelige Afsnit af Kimlegemet, som herved er opstaaet, maa vel nærmest tydes som repræsenterende den hele Rod, som saaledes altsaa er et enkelt, kun i Midten fordoblet Cellelag. Som Rodhætte kan man maaske betragte den nærmest Kimholderen liggende Halvpart af dette fordoblede Lag. Disse tangentiale Delinger i den hypokotyle Axes Rodende mangle hos andre, men maaske ikke konstant hos hver Art. Jeg har saaledes ikke fundet dem hos *Podostemon Ceratophyllum* (VII, 24), men har her kun haft faa modne og gode Frø til Undersøgelse. Hos *Castelnavia* synes de ligeledes normalt at mangle, og Rodhaar udvikle sig — vel i Afhængighed heraf — lige hen til Kimholderen (XV, 22, 26).

Øverste Etage indbefatter alt det, der i Fig. 8 og de andre Figurer ligger oven for Linien ×—×. Man vil ved at følge Suiten af Figurer se, at denne Linie bliver mere og mere bøjet og brudt, i det dens to Yderpunkter hæves mere og mere i Vejret; i Fig. 9 *a* er den allerede tydelig buet, men der ses ingen Celledelinger i Cellerne oven for den; ligeledes vil man af Fig. 9 *b*, der er samme Kim som 9 *a*, drejet 90° og derfor set fra Kanten, se, at denne Linie bøjer sig i en Bue op mod de Kanten skjærende Meridianvægge, medens den med omtrent uforandret Stilling skjærer de andre, lodret paa Bredsiden staaende Meridianvægge. Paa de følgende Udviklingstrin kommer der antikline eller skraat stillede Vægge til, og som Figurerne vise med nogen Variation i Stillingen. I Fig. 17 er der paa højre Side tilkommet en Væg, som udgaar skraat fra den gjennem Kimens Længdeaxe gaaende Væg og hen til den bøjede Ækvatorialvæg; derved afsættes nedad til en med + mærket indre Celle. I Fig. 18 er der dannet 4 antikline Vægge, af hvilke den ene omtrent støder op til Enden af Meridianvæggen. I Fig. 21 og 35 er der dannet to perikline Vægge, ved hvilke der indadtil afskjæres to med + mærkede Celler, udadtil to omtrent trekantede Celler. Ligesaa i Fig. 22, men her er der i de længere fra Midtaxen liggende Celler dannet flere antikline Vægge. Fig. 23 staar midt imellem 21 og 22. I Fig. 24, 26 og 25 er der tilkommet endnu flere antikline Vægge, og der har derved dannet sig en større Flade af Overhudsceller paa den nu tydelig i Kimblade og Axe udprægede Kim. Resultatet er altsaa dette: øverste Etages Celler eller alle de oven for Linien ×—× liggende Celler danne

Overhuden paa Kimbladenes indre Flade, og tillige nedstammer fra dem en lille Gruppe af omkring Kimens Midtaxe, inden for Overhuden liggende Celler, der i Figurerne ere mærkede med oprette Kors. Jeg formoder, at denne Gruppe er Anlægget til den epikotyle Axe. Paa Fig. 27 og 30—34 vil man ligeledes finde den, men her findes der ikke, som i Fig. 24—26, nogen trekantet Overhudscelle i Bugten uden for. Videst udviklet er den i Fig. 34 afbildede Kim, i hvilken den nævnte Cellegruppe ved fortsatte lodrette og vandrette Delinger er voxet betydelig.

Kimens mellemste Etage. Efter at der saaledes er gjort Rede for, hvad der udvikles af nederste og af øverste Etage i Kimen, er mellemste tilbage. Hele det øvrige i Kimlegemet, altsaa den hypokotyle Axe, Kimbladenes Mesofyl og Overhuden paa deres Rygside, nedstammer fra de fire i Fig. 8 anlagte Celler, som ligge imellem Linierne ×—× og o—o, og som kaldtes mellemste Etage. Udviklingsgangen er omtrent følgende. Efter at de 4 Celler ere anlagte (Fig. 6, 8), opstaar der i hver af dem to perikline Vægge, der gjøre Skjel mellem Epidermis og alt indenfor liggende (Fig. 9, 10, 11, 20, og især 35*a*—*b*). I Epidermis optræder der nu kun antikline Vægge. I de 4 indre Celler fremkomme nye lodrette, med fire af hine perikline parallele (paa Bredsiden lodrette) Vægge (sml. f. Ex. Fig. 9 og 10 med 11 og 35); ved disse sættes der Grænse mellem en inderste omkring Kimens Midtaxe liggende Cellemasse, som i Figurerne er betegnet med Skravering, og et ydre Celleparti, der væsentlig danner Kimbladenes Mesofyl. Dette sidste Parti ses i Fig. 11, 14 og 35*a* at bestaa af kun 1 Celle paa hver Side (i Virkeligheden er der 4 i hele Kimlegemet, se 35*b*); i Fig. 15 ligesaa, men den til højre liggende har strakt sig betydelig i lodret Retning; i Fig. 16 og 17 have begge synlige Celler strakt sig, men i Fig. 16 har den til højre liggende delt sig i to; i Fig. 18 ses to paa hver Side, i Fig. 19 tre paa hver Side, i Fig. 27 tre paa den ene, fire paa den anden Side, i Fig. 24 fire paa hver Side o. s. v. I Fig. 34 ses der paa venstre Side én lang Række af 16 Celler, og paa højre Side en lignende, men som i den nederste Halvdel har delt sig især ved Længdevægge.

Hin midterste, inden for det nu omtalte Vævparti liggende, med Skravering betegnede Gruppe deler sig langt langsommere; den bestaar i Fig. 11, 14—19, 21—24, 27, 30, 35 af kun 4 Celler, af hvilke kun de to ere synlige paa disse Længdesnit. I Fig. 26 ses den til venstre liggende Celle tværdelt, i Fig. 31, 32, 33 ere begge Celler tværdelte, og i Fig. 34 ere endnu flere Celler dannede. Denne inderste Cellegruppe maa betragtes som repræsenterende den hypokotyle Axes inderste og største Del.

Tværsnit gjennem Frø ses VII, 25; VIII, 34; XII, 28.

Spiringen er det — trods gjentagne Frøudsæd — kun lykkedes mig at iagttage hos *Castelnavia*, hvorom ovenfor er talt.

Études sur la famille des Podostémacées.

Par

Eug. Warming.

Deuxième mémoire.[1])

II. Organes végétatifs du *Castelnavia princeps* Tul. & Wedd.

M. Regnell, botaniste suédois bien connu, a eu l'obligeance de m'envoyer du Brésil une riche collection de *Castelnavia princeps* conservée dans l'alcool, en l'accompagnant d'excellentes observations sur le mode de croissance et de développement de cette plante, et je lui en exprime ici tous mes remercîments. J'en ai aussi reçu du Riks-Museum, à Stockholm, quelques exemplaires également conservés dans l'alcool et recueillis par M. Mosén.

Le *Castelnavia princeps* n'a été connu jusqu'ici que dans une phase qui correspond à peu près à mes Fig. 4 et 15, Pl. XIII, et les organes végétatifs en ont aussi été décrits comme «frons dichotome divisa, fastigiatim expansa, foliis genuinis omnino ut videtur destituta» (Weddell, dans De Cand. Prodr. 17, 1873, p. 80). Mais les deux phases que j'ai figurées représentent de vieilles plantes plus ou moins abîmées par les eaux; chez les exemplaires plus jeunes, on trouve des feuilles longues de plusieurs centimètres et élégamment découpées (Pl. XIII, Fig. 1, 2, 5). Elles sont situées sur le bord échancré du corps charnu et irrégulièrement dichotome qui a été appelé «frons», et qui, d'abord creux et à demi dressé (XIII, 1, 2, 3), devient en vieillissant plus plat, plus étendu et adhère enfin tout entier aux pierres et aux rochers (XIII, 4, 15). Ce «frons» est en réalité un corps formé d'un mélange de tiges et de parties basilaires connées des feuilles, un complex de pousses fortement dorsiventrales, dont la position des feuilles et le mode de ramification reproduisent les mêmes caractères, poussés à l'extrême, que j'ai indiqués chez le *Podostemon Ceratophyllum* et le *Mniopsis* (voir mon premier mémoire). Un fragment est représenté en partie vu du côté dorsal (Fig. 3 A), du côté ventral (B) et des flancs droit (C) et gauche (D), en partie étalé à plat et un peu schématisé en E. On voit par cette figure que la ramification est comme celle d'une cyme dichotomique ordinaire; chaque axe porte

[1]) Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr. 6e Série, II, 3, 1882. Mon premier mémoire a paru dans la même série, II, 1, 1881.

deux feuilles (ou dans les générations supérieures seulement une, de même qu'il peut en porter davantage (XIII, 2) dans les générations d'un ordre inférieur à celles de la Fig. 3) et se termine ensuite par une fleur. Ces deux feuilles sont placées alternativement (position $\frac{1}{2}$) sur les flancs de la pousse fortement dorsiventrale, et tournent leurs faces encore plus complètement que chez le *Podostemon* et le *Mniopsis*, de sorte qu'elles en viennent à se trouver dans un seul et même plan, le plan de dorsiventralité, la face ventrale regardant le côté dorsal de la pousse et le bord gastroscope, son axe. Leurs bourgeons sont placés, comme chez les genres ci-dessus mentionnés, à la base notoscope de la feuille mère, et la première feuille de chaque pousse latérale est située sur le côté le plus éloigné de la pousse mère.

Par ce qui précède on comprendra la structure de XIII, 3 E, surtout en s'aidant du diagramme XV, 10 et de l'explication des deux figures. Dans XIII, 3 E, l'axe relativement principal se termine par la fleur 2 et porte les feuilles a et b; l'inférieure a est la feuille mère du bourgeon le plus grand, 3, dont la 1re feuille est a^1 et la seconde, a^2. b est la 2de feuille de l'axe 2 et la feuille mère du bourgeon 4, dont la 1re feuille, détournée de l'axe mère, est b^1 et la 2de, b^2. Ces 4 feuilles sont de la même manière des feuilles mères de bourgeons, à savoir a^1 pour l'axe 5 avec les feuilles y^1 et y^2, a^2 pour l'axe 6 avec les feuilles α et β, b^1 pour l'axe 7 avec les feuilles m et n, et b^2 pour l'axe 8, seulement avec une feuille o. La ramification se poursuit d'après le même type. Les complex de pousses les plus jeunes doivent, à cause du manque de place, saillir plus ou moins fortement entre ceux qui sont plus âgés, et c'est pour cela que le bord de tout le corps ressemblant au frons présente de fortes sinuosités (XIII, 3 B, 3 D, etc.).

Chaque pousse se termine donc par une fleur; mais quand, en se soudant et en continuant de croître, les parties basales des deux feuilles d'une pousse se sont élevées au-dessus de la fleur, celle-ci est profondément cachée entre elles et on n'y arrive que par un canal très étroit (voir la coupe XIII, 14, comme aussi les Fig. 16—19 et les coupes d'une paire de feuilles, 8 a et b, où ce canal est désigné par un astérisque); dans la Fig. 3 E, ces canaux sont marqués par des lignes ponctuées, qui, de l'angle entre les parties libres des deux feuilles, descendent à la cavité où se trouve la fleur. Le corps ressemblant à un thalle est par conséquent formé par la soudure de tiges et de parties basales de feuilles. Quand la floraison commence, les fleurs se font jour à travers les parties des feuilles qui les recouvrent et apparaissent sur le côté dorsal du corps thalloïde (XIII, 15), dont les parties libres des feuilles sont alors le plus souvent réduites à des rudiments; la fructification une fois terminée au commencement de la saison sèche ou lorsque les eaux sont basses, ce corps se dessèche au soleil, blanchit et se présente comme dans la Fig. XIII, 4. Dans les cavités qui renfermaient les fleurs, on ne trouve alors à l'ordinaire que des restes de capsules.

La limbe des feuilles se développe comme chez le *Podostemon Ceratophyllum* (voir XIII, 17, 19; XV, 5, 13). Toutes les nouvelles formations prennent naissance comme ordinairement les feuilles et les émergences, c'est-à-dire sous l'épiderme (XIII, 11, 12).

Les formations siliceuses font défaut. Le tissu fondamental est un parenchyme à grandes cellules et à parois minces, qui devient un peu collenchymateux autour des faisceaux fibro-vasculaires. La ramification de ces derniers est des plus simples; chaque axe

reçoit 1 faisceau qui, dans le réceptacle, envoie des rameaux à l'androcée et au pistil, après avoir d'abord fourni à chacune de ses feuilles un faisceau qui ne tarde pas à se trifurquer, et, à une hauteur indéterminée, ces faisceaux en envoient d'autres aux pousses latérales (XV, 3). La coupe transversale d'un «frons» montrera donc des faisceaux épars, dont les uns se rendent directement aux fleurs et les autres ne s'y terminent qu'après s'être ramifiés (XV, 1, 2); entre les faisceaux, se trouvent de nombreux canaux aboutissant aux fleurs et qui, pour la grandeur et l'aspect, sont tout à fait semblables à ces derniers lorsqu'on les regarde avec un faible grossissement. Les faisceaux fibro-vasculaires se composent de cambiforme, de tubes cribreux(?) et de trachéides.

Haptères. Le «frons» est à un haut degré négativement héliotropique, il s'attache fortement aux inégalités de la surface sous-jacente et se plie, par ex., autour des angles droits des pierres (voir XIII, 4, la partie gauche de la figure). Ses appareils de préhension sont des poils radicaux et des haptères, dont la structure et le développement sont semblables à ceux des haptères mentionnés dans mon premier mémoire (XIII, 6, 7, 9—13; XV, 16). Ils sont exogènes, naissent dans l'épiderme et la couche sous-épidermique et se composent seulement d'un parenchyme formé de grandes cellules, sauf cependant celles de la périphérie, qui sont plus petites et dans lesquelles la croissance par division semble avoir lieu. On ne les trouve que sur les tiges elles-mêmes dans les «corps thalloïdes», et ils les accompagnent souvent dans leurs ramifications en présentant l'image d'une chaîne de montagnes (XIII, 7). Ma première hypothèse, qu'ils pouvaient être des racines métamorphosées (voir mon premier mémoire) a perdu pour moi de sa vraisemblance depuis que j'ai appris à connaître ceux-ci.

Je n'ai pas trouvé de racines chez le *Castelnavia* et je présume qu'il n'en a pas du tout. Il ne se développe pas de racine principale lors de la germination, mais l'extrémité de la tige hypocotyle se couvre de poils radicaux même jusqu'au suspenseur (XV, 15, 18, 19, 22—27); la fonction la plus importante de ces poils est certainement de servir d'haptères et c'est, je suppose, pour servir à la formation des nombreux petits appendices et lobes qu'on y trouve souvent, que les parois à leur extrémité sont plus épaisses que d'habitude (XV, 24, 26, 27).

L'embryon est déjà fortement dorsiventral; sa tige épicotyle se développe plus près du côté dorsal que du côté opposé (XV, 18), et les cotylédons tournent leur limbe en se plaçant comme dans la plante devenue plus âgée (XV, 15; comp. avec la Fig. 23).

III. Organes végétatifs chez le *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul. et le *Dicræa algæformis* Beddome.

Je dois avant tout adresser ici mes sincères remercîments à M. Henry Trimen, directeur du jardin botanique de Peradeniya, à Ceylan, qui a bien voulu m'aider dans mes recherches en m'envoyant des exemplaires conservés dans l'alcool, tant des deux plantes nommées ci-dessus, que d'autres espèces qui feront l'objet d'un mémoire posté-

rieur. Je me suis en outre servi de matériaux secs pris dans des herbiers; c'est ainsi que les Fig. 20, Pl. X; 1, 2, Pl. XII[1]) et 54, 55, Pl. IX, ont été dessinées d'après des plantes desséchées.

Les racines sont ici de deux sortes. Les unes, rampantes, s'étendent sur la surface sous-jacente en s'y fixant, comme celles du *Podostemon* et du *Mniopsis*, par des poils radicaux et par des haptères ayant les mêmes formes que chez ces deux espèces (X, 1, 2, 16—20), mais plus solides. Ces racines paraissent avoir une croissance illimitée, et peuvent produire des pousses radicales. C'est d'elles que naît la seconde forme de racines, les racines verticales, qui ondulent librement dans l'eau comme beaucoup d'algues marines fixées aux rochers de la côte. Ces racines sont faiblement dorsiventrales; elles portent sur leurs deux flancs de petites pousses qui présentent également cette particularité, les unes florales, à leur partie inférieure, les autres végétatives, à leur partie supérieure (X, 20; XI, 1; XII, 1). Lorsque les racines sont rubanaires, comme chez le *Dicræa algæformis*, il peut se trouver en outre quelques pousses sur leur côté dorsal (par ex. XII, 1, en *g*). Ces racines verticales, qui ont été auparavant décrites comme des tiges, ont évidemment une croissance normalement limitée.

Les racines verticales sont à peu près rondes chez le *Dicræa elongata*, mais aplaties, rubanaires ou presque foliacées chez le *Dicræa algæformis* (voir la coupe transversale XII, 4, 5). On y trouve beaucoup de chlorophylle, même dans l'épiderme. Le mode de formation de l'amidon est représenté XI, 20 et XII, 10 (on voit dans la Fig. XI, 16 de l'amidon de formation secondaire).

La coiffe de la racine, chez le *Dicræa elongata*, en couvre l'extrémité tout entière (X, 6, 13); chez le *D. algæformis*, elle est onguiforme, a sa place sur le côté dorsal de la racine (XII, 20—25) et est très insignifiante. J'ai trouvé des branches radicales sans coiffe (XII, 20, 22), mais ne sais si elle manquait dès l'origine ou si elle était tombée. En tout cas, on doit la considérer comme un organe rudimentaire sans importance (voir aussi mon premier mémoire p. 23).

Ramification des racines. Les matériaux dont je dispose ne m'ont pas permis de voir comment se forment les jeunes racines. Mais, en examinant des racines plus âgées, par ex. celles qui sont représentées XII, 20 et 22, on arrive à cette conclusion, que si leur mode de formation n'est pas entièrement exogène, elles doivent certainement, à l'origine, n'avoir été couvertes que de deux ou trois couches du tissu de la racine mère, de même que les pousses radicales qui naissent dans les parties périphériques de la racine (X, 4, 5, 6, etc.); car il n'est pas vraisemblable que les pousses radicales naissent à une grande profondeur dans l'intérieur de la racine mère, par ex. à la périphérie du cylindre central. Par contre, lorsqu'une racine adventive naît d'une vieille racine, elle est toujours endogène (XII, 23).

Ces racines doivent être appelées binaires, quoique dans une autre signification qu'à l'ordinaire. Le tissu fondamental, qui constitue l'écorce, est parenchymateux et d'autant plus collenchymateux et allongé qu'on se rapproche davantage du cylindre central

[1]) J'ai conservé à ces deux plantes le nom de *Dicræa stylosa*, nom que porte l'étiquette écrite par M. Tulasne, bien que je présume qu'elles appartiennent au *D. algæformis* Beddome.

(X, 10, 11, 12). Les méats intercellulaires manquent. Il s'y produit de nombreuses divisions longitudinales et transversales (X, 12; XI, 17, 18). Les racines plates du *Dicræa algæformis* imitent quelquefois d'une manière remarquable la structure des feuilles ordinaires, les nombreuses divisions tangentielles de leur côté dorsal donnant naissance à une espèce de parenchyme en palissade (XI, 22). La saillie sur le côté ventral se forme d'une manière analogue (XII, 5).

La gaîne protectrice manque. Le cylindre central doit être conçu comme formé de deux faisceaux fibro-vasculaires, qui sont à considérer comme collatéraux, de la même manière que les faisceaux ordinaires dans une tige; le phloème se trouve toujours sur le côté dorsal et le xylème, sur le côté ventral, absolument comme chez les espèces mentionnées dans mon premier mémoire (voir XI, 18; XII, 3; III, 11, 15; VI, 3). Qu'il y ait ici deux faisceaux, c'est ce qui résulte des faits suivants. D'abord, on les aperçoit distinctement dans les racines larges, où ces faisceaux sont écartés l'un de l'autre (XII, 4); dans la Fig. XI, 22, on aurait pu indiquer mieux qu'on ne l'a fait qu'ils sont unis par un tissu différent du tissu fondamental. Puis, ils sont très distincts dans les racines très jeunes (XII, 12). En troisième lieu, les pousses radicales forment en général 2 rangées, et les faisceaux fibro-vasculaires qui s'y rendent sont disposés aussi régulièrement que les nervures dans une feuille penninerve; tel est surtout le cas chez le *D. algæformis*, dont la ressemblance avec une feuille se trouve ainsi encore augmentée (voir XII, 20, 22 et, sur la même planche, les parties jeunes des Fig. 1 et 2, dont la dernière représente un fragment rendu transparent par la potasse). Enfin, cette structure correspond à celle des espèces du *Podostemon* et du *Mniopsis*; on voit, par ex., très distinctement deux parties de xylème sur les Fig. III, 15 et VI, 3.

Dans les cylindres centraux, comme ceux qui sont représentés X, 10, 11; XI, 18 et XII, 3, on ne voit pas trace d'une pareille composition; les deux faisceaux y sont réunis, en ce sens que le tissu intermédiaire a pris la même structure qu'eux. L'examen de coupes transversales telles que XI, 18 et XII, 3, montre seulement un certain nombre de cellules, rayonnant plus ou moins distinctement en éventail d'un des côtés, celui du phloème ou le côté dorsal (marqué *dors*), qui se distingue en même temps par la circonstance que les cellules situées en dehors sont plus longues et à parois plus épaisses, et divisées elles-mêmes par de nombreuses cloisons longitudinales irrégulièrement placées. Rien n'indique la présence du xylème et c'est seulement par les coupes longitudinales qu'on apprend qu'il y a des trachéides sur le côté ventral (XI, 15, 16). Mais ces derniers peuvent aussi faire complètement défaut, ou on ne les trouve que dans un des flancs, mais non dans l'autre; il est assez clair qu'ils ne jouent aucun rôle important, et qu'on peut tout au plus regarder le xylème comme rudimentaire. Le reste du faisceau se compose de tubes cribreux et de cellules parenchymateuses à parois minces, dont quelques-unes peut-être peuvent être regardées comme appartenant au xylème (voir le côté droit de la Fig. XI, 15); mais le reste, en tout cas, est du liber mou. Les tubes cribreux sont toujours accompagnés de cellules parenchymateuses de la même longueur qu'eux, et qui évidemment proviennent de la même cellule mère (XI, 16); ces cellules possèdent un noyau et sont riches en protoplasma, tandis que les tubes cribreux sont reconnaissables à l'élargissement de leurs extrémités, à la forme de leurs parois terminales et à leur contenu plus clair, un

peu strié et sans noyau; suivant moi, nous avons affaire ici à des tubes cribreux avec de nombreuses cellules adjointes («Geleitzellen» de Wilhelm). Pour les formes du liber mou, voir XI, 15, 16, 19; XII, 9 (faisceau se rendant à une pousse radicale) et 11.

Je ne doute pas que cette structure anatomique différente ne soit en connexion avec la dorsiventralité des racines, et avec la particularité qu'elles ne peuvent être divisées que par 1 plan de symétrie.

Les pousses radicales, qui sont situées principalement sur les deux flancs des racines, et souvent disposées par paires (X, 20, 22), comme chez le *Podostemon* et le *Mniopsis*, sont endogènes et naissent sous les deux couches de cellules extérieures de la racine, loin du cylindre central, avec lequel elles n'entrent en communication que plus tard (X, 4—6, 8, 14, 15, 21, 22; XII, 21, 23). Les pousses percent ensuite les couches de cellules qui les couvrent, mais la tige des pousses purement végétatives est si insignifiante qu'elle ne s'élève pas au-dessus de la racine mère; on voit seulement une touffe de feuilles très simples émerger d'une ouverture (par ex. X, 21, 22; XII, 4, 6, 22—24), et aussi est-il très difficile de savoir au juste quelle en est la situation. Les pousses florales, par contre, ont un axe distinct sur lequel les feuilles sont disposées en deux rangées, dont l'une regarde l'extrémité de la racine et l'autre s'en détourne, absolument comme chez le *Podostemon* et le *Mniopsis*. Les feuilles sont ensiformes et ont une gaîne large et en forme de bateau, qui reste après la chute du limbe (X, 7; XI, 2—7; XII, 13, 18).

Les pousses florales semblent, quoique sans grande régularité, se développer en général de haut en bas (X, 2, 20; XII, 1).

On voit par là combien les pousses des *Dicræa* sont de peu d'importance, pour ne pas dire rudimentaires, et il est évident que, comme organes d'assimilation, elles sont loin de pouvoir être comparées aux racines.

Si l'on compare les organes végétatifs des Podostémacées examinées jusqu'ici, en prenant pour point de départ le *Podostemon Ceratophyllum*, on arrive aux résultats suivants. La racine de cette espèce est illimitée, à demi ronde, rampante. Les pousses radicales ont une longueur de 5 à 6 centimètres, sont munies de feuilles relativement fortes, et, quoique la racine soit verte, constituent en somme l'organe d'assimilation le plus important. De là dérivent les autres formes en deux séries divergentes. Dans la première, nous n'avons que le *Castelnavia*; autant que j'en puis juger, la racine est complètement(?) absente, les pousses sont les seuls organes d'assimilation et il s'en produit une série de générations extrêmement nombreuses qui se réunissent en un large corps thalloïde. Dans la seconde, nous trouvons d'abord le *Mniopsis Weddelliana* et le *Mn. Glazioviana*; la racine est rampante, illimitée, souvent relativement large et aplatie, mais les pousses sont de moins en moins riches en feuilles, et la ramification n'est peut-être pas aussi vigoureuse que chez le *Podostemon*. Chez le *Dicræa elongata*, on trouve des racines rampantes qui probablement sont illimitées, mais elles donnent naissance à des racines verticales, presque rondes, ondulant librement dans l'eau et très riches en chlorophylle, dont la croissance en longueur a évidemment une limite normale, et sur lesquelles se développent de nombreuses pousses qui, au point de vue végétatif, n'ont presque aucune importance. Chez le *Dicræa algæformis*, ces racines verticales deviennent des corps larges, rubanaires, peut-être plus riches encore en chlorophylle, qui, dans leur structure anatomique et la ramification des faisceaux fibro-

vasculaires, rappellent d'une manière remarquable les feuilles penninerves des Dicotylédones; quant aux pousses radicales, elles sont, si possible, encore plus réduites, et la racine joue ici le rôle qui appartient d'ordinaire à la tige et à la feuille.

J'aurais certainement beaucoup à ajouter pour compléter les observations qui précèdent, mais comme je n'ai eu jusqu'ici à ma disposition que des matériaux desséchés, je n'ai pu pousser mon analyse aussi loin que je l'eusse désiré. J'ai représenté IX, 55 une Podostémacée indéterminée (de l'Inde), qui se rattache directement au *Dicræa algæformis*; la racine est seulement encore plus large et plus courte et ressemble aussi davantage à un thalle. Des formes comme l'*Hydrobryum olivaceum* (IX, 54) sont évidemment des formes extrêmes; le corps thalloïde, lobé et sans doute de couleur verte, qu'on voit étalé sur le substratum, et qui porte des pousses florales manifestement endogènes non plus sur les deux flancs, mais sans ordre sur toute sa surface, est bien certainement une racine. Il est probable que la coiffe ne s'est pas développée et que la ramification est entièrement exogène; mais sur ces points, comme sur d'autres, je ne saurais rien dire avant d'avoir à ma disposition des matériaux conservés dans l'alcool, dont je viens du reste de recevoir envoi grâce à l'obligeance de la Direction du Kew Garden.

Les deux points extrêmes aboutissent ainsi l'un et l'autre à un corps qui reproduit d'une manière frappante la forme thalloïde de certaines Lichénées et Hépatiques, mais qui, un petit dans un cas, est un remarquable complex de pousses et, dans l'autre, une racine remarquablement métamorphosée.

IV. Organes de la fructification chez le *Podostemon Ceratophyllum* Michx., le *Mniopsis Weddelliana* Tul., le *Mn. Glazioviana* Warmg., le *Castelnavia princeps* Tul. & Wedd., le *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul. et le *Dicræa algæformis* Beddome.

Comme ces parties sont si bien connues, surtout grâce à l'excellente monographie de M. Tulasne, je me bornerai ici à relever quelques points, en me référant pour le reste à l'explication des figures. Je remettrai également l'interprétation morphologique de la structure florale jusqu'à l'époque où j'aurai terminé ces études.

Relativement au diagramme de la fleur, on peut remarquer que l'androcée, composée de deux étamines, se trouve toujours sur le côté ventral de la fleur, et que les carpelles sont dans le plan médian (VII, 10; XV, 10, etc.). Les deux stigmates terminaux dans la préfloraison sont inclinés vers l'androcée (VII, 1, 5; XIV, 1, etc.).

En ce qui concerne le développement de la fleur, mes observations n'ont, pour la plupart, eu pour objet que le *Castelnavia*. Sur une base hémisphérique se forme d'abord l'involucre, qui prend naissance sur le côté ventral (XIV, 5, 6, 11). Puis naissent les deux étamines, qui, chez cette plante, ne sont presque pas monadelphes (XIV, 1), et, après elles, se montrent les deux squamules («staminodes»), bien qu'elles soient certainement des feuilles périgoniales et appartiennent par suite à un verticille extérieur. L'axe s'élève

alors plus verticalement, le placenta et les parois de l'ovaire se forment (XIV, 8, 10). Les ovules naissent en ordre acropétal (XIV, 3, 14, 16) et, comme à l'ordinaire, sous l'épiderme (XIV, 17). J'en ai le mieux suivi le développement chez le *Mniopsis Weddelliana*, dont les phases concordent avec toutes celles qui ont été observées chez les autres espèces.

Les ovules ne tardent pas à se courber (XIV, 18; VIII, 7), et deviennent anatropes et amphitropes (XIV, 2) avec un court funicule; ils n'ont pas de faisceaux fibro-vasculaires. Le tégument extérieur se forme bien plus tôt que le tégument intérieur (VIII, 8, 9, 11; XIV, 13); il acquiert une épaisseur de 3 couches de cellules environ, et se remplit de bonne heure d'amidon (VII, 28). Ce dernier disparaît dans les graines, les couches intérieures du tégument y deviennent comprimées, en même temps que les cavités cellulaires dans la couche extérieure ont disparu, et les cellules de cette couche sont remplies ou presque remplies d'une masse mucilagineuse qui se gonfle extraordinairement dans l'eau, absolument comme chez le *Linum*, le *Cydonia*, etc. (comp. VII, 28 avec 25, et 27 avec 26; VIII, 34; XII, 28). Le tégument intérieur se forme seulement dans l'épiderme et se compose de deux couches de cellules; les parois de celles-ci prennent très rapidement une couleur foncée (XIV, 9; VIII, 9—17).

Le nucelle est d'abord constitué par trois cellules intérieures, disposées en une rangée et enveloppées d'un épiderme qui s'amincit vers la chalaze. Il se différencie en deux parties, dont l'une supérieure, pyriforme ou ellipsoïdale, s'élève au-dessus du tégument intérieur (XIV, 9, 21; VIII, 10—17), et a pour fondement celle des trois cellules intérieures susmentionnées qui est placée le plus haut, avec l'épiderme qui l'entoure. De cette grande cellule dérive le sac embryonnaire, et dans cette partie supérieure du nucelle on trouve les premiers états de l'embryon; mais les matériaux dont je dispose ne m'ont pas permis de suivre de près la formation du sac embryonnaire et de ses cellules, qui cependant semblent se produire comme à l'ordinaire (voir les figures citées et IX, 1—3). La partie inférieure du nucelle, qui est recouverte par le tégument intérieur, croît beaucoup en longueur et en largeur, mais sans qu'il se produise des divisions de cellules, et se développe en une grande cavité ellipsoïde, dans laquelle on n'aperçoit que quelques parois de cellules extrêmement minces et çà et là un noyau de cellule. C'est dans cette cavité que l'embryon est très vite amené (voir XIV, 9 et IX, 3, 6, 7) et il finit par la remplir complètement.

J'ai pu suivre en partie la formation de l'embryon chez le *Mniopsis Weddelliana* (Pl. IX). Dans les toutes premières phases, il semble qu'il se forme un court proembryon avec un petit nombre de cellules, lequel ne tarde pas à se différencier en suspenseur et en embryon. Dans IX, 1, le proembryon a 2 cellules; dans IX, 2, la cellule inférieure semble être en train de se diviser, tandis que la cellule supérieure périt. La Fig. 3, Pl. IX, montre le proembryon différencié et l'embryon déjà amené dans la grande cavité du nucelle. L'embryon, dans les Fig. 6 et 8, se compose de 3 étages. L'étage inférieur (l'hypophyse), situé au-dessous de la ligne o——o, n'a encore qu'une cellule, mais se divise bientôt par des cloisons verticales (Fig. 9 a-b, 10, 36) et finit par former une couche ne contenant qu'un petit nombre de cellules et seulement dédoublée au milieu, qui termine l'extrémité radiculaire de l'embryon et doit être considérée comme une radicule rudimentaire qui aboutit au suspenseur (Fig. 34). L'étage supérieur, dans la Fig. 8, est représenté par tout ce qui est au-dessus de la ligne ×——×. C'est de cet étage que tirent leur origine l'épiderme de la

face ventrale des cotylédons et un petit groupe de cellules, marqué de croix verticales (+ +), qui peut être regardé comme le fondement de l'axe épicotyle (voir Fig. 34 et les phases précédentes). L'étage du milieu est placé entre les lignes ×——× et o——o; il donne naissance à l'épiderme de la face dorsale des cotylédons, au mésophylle de ces derniers et à un petit groupe intérieur de cellules, désigné par des hachures, qu'on peut regarder comme la partie hypocotyle de la tige. Un embryon complètement développé est représenté en coupe longitudinale IX, 34, et en coupe transversale VII, 25, VIII, 34 et XII, 28.

Pour ce qui regarde la structure du péricarpe, je ferai remarquer que les cellules de sa couche la plus intérieure sont toujours étalées horizontalement — dans une direction tangentielle — et celles de la couche qui la précède, verticalement, de sorte qu'elles se croisent à angle droit avec les premières (VII, 20—23; VIII, 28, 30—33). Les cellules de cette dernière couche et quelquefois aussi d'autres cellules qui n'en font pas partie, s'épaississent fortement, ce qui est probablement dû à l'amidon déposé en grande quantité dans les parois de l'ovaire (comp. VII, 20 avec 22, VIII, 30 avec 32, 33 et XI, 11 avec 21).

Dans le jeune péricarpe, on voit des faisceaux procambiaux dont les cellules prosenchymateuses s'épaissiront beaucoup plus tard (chez les genres *Podostemon*, *Dicræa*, *Castelnavia* (comp. VII, 21 avec 22 et XI, 11 avec 21); le *Mniopsis* en est dépourvu).

Les squamules («staminodes» des auteurs) sont pourvues, surtout vers le sommet, de grands méats intercellulaires, aussi bien entre les cellules de la périphérie, que plus profondément. Ces méats, qui sont représentés XI, 14, VII, 13 et VIII, 27, peuvent être si nombreux et si grands que les squamules deviennent de véritables treillis de cellules, comme dans la Fig. VII, 13.

Je me réfère, pour le reste, aux figures et à l'explication des planches.

Explication des Planches.

Planche VII.

Podostemon Ceratophyllum Michx.

Fig. 1. Bouton de fleur. L'involucre encore fermé (*sp*) est indiqué par une ligne ponctuée. Les stigmates (*st*) sont inclinés à gauche vers le côté ventral de la fleur, où les étamines et les squamules sont aussi fixées. (Faible grossissement: c. $\frac{1,0}{1}$).

Fig. 2. Coupe transversale d'un jeune involucre.

Fig. 3. Androcée avec ses deux étamines monadelphes et la squamule (*std*^{1}) qui est fixée entre elles. Les lignes ponctuées dans le filament indiquent les faisceaux vasculaires.

Fig. 4. Coupe transversale du filament; le côté plat est tourné vers l'ovaire.

Fig. 5. Sommet de l'ovaire avec les deux stigmates non encore complètement développés. La suture est indiquée au milieu de la surface de l'ovaire.

Fig. 6. Bouton de fleur privé de son involucre et vu du côté ventral. *std*, squamule. *std*^{1}, squamule fixée entre les deux étamines (grossissement c. $\frac{1,0}{1}$).

Fig. 7 [c. $\frac{1,0}{1}$]. Androcée. Cas rare: il y a 3 anthères et deux faisceaux vasculaires indépendants, dont l'un se bifurque.

Fig. 8. Autre cas rare: outre les deux étamines normales monadelphes, avec leurs trois squamules, il y a à droite une étamine rudimentaire indépendante, dont le sommet a la même structure particulière que les squamules (voir Fig. 13).

Fig. 9. Coupe verticale de l'ovaire, montrant la position de 3 ovules; un faisceau vasculaire aboutit au milieu de la base du placenta. On a indiqué un épiderme intérieur d'une nature particulière dans l'ovaire.

Fig. 10. Coupe transversale d'une fleur. *sp*, involucre; *st*, anthères; *std*, squamule; la squamule du milieu, située entre les étamines, est indiquée par un astérisque.

Fig. 11. Coupe transversale de l'ovaire. On a indiqué dans sa paroi l'épiderme intérieur et les 10 faisceaux de sclérenchyme.

Fig. 12. Autre coupe transversale. Ici se présente le cas anormal que le placenta était divisé en deux parties distinctes.

Fig. 13. Sommet et partie d'une squamule située plus près de la base, montrant la structure particulière à claire-voie qui distingue surtout le sommet.

Fig. 14. Coupe transversale d'une anthère, montrant les cellules fibreuses et la place du faisceau vasculaire.

Fig. 15. Montre la forme des cellules épidermiques (*epid.*) et des cellules fibreuses (*fibr*) sous-jacentes de la paroi de l'anthère.

Fig. 16. Deux grains de pollen composés.

Fig. 17 [c. $\frac{1}{1}^{0}$]. Fleur qui vient de se flétrir. Les nervures de l'ovaire ne sont pas encore bien distinctes. On voit à la base les restes de l'involucre.

Fig. 18. Fruit; les nervures sont maintenant très distinctes et apparaissent comme des filets saillants.

Fig. 19. Fruit à peine tout à fait mûr, mais desséché et ouvert; on voit des restes de l'androcée et une squamule.

Fig. 20. Coupe transversale de la paroi d'un jeune ovaire. Les cellules sont remplies d'amidon, comme on l'a indiqué sur une petite partie. Un faisceau de sclérenchyme est aussi coupé (*sc*).

Fig. 21. Coupe analogue, montrant la suture de déhiscence et la cloison qui réunit le placenta avec la paroi de l'ovaire. On n'a pas figuré ici l'amidon des cellules.

Fig. 22. Coupe transversale de la paroi d'un fruit. L'épiderme intérieur (*epi*), la couche sous-épidermique et les faisceaux de sclérenchyme (*sc*) se sont maintenant beaucoup épaissis, tandis que l'amidon a disparu.

Fig. 23. Montre la forme des cellules dans l'épiderme intérieur de la paroi de l'ovaire (*epi*) et de la couche sous-jacente de cellules sous-épidermiques (*sep*). Les premières sont disposées horizontalement et les secondes, verticalement.

Fig. 24. Base d'un embryon montrant le suspenseur, qui est maintenant brun, et l'extrémité radiculaire de l'embryon.

Fig. 25. Coupe transversale d'une graine. Au milieu, on voit les deux cotylédons et, extérieurement à ceux-ci, les deux couches de cellules brun foncé (*ii*) du tégument intérieur. Puis viennent quelques restes indistincts des cellules intérieures du tégument extérieur, et enfin la couche extérieure des cellules gélatineuses, incolores et se gonflant fortement dans l'eau (*epi*), de ce dernier tégument.

Fig. 26. Graine desséchée. Le tégument intérieur brun est visible à travers le tégument extérieur incolore.

Fig. 27. La même graine que Fig. 26, mais dans l'eau et coupée longitudinalement. La couche de cellules extérieure est très gonflée; au milieu on voit l'embryon.

Fig. 28. Coupe transversale d'un ovule. Les cellules du tégument extérieur (*ie*) sont remplies d'amidon. Le tégument intérieur (*ii*) ne renferme que peu d'amidon, mais les parois des cellules sont déjà très brunes. Le milieu est occupé par les cellules transparentes et à parois très minces du nucelle.

Planche VIII.

Mniopsis Weddelliana Tul.

Fig. 1. Fleur en train d'éclore; l'involucre est ouvert au sommet, les stigmates et les anthères apparaissent (c. $\frac{1}{1}^{0}$).

Fig. 2 [$\frac{1}{1}^{0}$]. Fleur complètement épanouie; les anthères sont ouvertes et vides de pollen.

Fig. 3. Un des deux stigmates; il est profondément découpé et très papilleux (voir Fig. 6).

Fig. 4 [$\frac{1}{1}^{0}$]. Après la floraison. Le pédoncule s'est allongé et a porté l'ovaire au-dessus de l'involucre; les étamines sont flétries.

Fig. 5. Coupe longitudinale d'un jeune bouton; *sp*, l'involucre, qui, à sa base, a 4 couches de cellules; *fv*, faisceaux vasculaires qui se rendent dans le réceptacle et envoient de là des ramifications dans le filament et dans l'ovaire.

Fig. 6. Partie d'un stigmate.

Fig. 7—17 [c. $\frac{3\,8}{1}^{0}$]. Phases du développement de l'ovule. 7 est la plus jeune; il n'y a encore aucun tégument. 8: le tégument extérieur (*ie*) se montre le premier. 9: le tégument intérieur apparaît presque en même temps sur tout le contour de l'ovule. 10: nucelle, formé de 2 à 3 cellules intérieures et d'une couche épidermique, et *ii*, tégument intérieur; la cellule supérieure dans l'intérieur du nucelle est très grande. 11: les deux téguments se développent unilatéralement. 12 et 13: nucelle et tégument intérieur. 14: coupe transversale du nucelle près du sommet. 15: coupe longitudinale d'un ovule dont le nucelle se trouve au même degré de développement que dans les Fig. 12 et 13. 16: micropyle d'un ovule à peu près complète-

ment développé; le nucelle s'élève au-dessus du tégument intérieur (*ii*). La grande cellule à son sommet est limitée en bas par une paroi réfringente. 17: coupe longitudinale par la partie située au-dessus et autour du micropyle d'un ovule; *fun*, funicule; *m*, micropyle; le sommet du nucelle s'élève au-dessus du tégument intérieur, qui est reconnaissable aux parois foncées de ses cellules disposées en deux couches. Le tégument extérieur (*ie*) et le funicule sont remplis d'amidon (omis ici). Au sommet du nucelle, en dedans de l'épiderme, on voit une grande cellule à contenu foncé (le sac embryonnaire?), à l'extrémité supérieure de laquelle se trouve une masse fortement réfringente formée peut-être par la compression de plusieurs cellules à parois gonflées.

Fig. 18. Anthère, vue de dedans.

Fig. 19. Deux grains de pollen composés; une des cellules de chaque grain est sphérique et lisse, tandis que l'autre est tétralobée et légèrement verruqueuse.

Fig. 20. Grain de pollen dont les deux cellules sont tétralobées et légèrement verruqueuses.

Fig. 21. Grain de pollen en germination; chaque cellule pousse un tube pollinique.

Fig. 22. Grain de pollen vu de son extrémité, et dont les deux cellules sont tétralobées.

Fig. 23. Jeune grain de pollen dans l'intérieur duquel on voit deux globules (noyaux de cellules?) dans le protoplasma contracté.

Fig. 24. Deux grains de pollen, dont l'un germant.

Fig. 25. Papilles stigmatiques, avec un grain de pollen germant dont l'une des cellules est vue en coupe longitudinale.

Fig. 26. Tégument intérieur (*ii*), avec le nucelle (*nuc*) d'un ovule.

Fig. 27. Sommet d'une squamule complètement développée (*b*) et coupe transversale d'une autre très jeune (*a*).

Fig. 28. Les deux couches de cellules les plus internes dans la paroi de l'ovaire. *epi*, l'épiderme.

Fig. 29. Coupe transversale de l'ovaire; le côté dorsal est tourné en bas.

Fig. 30. Fragment de la paroi d'un jeune ovaire en coupe transversale. Les cellules en sont remplies d'amidon, ici omis.

Fig. 31. Fruit ouvert; la plus petite des valves (la ventrale) est tombée.

Fig. 32 et 33. Coupe de la paroi d'un fruit mûr; *epi*, épiderme intérieur.

Fig. 34. Coupe transversale d'une graine. Intérieurement, on voit en coupe les deux cotylédons entourés des cellules encore bien conservées (*ii*) du tégument intérieur. Puis apparaît le tégument extérieur, dont les couches cellulaires extrêmes ont des parois si épaisses qu'il ne reste plus intérieurement qu'un très petit lumen. Les autres cellules sont comprimées.

Planche IX.

Fig. 1—35. *Mniopsis Weddelliana* Tul.

Le grossissement, pour toutes ces figures, est de c. $\frac{300}{1}$ — $\frac{380}{1}$.

Fig. 1. Proembryon à deux cellules. Au-dessus et sur les côtés, on voit l'épiderme du nucelle.

Fig. 2. Proembryon formé de deux cellules, dont l'inférieure a deux noyaux et se divisera bientôt par une cloison transversale. Au-dessus, une partie de l'épiderme du nucelle.

Fig. 3. Le proembryon s'est différencié en suspenseur (à 3 ou 4 cellules) et en embryon. L'embryon est déjà en train de passer dans la grande cavité inférieure.

Fig. 4. Jeune embryon.

Fig. 5. La cellule terminale du protoembryon, qui constitue la masse principale du corps embryonnaire, est divisée ici en 4 cellules par des cloisons verticales (elle est vue d'en haut, tandis que le suspenseur est vu de côté).

Fig. 6. Jeune embryon, vu de côté. Sa partie supérieure presque sphérique est divisée en 8 cellules par des cloisons transversales et longitudinales; au-dessus, on voit la cellule d'où la radicule tire son origine (l'hypophyse) et une partie du suspenseur; sur les côtés de l'embryon, on a tracé deux lignes qui marquent les limites de la grande cavité, en dedans du tégument intérieur, où l'embryon sera renfermé.

Fig. 7. Embryon au même degré de développement que la fig. 6, mais la face dorsale des cotylédons tournant vers le spectateur, tandis que la fig. 6 et la plupart des autres figures sont vues du côté latéral, plus large.

Fig. 8. Jeune embryon, vu du côté large.

Fig. 9. Embryon un peu plus âgé, vu du côté large (côté latéral) (*a*) et du côté dorsal (*b*).

Fig. 10—11. Embryons, vus du côté large.

Fig. 12. Embryon, vu du côté dorsal.

Fig. 13. Embryon vu du côté dorsal, en coupe longitudinale.

Fig. 14—19. Embryons à peu près du même âge vus du côté large, en partie avec les cellules du suspenseur.

Fig. 20. Embryon vu du côté dorsal (*a*) et de l'extrémité supérieure, en coupe transversale.

Fig. 21—26. Embryons de différents âges, vus du côté large, avec une cellule presque triangulaire en coupe longitudinale, à la base inférieure des cotylédons.

Fig. 27. Embryon vu du côté large.

Fig. 28 et 29. Embryon vu du bord (Fig. 29) et en coupe longitudinale (Fig. 28).

Fig. 30—34. Embryons de différents âges, vus du côté large et qui n'ont pas de cellule triangulaire à la base inférieure des cotylédons.

Fig. 35. Embryon, vu du côté large (*a*) et en coupe transversale (*b*), correspondant à peu près à la Fig. 23, *b*.

Fig. 36. Extrémité radiculaire d'un embryon, en coupe transversale.

Fig. 37—53. *Mniopsis Glazioviana* Warmg.

Fig. 37 [$\frac{1,0}{1}$]. Partie supérieure d'une plante défleurie. L'axe principal porte les feuilles *m*, *n* (dithèque) et *o*, et se termine par un jeune fruit I qui, à la base, est entouré de l'involucre. La feuille *n* est mère d'une pousse latérale qui porte la feuille *a* et se termine par un fruit (tombé).

Fig. 38—40 [$\frac{3}{1}$]. Trois plantes portant de jeunes fruits; la dernière est vue de derrière. Les feuilles ont été si maltraitées par les courants que, de la plupart, il ne reste que quelques parties de la base [Glaziou, n° 13144].

Fig. 41 [$\frac{1\,6\,0}{1}$]. Sommet d'une squamule.

Fig. 42. Stigmate.

Fig. 43. Coupe transversale d'une fleur; on voit dans l'étamine deux faisceaux vasculaires (les squamules sont omises).

Fig. 44. Deux embryons.

Fig. 45 [$\frac{3\,0\,0}{1}$]. Coupe transversale de la paroi capsulaire.

Fig. 46. Jeune fruit qui porte encore ses deux stigmates. On voit la suture de déhiscence descendre obliquement des stigmates à la base de l'androcée.

Fig. 47 [$\frac{1,5}{1}$]. Coupe longitudinale d'un bouton.

Fig. 48 [$\frac{1,0}{1}$]. Pousse dont la fleur est encore en bouton. Sur son côté dorsal tourné en avant, on voit (en *x*) le sommet d'une petite écaille représentée isolée en *b*.

Fig. 49 [$\frac{2,6}{1}$]. Forme anormale de l'androcée (vue de dehors). L'étamine non habituelle *a* est stérile.

Fig. 50 [$\frac{2,6}{1}$]. Forme habituelle de l'androcée, vue de dedans; la squamule gauche est omise.

Fig. 51. Grain de pollen formé de deux cellules, dont l'une tétralobée et l'autre globuleuse.

Fig. 52. Grain de pollen formé de 2 cellules à 5 lobes, vu de son extrémité.

Fig. 53 [$\frac{2,6}{1}$]. Coupe transversale d'une tige et d'une feuille. *dors* désigne le côté dorsal de la tige. Les parties obscures *koll* désignent du collenchyme.

Fig. 54 [$\frac{3}{1}$]. **Hydrobryum olivaceum** (Gardn.) Tul.

Fig. 55 [$\frac{1}{1}$]. **Podostemon** (sp. indeterminata) leg. Dr. Ritchie.

Planche X.

Dicræa elongata (Gardn.) Tul.

Fig. 1. Plante en grandeur naturelle. La partie enlevée a sa place en *.

Fig. 2—3. Fragments d'une autre plante en grandeur naturelle.

Fig. 4—5 [$\frac{5,0}{1}$]. Coupe longitudinale d'une plante, montrant la formation endogène des pousses. Les couches de cellules couvrant la pousse représentée Fig. 4 commencent à se détacher en *. *fv*, faisceau vasculaire.

Fig. 6. Extrémité d'une racine, avec une coiffe et 6 pousses qui n'ont pas encore percé leur enveloppe, en coupe longitudinale.

Fig. 7 [$\frac{2,6}{1}$]. Fragment d'une racine plus âgée avec deux pousses, dont l'inférieure porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d* et *e*, cette dernière conservant encore une partie de son limbe, tandis que *d* l'a perdu. Les feuilles de la pousse supérieure sont plus complètes; on entrevoit la fleur en *fl*.

Fig. 8. Pousse qui se fait jour à travers son enveloppe.

Fig. 9 [$\frac{1,0}{1}$]. Extrémité d'une racine, avec cinq pousses d'âge différent qui ont percé leur enveloppe et sept, désignées par des astérisques, qui sont encore renfermées dans la racine. La feuille la plus âgée (*a*) de chacune des cinq pousses est la plus éloignée du spectateur.

Fig. 10 [$\frac{1,6,0}{1}$]. Coupe transversale d'une racine.

Fig. 11. Partie moyenne plus fortement grossie d'une racine semblable.

Fig. 12 [$\frac{1,6,0}{1}$]. Coupe longitudinale de l'écorce d'une racine.

Fig. 13. Extrémité d'une racine avec une coiffe bien distincte traitée par la potasse.

Fig. 14 [$\frac{1,0}{1}$]. Fragment d'une racine dont les pousses se sont fait jour; la feuille la plus âgée de chaque pousse est tournée vers le spectateur.

Fig. 15 [$\frac{2,6}{1}$]. Fragment d'une racine, avec trois pousses dont la première feuille s'est fait jour.

Fig. 16—19 [c. $\frac{3}{1}$]. Parties basales de racines verticales, et racines rampant horizontalement (*r*), avec des haptères.

Fig. 20. Plante en grandeur naturelle (d'après des matériaux desséchés), avec trois racines verticales florifères flottant dans l'eau et issues d'une racine qui rampe horizontalement.

Fig. 21. Coupe verticale d'une racine, montrant la base d'une pousse dont la plus jeune feuille est marquée *fol.* *fv* désigne en partie le cylindre central de la racine, en partie le faisceau vasculaire qui va de ce dernier à la pousse.

Fig. 22 [$\frac{2}{1}$]. Extrémité d'une racine avec des pousses végétatives.

Planche XI.

Fig. 1—20. *Dicræa elongata* (Gardn.) Tul.

Fig. 1. Plante en grandeur naturelle.

Fig. 2—4 [$\frac{1,0}{1}$]. Trois pousses superposées, du même côté de la racine dessinée Fig. 1; sur la Fig. 4, on voit une fleur renfermée entre les feuilles. Dans la Fig. 3, il y a sans doute eu une feuille en *.

Fig. 5. Pousse florifère, vue du côté dorsal; la fleur est épanouie.

Fig. 6. Pousse florifère, vue du côté ventral; la fleur est encore en bouton.

Fig. 7. Fragment d'une racine avec deux pousses florifères, vu du côté dorsal; *b* est vu en *b'* du côté ventral.

Fig. 8. Partie supérieure de l'androcée, vue de dedans.

Fig. 9. Bouton de fleur après l'enlèvement de l'involucre.

Fig. 10. Partie supérieure du pistil dans une fleur éclose.

Fig. 11 [$\frac{1,6,0}{1}$]. Coupe transversale de la paroi d'un ovaire; le contenu des cellules en amidon est en partie indiqué.

Fig. 12. Coupe transversale de l'ovaire.

Fig. 13. Trois grains de pollen, dont deux sont germants; *c* est vu en coupe longitudinale.

Fig. 14. Partie d'une squamule.

Fig. 15. Coupe longitudinale du cylindre central d'une racine; *phl*, phloème; *xyl*, xylème.

Fig. 16. Coupe semblable; *m*, cellules corticales avec des grains d'amidon; *ad*, cellules adjointes (cellules compagnes); *cr*, tubes cribreux; à droite, les trachéides du xylème.

Fig. 17. Coupe transversale de l'écorce d'une racine; la flèche est dirigée vers la périphérie.

Fig. 18. Coupe transversale du cylindre central et des parties limitrophes de l'écorce d'une racine; *xyl* désigne le côté du xylème, *dors*, celui du phloème et le côté dorsal.

Fig. 19 [$\frac{380}{1}$]. Coupe longitudinale du phloème; autour des tubes cribreux, on voit des cellules adjointes.

Fig. 20. Grains de chlorophylle et d'amidon d'une racine.

Fig. 21—22. *Dicræa algæformis* Beddome.

Fig. 21. Coupe transversale d'une vieille paroi capsulaire, dont les cellules extérieures à parois minces sont en partie dissoutes.

Fig. 22 [$\frac{50}{1}$]. Coupe transversale de la racine plate rubanaire et de son cylindre central binaire; *ep*, épiderme de la face intérieure (ventrale).

Planche XII.

Fig. 1—2. *Dicræa stylosa* Wight (exemplaires desséchés).

Fig. 1. Plante en grandeur naturelle. *gg* désignent des pousses qui naissent sur la face dorsale de la racine plate rubanaire.

Fig. 2. Fragment de racine rendu transparent, de manière à montrer la ramification des faisceaux vasculaires dans la racine. *g* est une pousse éloignée des bords de la racine.

Fig. 3—29. *Dicræa algæformis* Beddome.

Fig. 3. Coupe transversale du cylindre central et de l'écorce contiguë d'une racine; il n'y a pas trace ici de la structure binaire du cylindre. *x*, xylème; *ph*, phloème; *dors* désigne le côté dorsal du cylindre.

Fig. 4. Coupe transversale d'une racine dans sa partie la plus plate; *g*, pousse où se rend un faisceau vasculaire partant du cylindre central, qui est distinctement binaire.

Fig. 5. Coupe transversale d'une racine dans sa partie la moins rubanaire.

Fig. 6. Partie d'une coupe transversale d'une racine; une pousse est coupée de manière qu'on en puisse voir les trois feuilles *a*, *b* et *c*.

Fig. 7. Partie semblable; l'épiderme de la face inférieure est divisé par des cloisons périclines.

Fig. 8 [$\frac{10}{1}$]. Androcée (d'un bouton), vue de dedans.

Fig. 9. Coupe longitudinale d'une racine; un des faisceaux vasculaires qui se rendent dans les pousses est coupé longitudinalement; *cr*, tubes cribreux; *ad*, cellules adjointes (= cellules compagnes Jancz.), qui ont toutes des noyaux. Autour du faisceau ci-dessus, on voit le parenchyme de l'écorce.

Fig. 10. Grains de chlorophylle de la racine, formant de l'amidon.

Fig. 11. Coupe longitudinale du cylindre central d'une racine, montrant des tubes cribreux et des formes particulières de cellules adjointes.

Fig. 12. Coupe transversale du cylindre central d'une toute jeune racine, lequel se montre formé de deux parties encore bien distinctes; dans la face tournée vers *x*, se forme le xylème et dans la face opposée, le phloème, qui est en même temps limité par des cellules à parois plus réfringentes et marquées dans la figure d'une teinte plus foncée.

Fig. 13, 14. Pousse, vue du côté dorsal et du côté ventral; *st*, anthère.

Fig. 15, 16. Pousse florifère, vue du côté dorsal et de flanc; *st*, anthères; *sq*, squamule.

Fig. 17. Base d'une pousse, vue du côté dorsal, dont les feuilles supérieures montrent distinctement leur dos caréné; *sp*, involucre.

Fig. 18. Pousse florifère, vue de flanc; en bas, les restes des feuilles végétatives sont inclinés à gauche (vers le côté ventral); au-dessus, on voit l'involucre, qui est surmonté du pédoncule et de parties de la fleur.

Fig. 19. Androcée, vue de dedans; *sq*, squamules; les anthères sont ouvertes.

Fig. 20. Fragment d'une racine, dont les rameaux portent en partie une coiffe, et dont le cylindre central et les faisceaux vasculaires sont indiqués par des lignes ponctuées.

Fig. 21. La première feuille d'une pousse radicale a dissous les cellules placées au-dessus, en *, et percera bientôt la surface de la racine.

Fig. 22. A, fragment de racine en grandeur naturelle. B, le même grossi [c. $\frac{3}{1}$] et déployé pour qu'on puisse mieux voir la ramification des faisceaux vasculaires. Les premières feuilles apparaissent dans plusieurs pousses.

Fig. 23 [$\frac{10}{1}$]. Jeune racine, naissant d'une vieille; elle porte quatre pousses radicales, dont trois ont percé les couches de cellules qui les recouvraient.

Fig. 24 [$\frac{10}{1}$]. Sommet d'une racine; les trois pousses radicales plus jeunes sont encore complètement renfermées dans la racine; les quatre autres l'ont percée et portent des feuilles qui se sont fait jour à travers le tissu de la racine.

Fig. 25. Extrémité supérieure d'une racine avec la coiffe.

Fig. 26. Une pousse encore renfermée dans la racine a été traitée par la potasse de manière à rendre visible la place de ses deux premières feuilles (comp. Fig. 24, la pousse plus âgée).

Fig. 27. Sommet d'un pistil; dans les deux stigmates, il y a des grains de pollen en germination.

Fig. 28. Coupe transversale d'une graine; *a*, couche de cellules extérieure et gélatineuse; *b*, couches intérieures de l'enveloppe de la graine, provenant du reste du tégument extérieur et du tégument intérieur.

Fig. 29. Coupe transversale d'une fleur. *sq*, squamules; *dors* désigne le côté dorsal de la fleur (un faisceau de sclérenchyme a été oublié).

Planche XIII.

Castelnavia princeps Tul. & Wedd.

Fig. 1 [$\frac{1}{1}$]. Partie d'une jeune plante en grandeur naturelle, vue du côté dorsal.

Fig. 2 [$\frac{1}{1}$]. Partie d'une jeune plante, vue du côté ventral; la pousse dirigée à gauche porte les feuilles *a*, *b*, *c*, *d*, ...; au milieu, on voit une pousse dont les deux premières feuilles sont marquées β et γ; *x* est une feuille n'appartenant à aucune de ces deux pousses.

Fig. 3 [$\frac{2}{1}$]. Parties basales d'une plante un peu plus âgée, vue de différents côtés: *A*, du côté dorsal et *B*, du côté ventral, avec la ligne médiane de la pousse principale tournée vers le spectateur; *C* et *D*, les deux parties latérales du même complex de pousses, vues de dehors (côté ventral). *E* montre toute la plante supposée étendue sur un plan et vue du côté ventral; elle est supposée en même temps transparente, de sorte qu'on entrevoit toutes les cavités qui renferment les fleurs (marquées 1, 2, 3 etc.), ainsi que les canaux (les lignes ponctuées) qui y conduisent. Pour plus de détails, voir le texte.

Fig. 4 [$\frac{1}{1}$]. Pierre sur laquelle sont fixés quelques exemplaires desséchés et fructifères de cette espèce; ils descendent à gauche sous un angle presque droit sur l'autre face de la pierre. (Dessin de M. Théodore Holm.)

Fig. 5. Fragment d'une feuille.

Fig. 6 [$\frac{1}{1}$]. Partie basale d'une plante, vue du côté ventral et de flanc, pour montrer la position des haptères.

Fig. 7 [$\frac{1}{1}$]. Partie d'une autre plante, vue du côté ventral et montrant les haptères.

Fig. 8. Deux coupes transversales d'une paire de feuilles. La coupe *a* est faite en bas là où les deux feuilles sont complètement soudées; le canal qui conduit à la fleur est indiqué par un astérisque. La coupe *b* passe plus haut, à peu près à l'endroit où les deux feuilles se séparent; l'ouverture du canal est environ en *.

Fig. 9. Coupe longitudinale à travers la périphérie d'un haptère.

Fig. 10. Coupe longitudinale d'un haptère et du parenchyme contigu, riche en amidon, de la pousse mère.

Fig. 11. Périphérie d'un haptère avec deux poils radicaux, en coupe longitudinale.

Fig. 12. Partie d'une coupe longitudinale d'un haptère.

Fig. 13. Coupe longitudinale de la partie basale d'un haptère.

Fig. 14. Coupe transversale d'un canal conduisant à une fleur et du parenchyme environnant.

Fig. 15 [$\frac{2}{1}$]. Vieille plante en fleur, dont les parties foliaires libres ont été abîmées par des tourbillons d'eau et ont disparu. Les fleurs se sont fait jour à travers les parties foliaires qui les recouvraient.

Fig. 16. Partie d'une coupe longitudinale d'un complex de trois pousse; *m* et *n*, parties basales de deux feuilles entre lesquelles un canal descend à la fleur, dont on voit en *a* quelques parties (androcée, etc.). Les lignes ponctuées indiquent la marche des faisceaux vasculaires vers les feuilles et les trois fleurs atteintes par la coupe.

Fig. 17. Jeune feuille, vue de côté; dans un plan plus en arrière (pas à l'aisselle de la feuille), on voit la fleur qui en termine l'axe.

Fig. 18. Coupe longitudinale à travers plusieurs pousses. On voit les parties de trois fleurs; le canal allant à *b* est atteint par la coupe dans toute sa longueur, mais on n'aperçoit que l'orifice intérieur du canal conduisant à *a*, et le canal correspondant à *c* n'est pas visible. Les lignes ponctuées représentent les faisceaux vasculaires.

Fig. 19. Jeunes feuilles et jeunes fleurs. *a* et *b* appartiennent à un axe dont on ne voit pas la fleur terminale, mais seulement le canal y conduisant, qui est coupé obliquement. *a* est la feuille-mère d'un bouton qui n'a qu'une seule feuille, α, et dont la fleur se voit entre α et *a*; *b* est mère d'un bouton dont la seule feuille β est en partie enlevée et dont la fleur se voit entre β et *b*.

Planche XIV.

Castelnavia princeps Tul. & Wedd.

Fig. 1 [c. $\frac{10}{1}$]. *A*, parties florales d'un bouton après l'enlèvement de l'involucre, vues du côté ventral; *B*, les mêmes, du côté dorsal; *C*, les mêmes, de flanc.

Fig. 2. Coupe longitudinale d'un jeune ovaire.

Fig. 3. Coupe longitudinale d'une jeune fleur. Les ovules commencent à naître sur le placenta.

Fig. 4. Coupe longitudinale par le bord d'un jeune involucre qui ne s'est pas encore complètement fermé en haut.

Fig. 5. Jeune fleur; le canal qui aboutit à l'extérieur est indiqué par une ligne ponctuée.

Fig. 6. Coupe longitudinale d'une jeune fleur semblable, un peu plus âgée; l'involucre a commencé de se former tout autour.

Fig. 7. Fleur dont les deux étamines sont formées; il n'y a pas encore trace de squamules.

Fig. 8. Fleur dont l'involucre en atteint déjà la demi-hauteur; outre les étamines (*st*), les squamules (*sq*) ont aussi fait leur apparition et l'ovaire (*ov*) s'élève en forme de bourrelet très bas tout autour du placenta (*p*).

Fig. 9. Ovule en coupe longitudinale. Les deux couches de cellules du tégument intérieur (*ii*) se distinguent par leur couleur foncée. *nuc*, nucelle.

Fig. 10. Coupe longitudinale d'une fleur un peu plus âgée que celle représentée Fig. 8.

Fig. 11. Dessin histologique de la coupe longitudinale d'une fleur qui est au même degré de développement que celle représentée Fig. 6. *sp*, involucre.

Fig. 12, 13. Deux phases du développement des ovules, tracé de leurs contours.

Fig. 14. Coupe longitudinale d'une jeune fleur un peu plus âgée que celle représentée Fig. 3.

Fig. 15. Coupe transversale d'une fleur; les squamules ne sont pas indiquées.

Fig. 16. Jeune placenta en coupe longitudinale.

Fig. 17, 18. Deux tout jeunes ovules.

Fig. 19, 20. Nucelle et tégument intérieur de deux jeunes ovules correspondant à peu près aux Fig. 13 et 12.

Fig. 21. Partie supérieure des nucelles de deux ovules presque complètement développés.

Fig. 22. Partie de la coupe transversale d'une jeune anthère. Il y a, comme d'ordinaire, des divisions de cellules sous-épidermiques, mais moins régulières.

Fig. 23. Toute jeune androcée d'un bouton, vue de dedans.

Fig. 24. Coupe transversale de la paroi d'une anthère.

Fig 25. Deux grains de pollen, dont l'un en coupe transversale optique.

Fig. 26, 27. Deux coupes transversales d'une fleur et des parties environnantes, avec l'indication des faisceaux vasculaires. La Fig. 26 montre la coupe passant par la base de la fleur et par les deux faisceaux, ici déjà séparés (*st*), qui vont à l'androcée. La coupe Fig. 27 passe plus haut. La paroi de l'ovaire est anormale, les faisceaux y étant plus nombreux qu'à l'état normal; les étamines (*st*) et les squamules sont coupées.

Planche XV.

Castelnavia princeps Tul. & Wedd.

Fig. 1. Coupe par la partie basale d'un système de pousses; on voit différents faisceaux vasculaires, parmi lesquels ceux marqués I, *a* et *b* se rendent respectivement à la fleur la plus âgée et à ses feuilles *a* et *b*. Le faisceau *b* et les faisceaux les plus voisins se réunissent plus bas en un faisceau unique, ce qu'on a indiqué par des lignes ponctuées.

Fig. 2. Coupe passant un peu plus haut par les mêmes pousses On voit en I la cavité de la fleur I, et II, III et IV sont des cavités correspondant à d'autres fleurs. Des deux faisceaux de la feuille *a*, l'un est en train de se diviser; le faisceau de *b* s'est divisé en 2 autres, dont l'un plus haut se divisera aussi (v. Fig. 3). Parmi les autres faisceaux, *m* et *n* vont directement aux deux feuilles appartenant à la pousse qui se termine par la fleur II.

Fig. 3. Coupe passant encore plus haut par les mêmes pousses, mais avec la ramification des faisceaux vasculaires de plusieurs coupes précédentes représentée schématiquement.

Fig. 4. Coupe transversale d'un jeune lobe foliaire.

Fig. 5. Contours d'une jeune feuille, vus de dedans.

Fig. 6, 7 [c. $\frac{7}{1}$]. Fruit mûr mais non ouvert, vu respectivement du côté dorsal et de flanc.

Fig. 8, 9. Les deux valves d'une capsule mûre.

Fig. 10. Diagramme d'un complex de pousses. L'axe principal porte les feuilles *a* et *b* et se termine par la fleur I. La feuille *a* est la feuille mère de la pousse 2, qui porte les feuilles α et α' et se termine par la fleur 2. La feuille *b* est la feuille mère de la pousse qui se termine par la fleur 3 et porte les feuilles β et β'. En commençant par la gauche, nous trouverons ainsi:

m	feuille mère de	8	ne portant que	1 feuille.
n	—	9	—	— —
α	—	4	portant les feuilles	*m* et *n*.
α'	—	6	—	— *q* et *r*.
r	—	12	ne portant qu'une	feuille.
s	—	13	portant deux	feuilles.
t	—	14	—	—
β'	—	7	—	les feuilles *s* et *t*.
β	—	5	—	les feuilles *o* et *p*.
p	—	11	—	deux feuilles.
o	—	10	—	—

Fig. 11, 12. Coupes longitudinales de deux jeunes lobes foliaires.

Fig. 13. Jeune lobe foliaire, vu de dedans.

Fig. 14. Coupe transversale d'une partie de la paroi d'un jeune ovaire; la partie la plus mince, à gauche, est la suture de déhiscence.

Fig. 15. Plantule, vue du côte dorsal; les cotylédons sont tournés de manière que leur face supérieure regarde le spectateur.

Fig. 16. Groupe d'haptères, dont quelques-uns se sont attachés à une petite pierre; vu de côté.

Fig. 17. Parties d'une fleur flétrie; à gauche, on voit les deux longs filaments après la chute des anthères.

Fig. 18. Embryon, vu de flanc; à gauche, le côté dorsal où l'on voit la plumule se développer.

Fig. 19. Embryon, vu de flanc. L'enveloppe séminale reste encore à l'extrémité des cotylédons. L'extrémité de la radicule est représentée grossie dans la Fig. 24.

Fig. 20, 21. Éléments anatomiques des nervures dans la paroi d'une capsule mûre.

Fig. 22. Extrémité de la radicule d'un embryon, en coupe longitudinale.

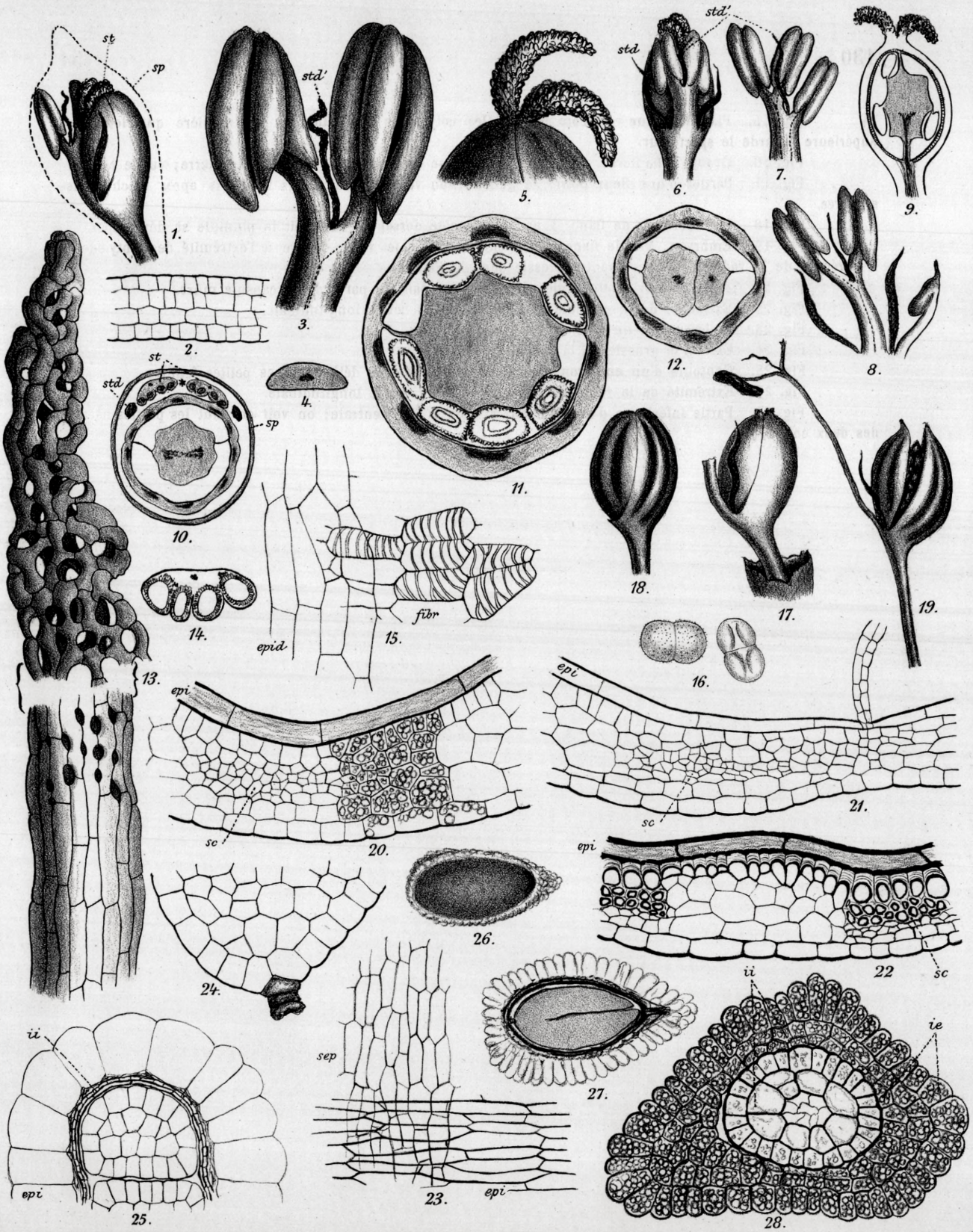
Fig. 23. Embryon, vu du côté ventral.

Fig. 24. Extrémité grossie de la radicule de la Fig. 19.

Fig. 25. Contours d'un embryon dont la plumule présente déjà quelques petites feuilles.

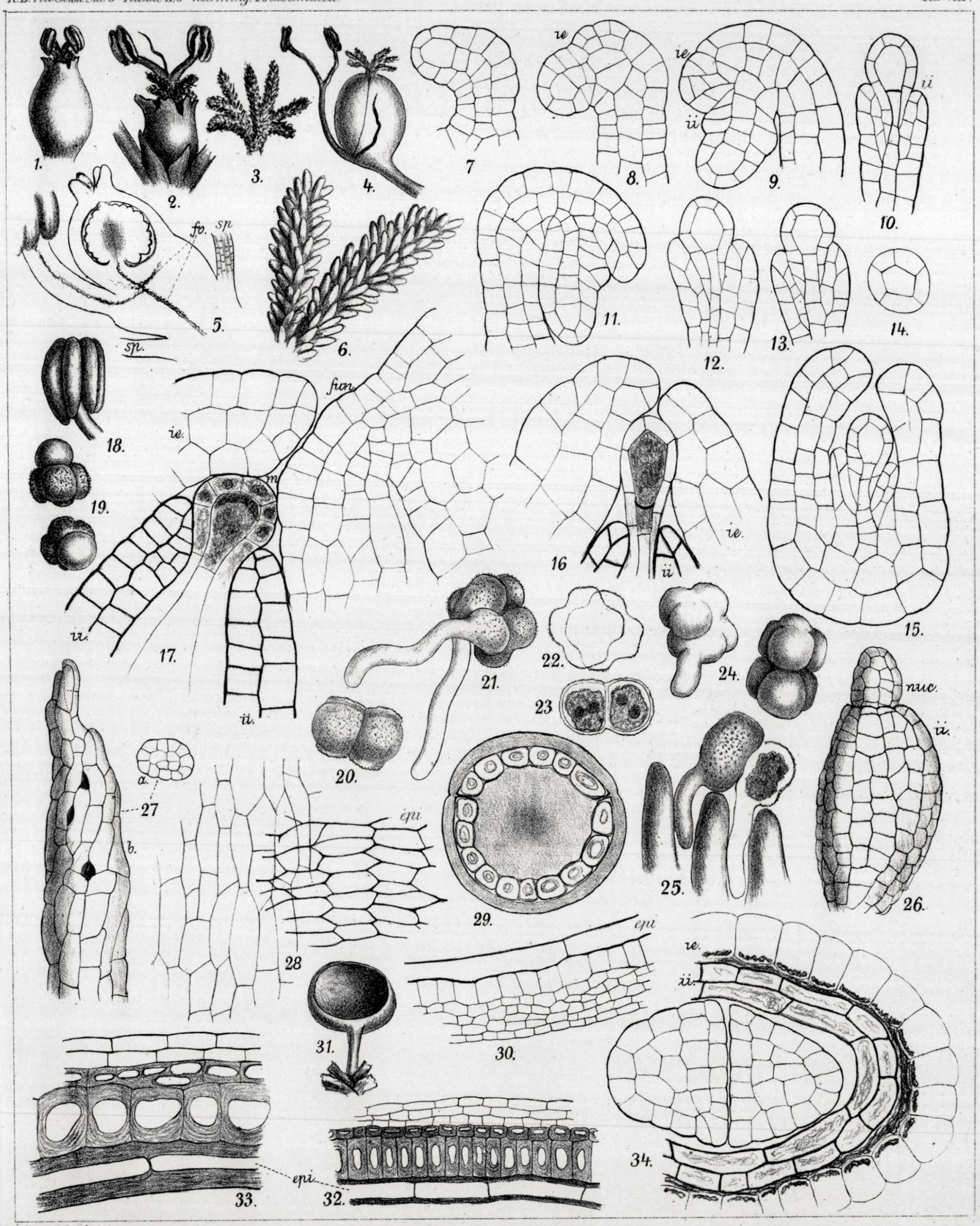
Fig. 26. Extrémité de la radicule d'un embryon, en coupe longitudinale.

Fig. 27. Partie inférieure d'un embryon, vue de la face ventrale; on voit en haut les parties basales des deux cotylédons.



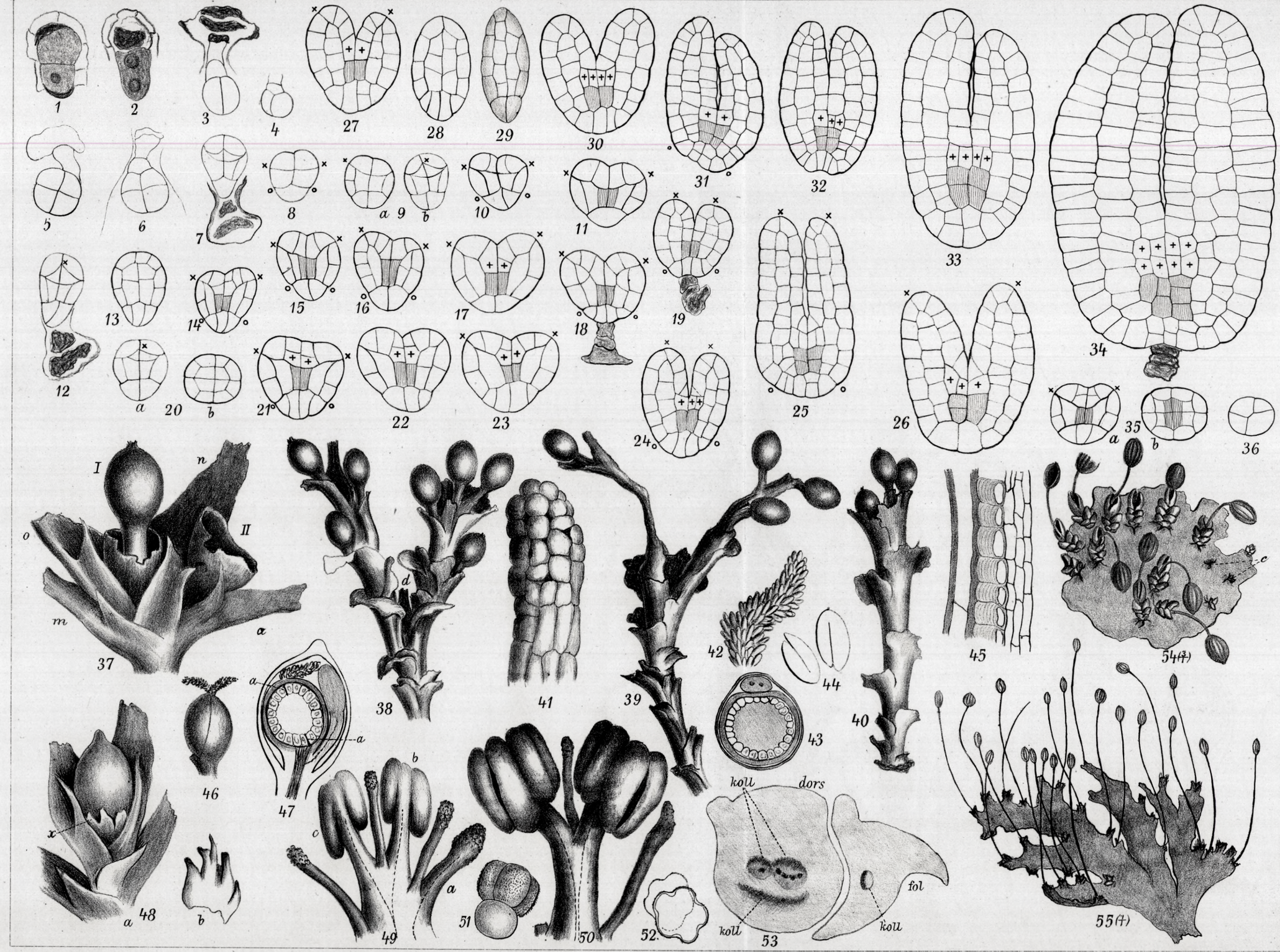
Autor del. & lith.

Podostemon Ceratophyllum Michx.



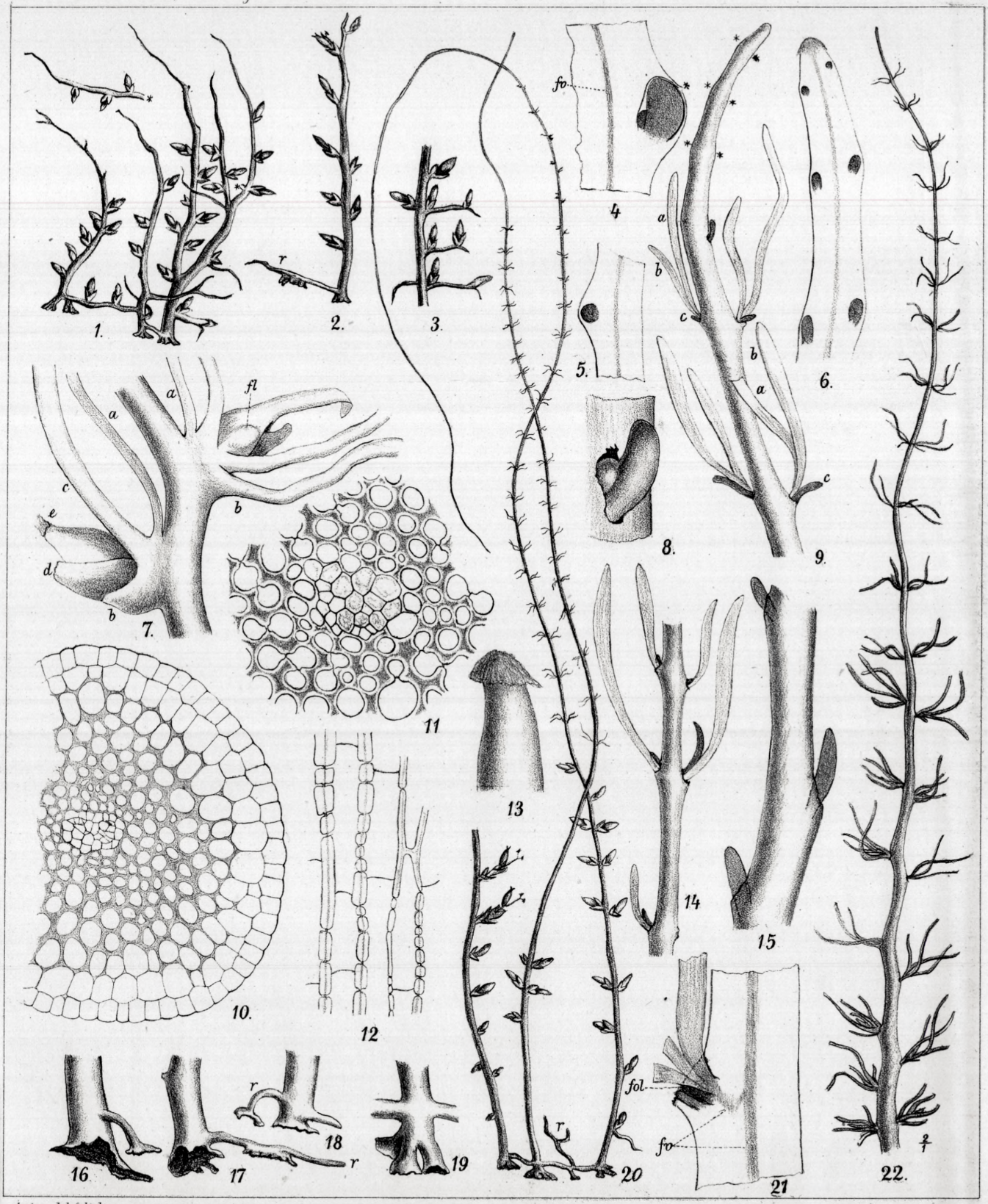
Autor del. & lith.

Mniopsis Weddelliana Tul.



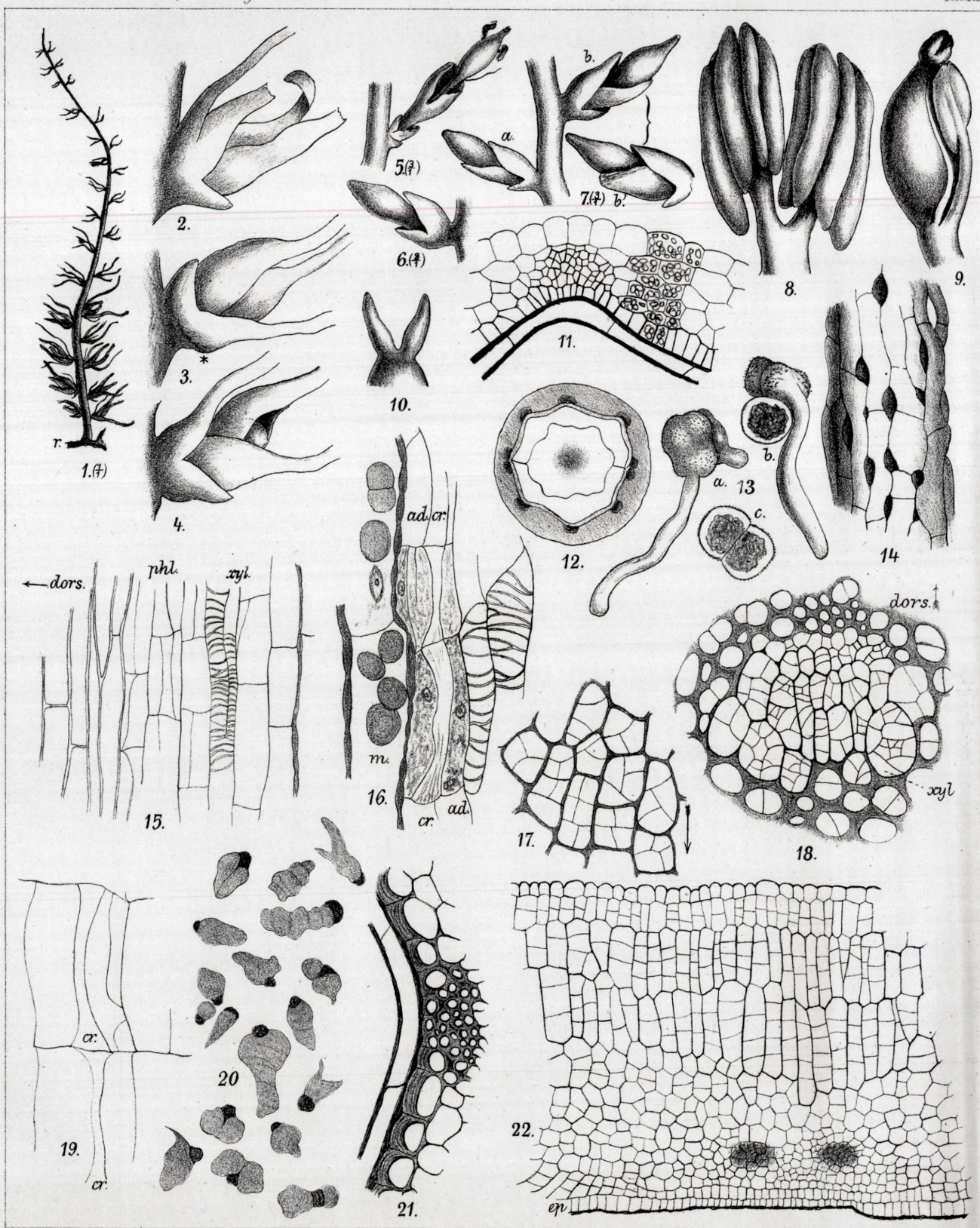
Autor del. & lith.

1-36. Mniopsis Weddelliana Tul. 37-53. Mniopsis Glazioviana Warmg. etc.



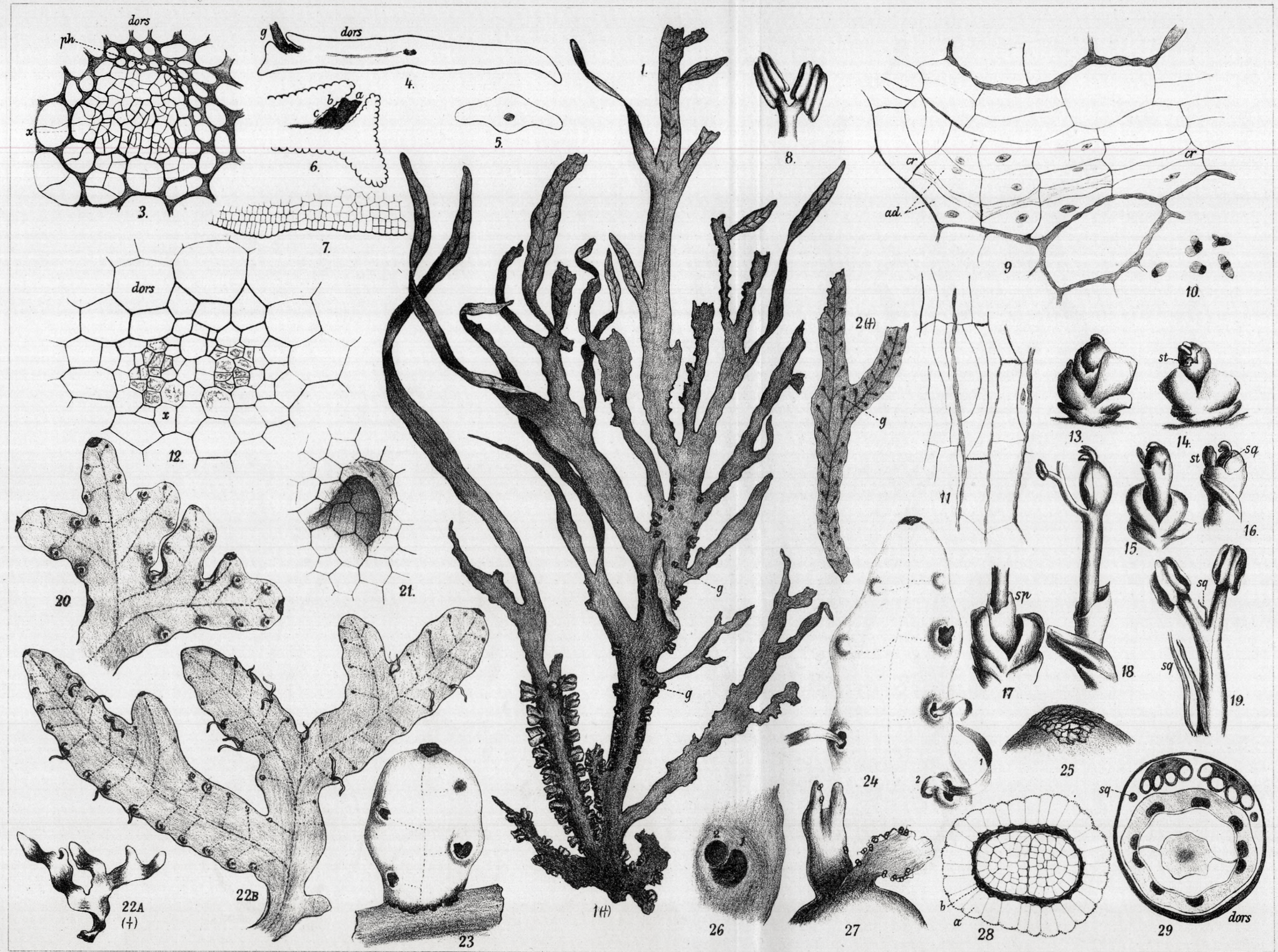
Autor del. & lith.

Dicræa elongata (Gardn.) Tul.



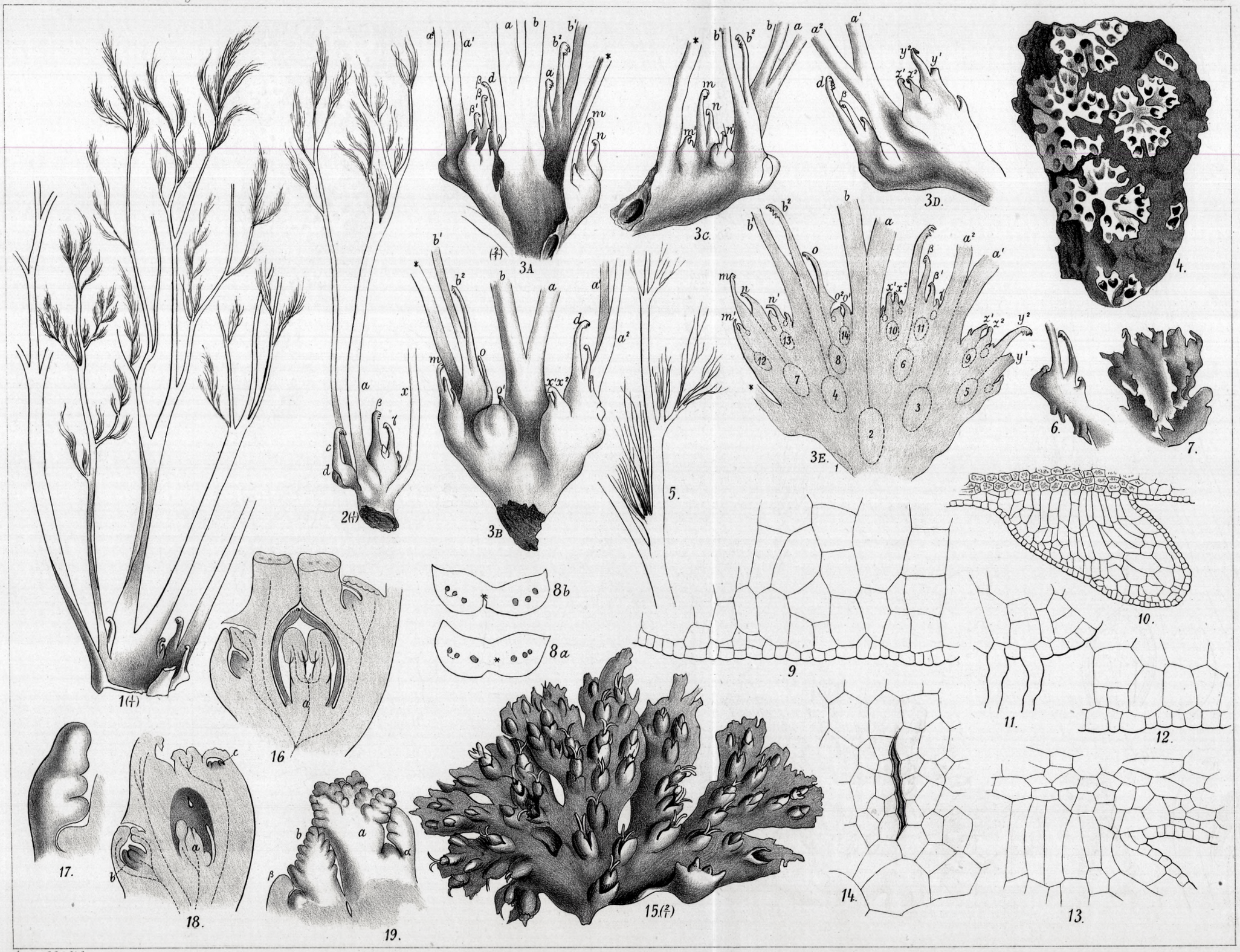
Autor del. & lith.

1-20. Dicræa elongata (Gardn) Tul. 21, 22. Dicræa algæformis Bedd.



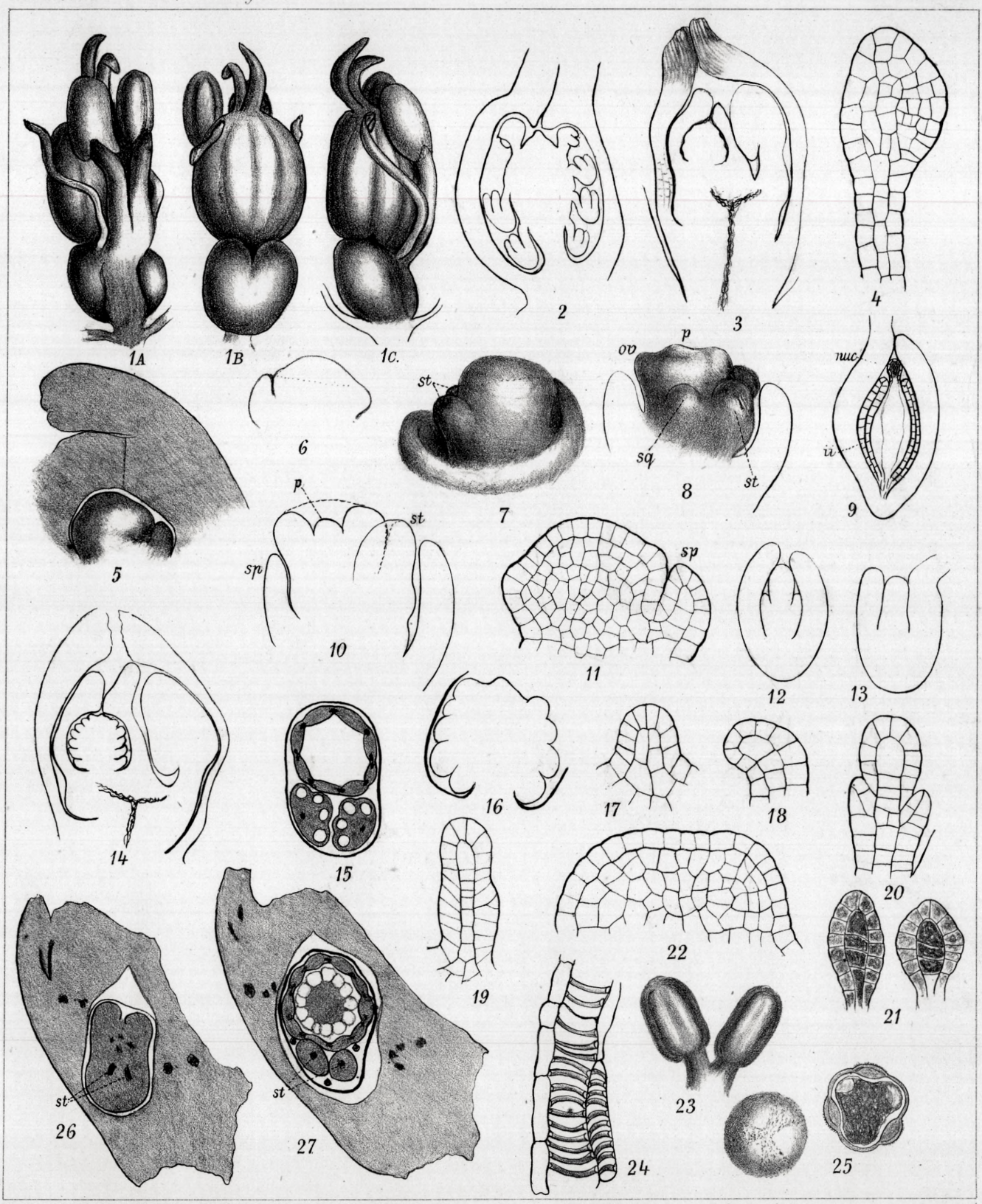
Autor del. & lith.

1, 2. Dicræa stylosa Wight. 3-29. Dicræa algæformis Bedd.



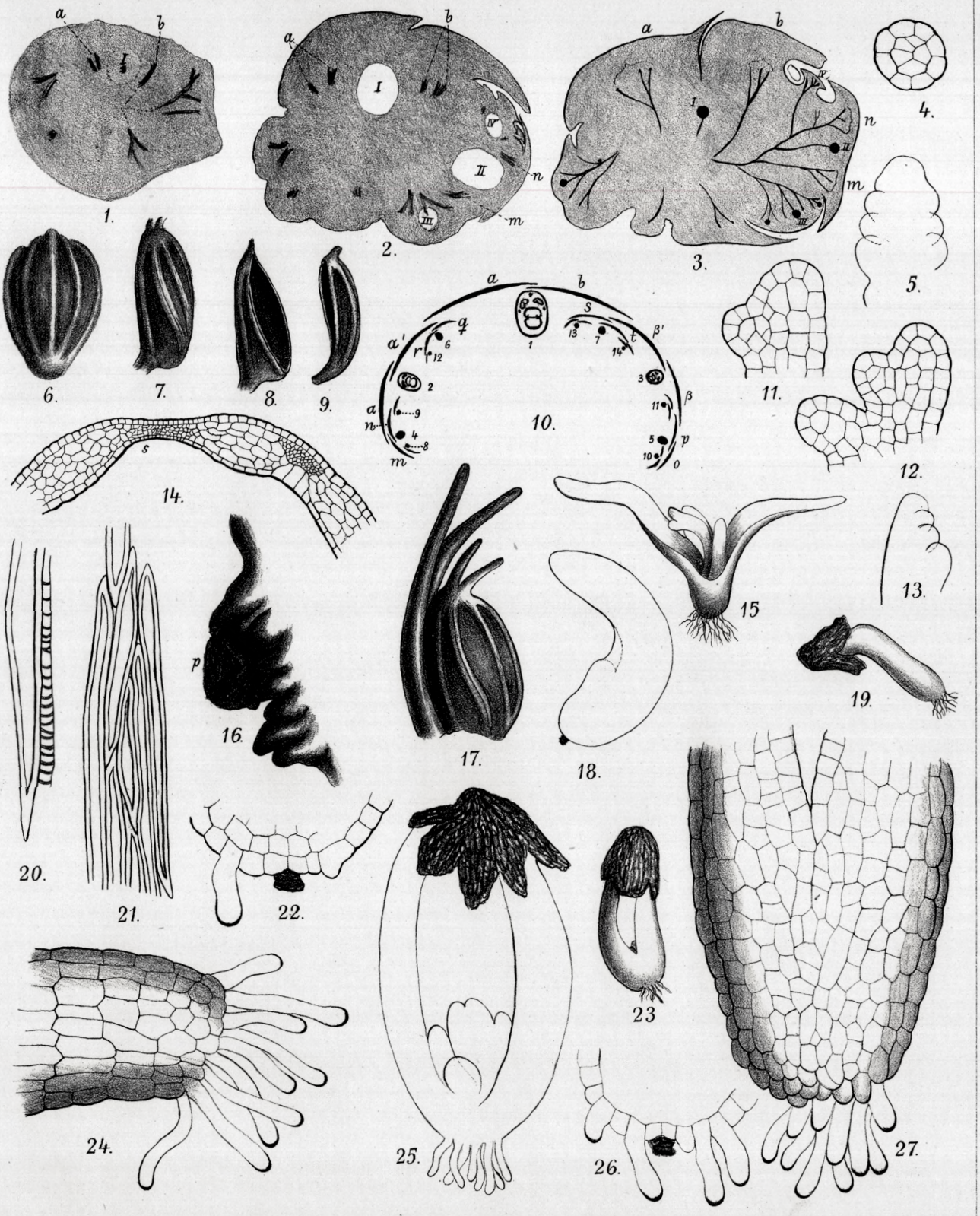
Autor del. & lith.

Castelnavia princeps Tul. et Wedd.



Autor del. & lith.

Castelnavia princeps Tul. et Wedd.



Autor del. & lith. Th. Berghs l.l

Castelnavia princeps Tul. et Wedd.

Bidrag til Kundskaben

om

Manganets Ilter.

Af

Odin T. Christensen.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 4.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1883.

I.

De Undersøgelser, for hvilke der i nærværende Afhandling nærmere skal gjøres Rede, omhandle væsentligst de to Manganilter Mn_2O_3 og Mn_3O_4. Det kan ikke være andet, end at en Undersøgelse over et saa bearbejdet Æmne som Manganets Ilter paa mange Punkter maa faa Karakteren af en Revision af tidligere Arbejder, men en saadan vil vel heller ikke kunne siges at være paa urette Sted; dels hersker der med Hensyn til de to nævnte Ilters Constitution temmelig afvigende Anskuelser, og dels trænge flere tidligere Angivelser om deres Egenskaber til at fuldstændiggjøres.

Det er bekjendt, at den i Naturen forekommende Braunit, Mn_2O_3, krystalliserer kvadratisk, medens andre Ilter af Sammensætningen $\overset{VI}{R}_2O_3$ krystalliserer rhomboëdrisk f. Ex. Jernglands, ligeledes, at Hausmannit krystalliserer kvadratisk, medens Spinellerne, f. Ex. Magnetjernsten, krystallisere regulært. Denne Afvigelse i Krystalform har givet Anledning til, at enkelte Forskere, f. Ex. Hermann[1]) og G. Rose[2]), have udtalt sig for den Opfattelse, at disse to Ilter besad en anden Constitution end de tilsvarende Forbindelser af Jerngruppen, idet de opstillede den Theori, at Mn_3O_4 maatte opfattes som $2MnO . MnO_2$ og Mn_2O_3 som $MnO . MnO_2$, altsaa begge som saltagtige Ilter. G. Rose støtter sig for Braunittens Vedkommende til den Omstændighed, at dette Ilte, som det forekommer i Naturen, i Reglen indeholder Baryt og Kiselsyre, og mener, at BaO indtræder for MnO, medens SiO_2 indtræder for MnO_2, og Braunitten vilde herefter være at betragte som et mangansyrligt Manganilte. Yderligere Støtte for denne Anskuelse om disse Ilters Constitution kunde man iøvrigt finde i flere andre Omstændigheder. Forchhammer[3]) og Berthier[4]) have som bekjendt paavist, at Manganmellemilte med fortyndet Salpetersyre eller Svovlsyre spaltes nøjagtigt saaledes, at $2MnO$ opløses, medens MnO_2 lades uopløst som

---

[1]) Journ. f. prakt. Chemie. Bd. 43. p. 50.
[2]) Poggendorffs Annalen. Bd, 121. p. 318.
[3]) De Mangano. Hafn. 1820.
[4]) Annales de chimie et de physique. T. 20, 187.

Hydrat. Ligeledes angiver Turner[1]), at Mn_2O_3 ved fortyndet Svovlsyre spaltes saaledes, at der dannes Manganforiltesalt medens Manganoveriltehydrat efterlades[2]), men nogen bestemt Angivelse om, hvorvidt Forholdet her er nøjagtigt saaledes, at Halvdelen af Manganet gaar i Opløsning, medens Halvdelen lades uopløst i Form af Manganoverilte, findes ikke[3]), men de følgende Undersøgelser ville vise, at dette virkeligt finder Sted saavel overfor fortyndet Svovlsyre som overfor fortyndet Salpetersyre; tage vi nu tillige Hensyn til at MnO_2 er i Besiddelse af udprægede negative Egenskaber, hvad særlig Gorgeu[4]) har paavist, kunde det ogsaa af disse Grunde synes rimeligt at antage Mn_2O_3 for et saltagtigt Ilte.

Fremdeles kunde ogsaa den Kjendsgjerning, at Mangantveiltesaltene ere forholdsvis lidet bekjendte, og at de i Almindelighed ere temmelig ubestandige, give Anledning til den Antagelse, at vi maaske her snarere havde med en Art Dobbeltsalte at gjøre af Manganoverilte- og Manganforiltesalte, idet Schönbein[5]) og Fremy[6]) have vist, at Manganoverilte ogsaa kan optræde med basiske Egenskaber; Fremy har saaledes vist, at Manganoverilte ogsaa kan danne en Forbindelse med Svovlsyre, der faas ved Behandling af manganoversurt Kali med Svovlsyre, og at der ved Tilsætning af svovlsurt Manganforilte til den derved dannede Opløsning fremkommer et krystallinsk Bundfald, der har Sammensætningen $MnO . MnO_2 . 4SO_3 + 9H_2O$. Fremy kalder dette Salt for Svovlsurt Manganforilte-Manganoverilte, og efter dets Dannelsesmaade kunde det vel ogsaa være rimeligt, at det var det mest passende Navn; han mener ikke, at man kan betragte det som et Mangantveiltesalt, da det afgiver MnO ved Behandling med Ammoniak, medens dog ellers Sammensætningen svarer til $\overset{VI}{Mn}_2O_6 . (SO_2)_3 + H_2O_2 . SO_2 + 8H_2O$ altsaa til et surt svovlsurt Mangantveilte. Fremy bemærker i Slutningen af sin Afhandling: hvor blive da Mangantveiltesaltene af? Der synes altsaa virkeligt at være Grunde, der kunde tale for, at Iltet Mn_2O_3 nærmest maatte betragtes som $MnO . MnO_2$ og dermed regnes udenfor Gruppen $\overset{VI}{R}_2O_3$.

Til nærmere Afgjørelse af dette Spørgsmaal maa det nu først undersøges, hvorvidt Mn_2O_3 med fortyndet Salpetersyre eller Svovlsyre nøjagtigt spaltes saaledes, at Halvdelen af Manganindholdet gaar i Opløsning, medens den anden Halvdel efterlades som Manganoveriltehydrat. Med Hensyn til Fremstillingsmaaden for det til dette Forsøg anvendte Mangantveilte maa jeg først gjøre et Par Bemærkninger. Schneider[7]) anbefaler at ophede Mangan-

---

[1]) Schweiggers Journal. 56, 166.

[2]) Berthier har paavist, at det samme finder Sted overfor Salpetersyre.

[3]) Turner angiver ganske vist, at man paa Grund af den nævnte Spaltning kan betragte Mn_2O_3 som en Forbindelse af lige Æqvivalenter MnO_2 og MnO, men Afhandlingen indeholder ikke nogen Analyse, der viser, at Spaltningen foregaar nøjagtigt i MnO_2 og MnO.

[4]) Ann. de chim. et de phys. [3] T. 66. p. 154.

[5]) Journ. f. prakt. Chemie. 74. p. 315.

[6]) Comptes rendus, 82, 475 og 1231.

[7]) Ann. der Phys. und der Chemie. 107, 605.

mellemilte eller oxalsurt eller kulsurt Manganforilte i en Iltstrøm, en Methode der giver særdeles gode Resultater; i Slutningen af sin Afhandling bemærker Schneider, at han maa formode, at Anvendelsen af Manganoverilte vil give samme Resultat, men han har ikke udført Forsøget; jeg forsøgte derfor at fremstille Mangantveilte ved stærk Glødning af rent Manganoverilte i en ren og tør Iltstrøm. Det til Forsøget anvendte Manganoverilte blev fremstillet ved Ophedning af salpetersurt Manganforilte først til 180°, paa hvilket Punkt Produktet indeholdt 79,72 Proc. MnO, hvilket er noget for lavt, hvorfor det endnu paa dette Punkt maa indeholde noget Vand, dernæst til 200—205°, hvorefter det dannede Manganoverilte blev analyseret.

0,857 Gr. MnO_2 gav 0,744 Gr. Mn_3O_4 svarende til 80,74 Proc. MnO;

0,261 Gr. brugte efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre 59,8 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 18,33 Proc. virksom Ilt.

Dette Manganoverilte, der saaledes var af størst mulig Renhed, blev glødet i et Forbrændingsrør i 1 Time i en Iltstrøm ved streng Glødhede; det dannede Produkt viste ved Analysen følgende Sammensætning:

0,767 Gr. gav 0,7385 Gr. Mn_3O_4 svarende til 89,55 Proc. MnO;

0,351 Gr. behandlet med Jodkalium og Saltsyre brugte 45,3 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, hvilket svarer til 10,32 Proc. virksom Ilt.

Produktet bestaar altsaa af rent Mn_2O_3, der kræver 89,87 Proc. MnO og 10,13 Proc. virksom Ilt.

Dette Mangantveilte blev nu anvendt til de følgende Forsøg:

1) 0,884 Gr. Mn_2O_3 blev opvarmet i Bægerglas paa Asbestplade med fortyndet Salpetersyre (indeh. 17 Proc. HNO_3) til 100°; man maa stadigt røre om i Blandingen, da Bundfaldet i modsat Tilfælde kager sig sammen, hvorved noget Mn_2O_3 indhylles af det ved Processen dannede Manganoveriltehydrat og derved for en Del unddrager sig Syrens Indvirkning. Efter ca. 1 Times Indvirkning filtreredes Opløsningen, og den uopløste Rest blev omhyggeligt udvasket; den gav 0,425 Gr. Mn_3O_4 svarende til 0,3061 Gr. Mangan; dette er 34,63 Proc. af den anvendte Mængde Mangantveilte, og da dette indeholdt 69,35 Proc. Mangan, er altsaa nøjagtigt Halvdelen af dette bleven uopløst.

2) 0,730 Gr. Mn_2O_3 blev behandlet paa samme Maade som ovenfor, og det uopløste Manganoveriltehydrat gav 0,3505 Gr. Mn_3O_4 svarende til 34,58 Proc. uopløst Mangan, hvilket stemmer med første Forsøg. Filtratet fra det uopløste, der altsaa indeholdt salpetersurt Manganforilte, blev inddampet paa Vandbad og derpaa titreret efter Volhards Methode; det brugte 126,5 *Cc.* manganoversurt Kali, af hvilket hver Cubikc. svarede til 0,002 Gr. Mangan i Manganforiltesaltet. Dette giver 0,253 Gr. Mangan i Opløsningen eller 34,66 Proc. af den anvendte Mængde Mn_2O_3.

Dette Forsøg viser, hvor nøjagtigt Spaltningen foregaar i MnO og MnO_2. Det ved

denne Proces dannede Manganoveriltehydrat viste sig, tørret ved 100°, at have følgende Sammensætning: 0,785 Gr. gav 0,6615 Gr. Mn_3O_4, svarende til 78,37 Proc. MnO. 0,219 Gr. brugte efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre 47,6 CC $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, svarende til 17,39 Proc. virksom Ilt. Sammensætningen er altsaa

MnO	78,37 Proc.	
O	17,39	—
H_2O	4,24	— (Differens)
	100,00 Proc.	

Det samme Mangantveilte blev nu prøvet overfor fortyndet Svovlsyre (1 Rf. conc. Svovlsyre + 9 Rf. Vand):

1) 0,957 Gr. Mn_2O_3 blev kogt med fortyndet Svovlsyre i 1 Time under Omrøring; det uopløste gav efter Udvaskning og Glødning af Bundfaldet 0,460 Gr. Mn_3O_4, svarende til 0,3314 Gr. Mangan eller 34,62 Proc. af det anvendte Mn_2O_3, der indeholdt 69,35 Proc. Mangan. Under Kogningen med Svovlsyre maa det Vand, der fordamper, stadigt erstattes.

2) Filtratet fra det uopløste Manganoveriltehydrat gav efter Afdampning af Svovlsyren, Fældning med kulsurt Natron og Glødning af Bundfaldet 0,459 Gram Mn_3O_4, svarende til 34,54 Proc. opløst Mangan (som sædvanligt beregnet i Forhold til den anvendte Mængde Mn_2O_3).

Spaltningen med fortyndet Svovlsyre foregaar altsaa ligesaa nøjagtigt i MnO og MnO_2 som ved fortyndet Salpetersyre, hvilket bekræftedes ved gjentagne Forsøg. Er det til Forsøgene anvendte Mangantveilte ikke nøjagtigt sammensat Mn_2O_3, men er der enten et Overskud af MnO_2 eller MnO, har vi i Behandlingen med de ovennævnte fortyndede Syrer et udmærket Middel til at paavise dette, idet man ved den omtalte Behandling henholdsvis faar mere eller mindre end 34,6 Proc. uopløst Mangan. — Et enkelt Exempel er tilstrækkeligt til at vise dette.

Et Manganilte, der var fremstillet efter Schneiders Methode ved Glødning af Manganmellemilte i Ilt, men som ved Analysen viste sig kun at indeholde 9,8 Proc. virksom Ilt, altsaa noget mindre end Mn_2O_3, blev behandlet som anført med fortyndet Salpetersyre.

0,949 Gram efterlod paa denne Maade et Manganoveriltehydrat, der gav 0,437 Gr. Mn_3O_4, svarende til 33,2 Proc. uopløst Mangan.

Filtratet fra det uopløste gav efter Fældning med kulsurt Natron og Behandling paa sædvanlig Maade 0,472 Gr. Mn_3O_4, svarende til 35,84 Proc. opløst Mangan. Mangfoldige Forsøg saavel med Salpetersyre som med Svovlsyre have vist, at Spaltningen kun foregaar nøjagtigt, naar Manganiltet har den til Mn_2O_3 nøjagtigt svarende Sammensætning.

Resultatet af disse Undersøgelser er altsaa, at Mangantveilte overfor fortyndede Syrer forholder sig paa en Maade, der fuldstændigt svarer til det Forhold, Manganmellemilte

udviser overfor de samme Syrer, og det kunde altsaa synes, at det herved end yderligere var berettiget at anse det for et saltagtigt Ilte $\overset{II}{Mn}O$, $\overset{IV}{Mn}O_2$. Følgen heraf vilde være, at Manganmellemilte, selv naar vi betragte det som $MnO.Mn_2O_3$, i sidste Instans maatte opfattes som $2\overset{II}{Mn}O.\overset{IV}{Mn}O_2$. Det egentlige Spørgsmaal bliver altsaa, om ikke $\overset{VI}{Mn}_2O_3$, trods alle de ovenfor berørte Forhold, alligevel med Nødvendighed maa betragtes som $\overset{VI}{Mn}_2O_3$; og ved nærmere Betragtning viser det sig, at vi ikke ere i Besiddelse af saa faa Analogier, der berettige os til at fastholde den sidstnævnte Anskuelse, foruden at der i det følgende skal gjøres Rede for en Række Undersøgelser, der tjene til yderligere Bevis derfor. Vi kunde søge Aarsagen til, at et Ilte af Sammensætningen $\overset{VI}{Mn}_2O_3$ spaltes i MnO_2 og MnO deri, at Manganet i sit Forhold overfor Ilt er særligt bestandigt som tetravalent Enkeltatom[1]), og at det derfor ved given Lejlighed stræber at gaa over i denne Tilstand, ligesom ogsaa den Omstændighed, at det divalente Mangan er særligt bestandigt overfor Syrer, her hjælper til at fremme Spaltningen. Man har i Virkeligheden flere Tilfælde, der ere analoge eller tildels analoge med dette. Det er saaledes bekjendt, at Kobberforilte, hvori vi antage Kobberet nærværende som divalent Dobbeltatom, $\begin{matrix}Cu\\ \vdots\\ Cu\end{matrix}>O$, i Almindelighed ved fortyndede Iltsyrer spaltes i Kobbertveilte, der opløses, og metallisk Kobber, ligesom omvendt Kobbertvechlor og metallisk Kobber danne Kobberforchlor Cu_2Cl_2; vi have her netop et Tilfælde, hvor vi med Rette antage et Metal optræde som Dobbeltatom (Kobberforchlorets Damptæthed beviser dette); men da Cu er mest bestandigt overfor Ilt som divalent Enkeltatom, spaltes Cu_2O netop i CuO og Cu paa en med Spaltningen af $\overset{VI}{Mn}_2O_3$ i $\overset{IV}{Mn}O_2$ og MnO analog Maade. Hos Jernet bemærke vi, at det ikke overfor Ilt har nogen Tilbøjelighed til at optræde som tetravalent Enkeltatom; derfor spaltes $\overset{VI}{Fe}_2O_3$ ikke paa samme Maade som $\overset{VI}{Mn}_2O_3$; anderledes er Forholdet derimod overfor Svovl; her har Jernet Tilbøjelighed til at optræde som tetravalent Enkeltatom (Svovlkis, FeS_2), og vi finde derfor i Jerntvesvovl Fe_2S_3 et Stof, der, under Forudsætning af den ovenfor fremsatte Anskuelses Rigtighed, skulde spaltes ved fortyndede Syrer i FeS_2 og FeS, hvilket sidste selvfølgeligt yderligere ved Syrens Indvirkning maa give Jernforiltesalt og Svovlbrinte. I Virkeligheden finder dette, ifølge Berzelii Angivelse, ogsaa Sted fuldstændigt som anført; der dannes Svovlkis, Jernforiltesalt og Svovlbrinte.

For endelig at nævne et fjernere liggende Exempel kunne vi tage Kulstoffet i en Forbindelse, hvor det optræder som hexavalent Dobbeltatom, nemlig i Oxalsyren $\begin{matrix}CO.OH\\ \vdots\\ CO.OH\end{matrix}$; denne Syres Konstitution falder sammen med Manganittens, naar vi antage sidstnævnte

[1]) Om Manganets Tetravalens cfr. Blomstrand: Chemie der Jetztzeit p. 172—174.

$\begin{matrix} MnO.OH \\ MnO.OH \end{matrix} = \overset{VI}{Mn_2}O_3.H_2O$. Oxalsyren spaltes som bekjendt ved conc. Svovlsyre i Kulsyre, Kulilte og Vand; men Manganit forholder sig overfor middelstærk Salpetersyre paa lignende Maade, den spaltes i MnO_2, MnO og H_2O, hvilket følgende Forsøg viser:

0,506 Gr. fintpulveriseret naturlig og særdeles ren Manganit efterlod ved Kogning med stærk Salpetersyre (indeh. 30—40 Proc. HNO_3) en Rest, der gav 0,220 Gr. Mn_3O_4 svarende til 31,31 Proc. uopl. Mangan. Da Manganit indeholder 62,50 Proc., er altsaa nøjagtigt Halvdelen af Manganindholdet blevet opløst som MnO, medens den anden Halvdel efterlades som $MnO_2 + xH_2O$.

De foregaaende Betragtninger vise, at vi i det tidligere berørte Forhold overfor Syrer ikke kunne se noget afgjørende Bevis for, at Mn_2O_3 maa opfattes som $\overset{II}{Mn}O.\overset{IV}{Mn}O_2$, men at vi paa Forhaand kunne anføre vægtige Grunde for den ogsaa hidtil almindeligere Anskuelse, at Mn_2O_3 er at betragte som svarende til $\overset{VI}{Fe}_2O_3$ i Henseende til Constitution. Vil man ved Forsøg godtgjøre denne Anskuelses Rigtighed endnu yderligere, vil det være nødvendigt at prøve Manganmellemiltets og Mangantveiltets Forhold overfor andre Syrer, og jeg vil da først undersøge Forholdet overfor Eddikesyre af forskjellig Concentration.

Mangantveiltets Forhold overfor Eddikesyre.

1) 0,953 Gr. Mn_2O_3 blev behandlet med Eddikesyre, der indeholdt 15 Proc. $C_2H_4O_2$, ved 100° paa sædvanlig Maade; den uopløste Rest, udvasket med Eddikesyre af samme Styrke som den anvendte, gav 0,904 Gr. Mn_3O_4 svarende til 68,42 Proc. uopl. Mangan (beregnet i Forhold til det anvendte Mn_2O_3). Da Mn_2O_3 indeholdt 69,35 Proc., var altsaa kun 1 Proc. Mangan gaaet i Opløsning.

2) 0,920 Gr. Mn_2O_3 blev behandlet paa samme Maade, men den anvendte Eddikesyre indeholdt 30 Proc. Hydrat; efter 1 Times Forløb blev udvasket med 30 Proc. holdig Eddikesyre, og Resten gav 0,869 Gr. Mn_3O_4 svarende til 68,04 Proc. uopløst Mangan; der er altsaa kun opløst 1,31 Proc. Mangan.

3) For at prøve, om Nærværelsen af Manganforiltesalt havde nogen Indflydelse, blev 0,861 Gr. Mn_2O_3 kogt med en Blanding af 30 Proc. holdig Eddikesyre og eddikesurt Mangan; det uopløste gav efter Udvaskning 0,8175 Gr. Mn_3O_4 svarende til 68,39 Proc. Mangan; der var altsaa kun opløst 1 Proc. Mangan, og Manganforiltesaltets Nærværelse var saaledes uden væsentlig Betydning.

4) 0,785 Gr. Mn_2O_3 blev opvarmet til Kogning med Eddikesyre, der indeholdt 65 Proc. Hydrat, i 1 Time. Efter sædvanlig Behandling gav Resten 0,7425 Gr. Mn_3O_4 svarende til 68,30 Proc. uopl. Mangan. Der var altsaa ogsaa her kun opløst 1 Proc. Mangan.

Af disse Forsøg fremgaar det, at Eddikesyre ikke har nogen synderlig Indvirkning paa glødet Mangantveilte, og at Syrens Concentration i denne Henseende er uden nogen væsentlig Indflydelse.

Vi gaa nu i det følgende over til at betragte Manganmellemilte i dets Forhold overfor Eddikesyre og finde her et helt andet Forhold.

Manganmellemilte i dets Forhold overfor Eddikesyre.

1) 0,647 Gr. glødet Mn_3O_4 blev behandlet med Eddikesyre, der indeholdt 30 Proc. Hydrat, ved Kogning i længere Tid; den efterladte uopløste Rest var sort og gav efter sædvanlig Behandling (Udvaskning med Eddikesyre af samme Styrke som anvendt til Forsøget og Glødning) 0,253 Gram Manganmellemilte, hvilket er 39,10 Proc. af det anvendte Manganmellemilte. Spaltningen i $2MnO$ og MnO_2 vilde have efterladt 33,34 Proc. Vi nærme os altsaa meget dertil.

2) 0,814 Gr. Mn_3O_4, behandlet med 60 Proc. holdig Eddikesyre, gav en Rest, der efter sædvanlig Behandling efterlod 0,390 Gr. Mn_3O_4, hvilket er 47,91 Proc. af den anvendte Mængde.

3) 0,591 Gr. Mn_3O_4 blev behandlet med 65 Proc. holdig Eddikesyre og efterlod derved en Rest, der gav 0,3875 Gr. Mn_3O_4 o: 65,56 Proc. af den anvendte Mængde.

4) 0,500 Gram Mn_3O_4 efterlod ved stærk Kogning med rén Iseddike en Rest, der ved Glødning gav 0,492 Gr. Mn_3O_4, hvilket er 98,40 Proc. af den anvendte Mængde.

5) 0,799 Gr. Mn_3O_4, behandlet med Iseddike paa samme Maade, gav en Rest, der ved Glødning efterlod 0,785 Gr. Mn_3O_4, hvilket er 98,34 Proc. af den anvendte Mængde.

Det fremgaar heraf, at glødet Manganmellemilte angribes saa meget mindre af Eddikesyre, jo mere concentreret Syren er.

Allerede ved Tilsætning af en ringe Mængde Vand til Iseddike bliver dennes Virkning paa Manganmellemilte kjendeligt større, saaledes som følgende Forsøg viser:

6) 1,312 Gr. Mn_3O_4 blev behandlet med en Blanding af 2 Rf. Vand og 98 Rf. Iseddike ved 100° i 1 Time, og det uopløste gav efter Udvaskning med samme Blanding 1,285 Gr. Mn_3O_4; der var altsaa opløst 2,06 Proc. af det anvendte Mn_3O_4.

7) 1,320 Gr. Mn_3O_4, behandlet paa samme Maade med en Blanding af 5 Rf. Vand og 95 Rf. Iseddike, gav til Rest 1,263 Gr. Mn_3O_4, altsaa var her opløst 4,32 Proc. af den anvendte Mængde.

8) 1,036 Gr. Mn_3O_4, behandlet med en Blanding af 10 Rf. Vand og 90 Rf. Iseddike i 1 Time, efterlod en Rest, der efter Udvaskning med 90 Proc. holdig Eddikesyre gav

0,893 Gr. Mn_3O_4; her er altsaa opløst 0,143 Gr. eller 13,8 Proc. af den anvendte Mængde Mn_3O_4.

Filtratet fra det ved Behandlingen med ren Iseddike uopløste havde en kanelbrun Farve, hvilket kunde tyde paa, at Manganmellemilte var opløst som saadant, og at Opløsningen altsaa muligvis kunde indeholde et eddikesurt Manganmellemilte. For at prøve dette anstilledes følgende Forsøg.

Manganmellemilte blev behandlet med Iseddike som ovenfor, og den uopløste Rest blev udvasket med Iseddike og tørret ved 100°. Af den tørrede Masse blev afvejet 0,439 Gram, der efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre forbrugte 38,5 CC $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, hvilket svarer til 7,0 Proc. virksom Ilt. Da rent Mn_3O_4 indeholder 6,99 Proc., er det altsaa Mn_3O_4, der er efterladt uopløst, og følgeligt ogsaa Mn_3O_4, der er gaaet i Opløsning. Dette vil yderligere blive fuldstændigt bekræftet i det følgende.

Det her til disse Forsøg anvendte Manganmellemilte var glødet og altsaa meget cohærent; der kunde derfor være Anledning til at forsøge, om ikke det mindre cohærente Manganmellemilte, der faas ad den vaade Vej efter Ottos[1]) Methode eller ved Ophedning af MnO_2 i Brint til 250° efter Moissans[2]) Methode, kunde være lettere opløseligt i Iseddike, og om man ikke ad den Vej kunde naa til at fremstille Salte af Mn_3O_4 eller Mn_2O_3, saafremt det her omtalte Manganmellemilte kunde spaltes i MnO og Mn_2O_3. Med Hensyn til Fremstillingen af de til disse Forsøg anvendte Ilter og disses Egenskaber maa jeg henvise til denne Afhandlings Afsnit III.

1) 0,860 Gram af et Manganilte, der var fremstillet efter Moissans Methode ved Ophedning af MnO_2 i en Brintstrøm til 240° og som indeholdt Manganmellemilte med noget indblandet Mangantveilte, blev behandlet med Iseddike ved 100° i 1 Time; efter at Blandingen derpaa havde henstaaet et Par Dage, blev Opløsningen filtreret, og det med Iseddike udvaskede Bundfald gav 0,640 Gr. Mn_3O_4; der var altsaa opløst forholdsvis betydelige Kvantiteter, i Sammenligning med hvad der gaar i Opløsning ved tilsvarende Behandling af det glødede Manganmellemilte; det eddikesure Filtrat var stærkt kanelbrunt farvet og gav efter Inddampning til Tørhed paa Vandbad en brunsort glindsende Rest, der blev fuldstændigt tørret ved længere Tids Henstand i Lufttørrekasse ved 100°. Efter omhyggelig Tørring blev 0,212 Gram af Produktet forsigtigt ophedet i en Digel over Flammespreder og tilsidst glødet stærkt under rigelig Adgang af Luften; herved efterlodes 0,077 Gr. Mn_3O_4, svarende til et Indhold af 26,16 Proc. Mangan i Inddampningsresten. Et Salt af Sammensætningen $Mn_3.O_8(C_2H_3O)_8$ eller en Blanding af Saltene $Mn.O_2(C_2H_3O)_2$ og $Mn_2.O_6(C_2H_3O)_6$ vilde kræve et Indhold af 25,9 Procent Mangan. Om det er et Manganmellemiltesalt eller

[1]) Liebigs Annaler, 93, 372.

[2]) Ann. de chim. et de phys. [5], 21, p. 231 o. fr.

en Blanding af Forilte- og Tveiltesalt, er altsaa herved ikke afgjort, men det skal senere vise sig, at det sidste er det sandsynligste.

2) Da Moissans Manganmellemilte er besværligere at fremstille, udførte jeg de følgende Forsøg med Manganmellemiltehydrat, fremstillet efter Ottos Methode[1]), da det viste sig, at dette Ilte forholdt sig paa tildels lignende Maade. Sammensætningen af det til Forsøgene anvendte Ilte findes anført i Afsnittet III. Behandler man Ottos Manganmellemilte i lufttørret Tilstand med Overskud af Iseddike ved 100° i 1 Time under Omrøring, faar man en brun Opløsning, der efter Filtrering og Henstand i nogle Dage (undertiden i kortere Tid) udskiller et kanelbrunt, krystallinsk Bundfald, der under Mikroskopet viser sig at bestaa af langstrakte, rektangulære Prismer eller Tavler. Bundfaldet maa udvaskes med Iseddike og tørres over Kalihydrat; de smaa Mængder, jeg i Begyndelsen fik paa denne Maade, indeholdt alle 20,6 Proc. Mangan og maa altsaa indeholde Krystalvand, da vandfrit eddikesurt Salt af Mn_3O_4 eller af Mn_2O_3 skulde indeholde betydeligt mere Mangan. Da der til Forsøget blev anvendt fuldstændig ren og vandfri Iseddike, og der kun ved Processen dannes en ringe Mængde Vand, var det muligt, at Dannelsen af Saltet vilde fremskyndes, naar man efter Opløsningen og Filtreringen tilsatte lidt Vand, saa at Stoffet strax kunde forefinde den til Krystallisationen nødvendige Vandmængde. Dette bekræftedes fuldstændigt; tillige lærte Erfaringen flere Ændringer i Fremstillingsmaaden, som senere skulle blive berørte; herved lykkedes det at fremstille Saltet i rigelig Mængde. Analysen viste, at det bestod af fuldstændigt normalt eddikesurt Mangantveilte af Sammensætningen $Mn_2 . O_6 . (C_2H_3O)_6 + 4H_2O$. Dette Salt skal i det følgende Afsnit beskrives nøjere.

Ved Iseddikens Indvirkning er altsaa Manganmellemilte bleven spaltet i Manganforilte og Mangantveilte, MnO og Mn_2O_3, der begge blive i Opløsning som eddikesure Salte, og først ved Tilsætning af lidt Vand udskilles det eddikesure Mangantveilte; denne Udskillelse er i Tidens Løb fuldstændig, saaledes at Moderluden tilsidst er fuldstændig farveløs. Man vil indse, at der altsaa er en Mulighed for, at den oprindelige Opløsning i Iseddike virkeligt indeholder et eddikesurt Manganmellemilte, og at dette spaltes ved den ringe Mængde Vand (et Par Cubikcentimeter), der tilsættes for at bringe Mangantveiltesaltet til at udkrystallisere. Man ser ogsaa den paafaldende Forskjel, det gjør, om man tilsætter en ringe Mængde Vand til Iseddiken, førend man lader den virke paa Manganmellemiltet, eller efter at dette delvis er opløst i Iseddiken, og Opløsningen filtreret; i første Tilfælde virker Eddikesyren, som de tidligere Forsøg vise, strax paa en noget anden Maade, end, naar den er tilstede i vandfri Tilstand, om end Forskjellen først bliver rigtig fremtrædende, naar større Vandmængder tilsættes.

---

[1]) Liebigs Annaler 93, 372.

En Spaltning af Mn_3O_4 i MnO og Mn_2O_3 under Dannelse af Mangantveiltesalt vil man imidlertid ogsaa kunne bemærke overfor andre Syrer.

Behandles Manganmellemilte med concentreret Svovlsyre og opvarmes efter omhyggelig Blanding af Massen efterhaanden til 138° under Omrøring, bemærker man herved ikke nogen Iltudvikling af nogen Betydning, hvilket maatte være Tilfældet, hvis Mn_3O_4 spaltedes i $2MnO$ og MnO_2, da i saa Tilfælde det sidstnævnte, ifølge Carius Undersøgelser, maatte danne svovlsurt Mangantveilte under Udvikling af Ilt; det sidstnævnte Salt dannes imidlertid alligevel i rigelig Mængde, hvad man let iagttager paa den mørkegrønne Farve, Bundfaldet antager. Der staar derfor kun tilbage at antage, at Mn_3O_4 ved den concentrerede Svovlsyres Indvirkning er spaltet i MnO og Mn_2O_3, der begge danne tilsvarende svovlsure Salte.

Af det foregaaende følger nu, at naar Mn_2O_3 og Mn_3O_4 i Almindelighed af fortyndede Syrer spaltes i MnO og MnO_2, sker dette, fordi $\overset{VI}{Mn}_2O_3$ er en saa svag Base, at den kun optræder som saadan, naar en concentreret og stærk Syre er til Stede, medens den derimod ved svagere Syrer paa Grund af Manganets Tilbøjelighed til at optræde som tetravalent Enkeltatom spaltes i Manganforilte og Manganoverilte. Manganilternes Forhold overfor conc. Svovlsyre og Iseddike giver os nu Ret til at betragte dem som $MnO.\overset{VI}{Mn}_2O_3$ og som $\overset{VI}{Mn}_2O_3$.

Det følgende Afsnit skal nu yderligere godtgjøre de store Analogier mellem $\overset{VI}{Mn}_2O_3$ og $\overset{VI}{Fe}_2O_3$, hvorved det bliver fuldstændigt afgjort, at Mangantveiltesaltene existere som saadanne og ikke med nogen antagelig Grund maa betragtes som Dobbeltsalte af Manganoverilte- og Manganforiltesalte, saaledes som Fremy[1]) antyder, og som han ganske vist har havt Grund til at mene.

Existensen af de i det følgende omtalte normale eddikesure, phosphorsure og arsensure Mangantveiltesalte og disses Dannelsesmaader, saavelsom Dannelsen af et pyrophosphorsurt Mangantveilte-Natron, viser paafaldende Analogier med Jerntveiltet.

Man maa derfor søge Aarsagen til, at Braunit krystalliserer afvigende fra Jernglands, og Hausmannit afvigende fra Spinellerne, i den Omstændighed, at Atomerne i $\overset{VI}{Mn}_2O_3$ befinde sig i en mere labil Ligevægtstilstand end i $\overset{VI}{Fe}_2O_3$ paa Grund af den oftere berørte Stræben hos Manganet efter at mættes ved 2 Iltatomer, saaledes som vi ogsaa ser det gjentage sig i Naturen, hvor Pyrolusit findes i Pseudomorfose efter Manganit. Dette maa vel antages at kunne udøve en Indflydelse paa Krystalformen saaledes, at denne derved modificeres.

Det bliver maaske en almindelig Regel, at saadanne Grundstoffer, der i visse særlig

---

[1]) Comptes rendus, 82, 475 og 1231.

bestandige Forbindelser med et andet Grundstof optræde som tetravalente Enkeltatomer, nødigt forene sig til hexavalente Dobbeltatomer i Forbindelse med samme Grundstof, naar ikke samtidigt et tredie Grundstof indtræder, og i hvert Fald, naar det sker, danner temmeligt ubestandige Forbindelser. Vi kjende jo heller ikke nogen Forbindelse $\overset{VI}{C}_2O_3$, men derimod nok $\overset{VI}{C}_2O_4H_2$, der dog spaltes i CO_2, CO og H_2O ved given Anledning, kun virker her den concentrerede Syre (Svovlsyre) spaltende, medens det modsatte var Tilfældet hos $\overset{VI}{Mn}_2O_3$, en simpel Følge af Kulstoffets og Manganets mere eller mindre negative eller positive Karakter, og af Syrens Tiltrækning til Vand.

II.

Mangantveiltesalte.

1. Eddikesurt Mangantveilte.

$$\overset{VI}{Mn}_2 . O_6 . (C_2H_3O)_6 + 4H_2O.$$

Dette Salt lader sig som tidligere berørt fremstille ved Indvirkning af ren Iseddike paa Manganmellemiltehydrat, fremstillet efter Ottos[1]) Methode. Man gaar bedst frem paa den Maade, at man henstiller 4—5 Gram af det nævnte Ilte, der anvendes i lufttørret Tilstand, med ca. 150—200 *Cc* ren Iseddike i et løst tildækket Glas, idet man engang imellem omrører Blandingen; allerede efter faa Timers Henstand ved almindelig Temperatur, bemærker man, at Opløsningen antager en brunlig Farve; efter et Par Dages Henstand kager det uopløste sig sammen, og man gjør Ret i at trykke det i Stykker med Spatlen og omrøre Vædsken; denne har efterhaanden antaget en noget mørkere Farve, men begynder de følgende Dage at blive lysere, idet der samtidigt paa Glassets Sider og mellem det uopløste Ilte afsætter sig gulbrune fine Krystalnaale. Efter 6—8 Dages Henstand opvarmes paa Vandbad til 100° i 1 Time under stadig Omrøring, hvorved man faar en meget mørk, brun Opløsning, der filtreres varm gjennem et tæt Filtrum; til Filtratet sættes under Omrøring lidt efter lidt et Par Cubikc. destilleret Vand, og det Hele henstilles nu i et tildækket Glas; ofte begynder allerede efter faa Timers Forløb en kjendelig Udskillelse af brune Krystalnaale; efter en Dagstid eller to er der udskilt en betydelig Mængde, og man decantherer nu den brune Vædske fra Bundfaldet, der bringes paa Filtret med ren Iseddike og udvadskes dermed, indtil alt Manganforiltesalt er fjernet, og Filtratet er fuldstændigt farveløst; efter at Størstedelen af Iseddiken er suget fra Bundfaldet, henstilles Saltet under Glasklokke over fast Kalihydrat, og tørres her, indtil enhver Lugt af fri Eddikesyre er forsvundet; under Tørringen maa man engang imellem sprede Saltet lidt ud paa Skaalen for at lette Eddikesyrens Fordampning. Efter Tørringen har Saltet oftest en lysere, kanelbrun Farve og er tillige noget silkeglindsende. Det er meget lidet vægtfyldigt.

Moderluden bliver ved Henstand under Luftens Adgang efterhaanden fuldstændig farveløs, idet der lidt efter lidt udskilles mere af Mangantveiltesaltet, efterhaanden som Iseddiken tilsuger mere Fugtighed fra Luften; dog medtager denne Proces som oftest flere

[1]) Liebigs Annaler, 93, 372.

Uger, men efter at den er forløbet, har jeg havt det udskilte Mangantveiltesalt staaende under Moderluden, der indeholder eddikesurt Manganforilte, i over $^1/_2$ Aar uden at bemærke at det har undergaaet nogen Forandring.

Det eddikesure Mangantveilte opløses ved Kogning med Iseddike og danner en mørk, brun Opløsning, der giver følgende Reaktioner:

Vand tilsat i Overskud giver en brun Opløsning, der efterhaanden bliver uklar og udskiller et brunsort, fyldigt Bundfald.

Concentreret Svovlsyre tilsat i lige Rumfang giver en smuk violet Vædske, der i Løbet af nogle Timer afsætter lidt mørkt krystallinsk Bundfald (Fremy's svovlsure Manganforilte-Mangantveilte), medens Vædsken samtidigt antager en lysere Farve.

Phosphorsyre i temmelig concentreret vandig Opløsning frembringer et Bundfald, der ved Kogning af Blandingen antager en lys grønliggraa Farve; det synes under Mikroskopet at være utydeligt krystallinsk. I Saltsyre opløses dette Bundfald under Chlorudvikling, medens det lades uopløst af Salpetersyre og tilsyneladende ikke paavirkes deraf. Det tørrede Bundfald lader sig opløse i conc. Svovlsyre ved Opvarmning i et Reagensglas og Vædsken antager derved en mørk, amethystrød Farve; efter 24 Timers Henstand er ogsaa her udskilt mørke Krystaller, sandsynligvis af Fremy's Salt.

Phosphorsurt Natron i vandig Opløsning fremkalder et amorpht, brunligviolet, fyldigt Bundfald.

Arsensyre i temmelig conc. vandig Opløsning fremkalder ved Opvarmning ligesom Phosphorsyre et graahvidt Bundfald af arsensurt Mangantveilte.

Arsensurt Natron giver ligesom phosphorsurt Natron et fyldigt brunligviolet Bundfald.

Pyrophosphorsurt Natron forholder sig paa følgende Maade: sætter man til et Overskud af en ved alm. Temperatur mættet Opløsning af dette Salt en Opløsning af eddikesurt Mangantveilte i Iseddike, dannes intet blivende Bundfald, men dette opløses i det pyrophosphorsure Natron med rød Farve; er Opløsningen stærk, udskilles efterhaanden ved Henstand eller Kogning et rødt eller brunligrødt krystallinsk Bundfald af pyrophosphorsurt Mangantveilte-Natron, der senere skal beskrives nærmere.

Bringer man fast Oxalsyre i Opløsningen af det eddikesure Salt i Iseddike, udskilles ved Omrystning et krystallinsk Bundfald.

Anvendes paa samme Maade fast Vinsyre, udskilles ligeledes et krystallinsk Bundfald af mørk Farve.

Guajactinktur farves blaa af en eddikesur Opløsning af det eddikesure Salt.

Indigoopløsning affarves ved Opvarmning dermed.

I disse Henseender forholder det eddikesure Mangantveilte sig ligesom Schönbeins[1]) eddikesure Manganoverilte, hvilket han fremstillede af eddikesurt Blyoverilte og svovlsurt Manganforilte, hvorved han fik en rødbrun Vædske, der gav ovennævnte Reactioner med Guajac og Indigo, men af hvilken det ikke lykkedes Schönbein at udskille noget Salt i fast Form; det er vel sandsynligt, at denne Opløsning har indeholdt eddikesurt Mangantveilte.

Ligeledes ilter en Opløsning af eddikesurt Mangantveilte i Iseddike findelt Kvægsølv ved Rystning dermed.

Med det faste eddikesure Salt faar man følgende Reactioner:

Ved Rystning med Vand dissocieres det efterhaanden og danner et mørkebrunt næsten sort Bundfald.

Blandes det faste Salt med krystalliseret Oxalsyre, og tilsætter man derpaa lidt efter lidt Vand under Omrystning, foregaar ingen Sønderdeling ved almindelig Temperatur, men man faar en klar gulbrun Opløsning, der reduceres ved Opvarmning under Udvikling af Kulsyre.

Med krystalliseret Vinsyre er Forholdet et lignende; bringes lidt fast Vinsyre i et Reagensglas med lidt Vand, og tilsættes derpaa lidt fast eddikesurt Mangantveilte under Omrystning og lidt efter lidt mere Vand, efterhaanden som det opløses, faar man tilsidst en mørkebrun klar Opløsning, der taaler Fortynding med Vand; denne Opløsning reduceres ved Kogning.

Den oxalsure Opløsning fældes ved Overmætning med Ammoniak, medens den vinsure Opløsning holder sig klar derved (jvfr. Jerntveiltesaltenes Forhold).

Bringes det faste eddikesure Mangantveilte ned i conc. Salpetersyre ved almindelig Temperatur, opløses det ved Omrøring med gulbrun Farve, men efter kort Tids Forløb bliver Vædsken fuldstændig uklar og udskiller et brunsort Bundfald. Ved Kogning med Salpetersyre udskilles Manganoveriltehydrat.

Udrøres fast eddikesurt Mangantveilte med concentreret Svovlsyre og tilsættes derpaa lidt efter lidt under Omrøring og delvis Afkjøling draabevis Vand, dannes en mørkerød Opløsning, der efterhaanden giver et mørkt krystallinsk Bundfald af Fremy's oftere omtalte Salt.

Conc. Saltsyre opløser det eddikesure Salt med mørk, brun Farve, og Opløsningen forholder sig ganske som en Opløsning af Mangantveilte i Saltsyre.

Vinaand, 95 Proc. holdig, angriber tilsyneladende ikke Saltet ved almindelig Temperatur; ved Opvarmning omdannes det, og man faar nu et mørkt, fyldigt Bundfald.

---

[1]) Journal f. prakt. Chemie, 74, p. 315.

Sættes Svovlammonium til det faste eddikesure Salt dannes Svovlmangan, der strax har en rødgul Farve men efter Opvarmning bliver gulgrønt.

Udsat for Luftens Indvirkning holder det eddikesure Mangantveilte sig ganske godt, naar Krystalnaalene ikke ere altfor fine; i dette Tilfælde undergaar det en kjendelig Forandring og antager efterhaanden en mørkere Farve; navnlig bemærkes dette, naar man tørrer Saltet under Luftens Adgang i Stedet for over Kalihydrat under en Glasklokke.

Ved Ophedning til 80°—85° tabte Saltet 39,8 Proc.; da Temperaturen forhøjedes til 100°—105°, aftog det yderligere i Vægt, og efter 35 Timers Forløb var Vægten constant og Tabet 59,2 Proc.

Følgende Forsøg viser Saltets Forhold ved højere Temperatur:

0,402 Gr. eddikesurt Mangantveilte blev ophedet i en Porcellænsdigel, først svagt over Flammespreder, indtil alt var sammensintret, hvorved bemærkes Udvikling af Vanddamp og Lugt af Acetone, derpaa over en almindelig Bunsensk Lampe til svag Rødglødhede under Luftens Adgang; det derved efterladte Ilte vejede 0,124 Gr., der efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre brugte 15,4 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, svarende til et Indhold af 0,01232 Gr. virksom Ilt o: 9,93 Proc.; dette Ilte er altsaa nærmest Mn_2O_3, der kræver 10,13 Proc. virksom Ilt; først ved stærk Glødning dannes Mn_3O_4.

Imidlertid er der en Mulighed for, at det dannede Mn_2O_3 kan hidrøre fra, at der først foregaar en Reduktion til MnO, der da ved lavere Temperatur iltes til det mindre cohærente Mn_3O_4, som ved 300°—400° formaar at optage Ilt af Luften og danne Mn_2O_3. At en saadan Iltabsorbtion finder Sted paa et vist Stadium, viser følgende Forsøg:

0,388 Gr. eddikesurt Mangantveilte blev henstillet ved 100°—110° og vejede efter 48 Timers Forløb 0,165 Gr.; efter yderligere Henstand ved 200° i 6 Timer var Vægten 0,159 Gr., hvilket svarer til et Tab af 59,02 Proc. Yderligere Henstand ved 200° i 36 Timer bevirkede en Vægtforøgelse, idet Resten nu vejede 0,166 Gr. Saadanne Iltningsphænomener blive nærmere berørte i Afsnittet III.

Den analytiske Undersøgelse af det eddikesure Mangantveilte gav følgende Resultat:

1) 0,520 Gr. blev behandlet med fortyndet Svovlsyre (1 Rf. conc. Svovlsyre + 9 Rf. Vand) ved Kogning i $2^1/_2$ Time; herved spaltes Mn_2O_3 som tidligere omtalt i MnO og MnO_2; det uopløste Manganoveriltehydrat, i hvilket altsaa findes Halvdelen af Saltets Manganindhold, gav efter Udvaskning og Glødning 0,074 Gr. Mn_3O_4 svarende til 10,25 Proc. Mangan; Saltet indeholder altsaa 20,50 Proc.

2) 0,514 Gr. efterlod ved stærk Glødning under Luftens Adgang 0,146 Gr. Mn_3O_4 svarende til 20,47 Proc. Mangan.

3) 0,325 Gr. blev bragt ned i en farveløs Blanding af Jodkalium og et Par *Cc.* Saltsyre; efter Omrøring titreredes det frigjorte Jod med $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron; der forbrugtes 12,2 *Cc.* svarende til 0,00976 Gr. virksom Ilt eller 3,00 Proc.

4) 0,385 Gr. brugte ved samme Behandling 14,4 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 0,01152 Gr. virksom Ilt o: 2,99 Proc.

5) 0,4665 Gr. blev opvarmet til Kogning med en Opløsning af chlorfrit Barythydrat under jevnlig Omrøring i længere Tid; efter Filtrering og omhyggelig Udvaskning blev Overskuddet af Barythydrat fældet med Kulsyre og det hele inddampet til Tørhed, udtrukket med Vand, og Filtratet fra den uopløste kulsure Baryt fældet med Svovlsyre; herved fældes altsaa den til den indeholdte Mængde Eddikesyre svarende Mængde svovlsurt Baryt; denne vejede 0,607 Gr. svarende til 0,3126 Gr. Eddikesyre ($C_2H_4O_2$) i eddikesur Baryt.

Altsaa indeholdt Mangansaltet 67,01 Proc. Eddikesyre.

	Beregnet	Fundet	
Mn	20,52	20,47	20,50.
Virksom *O*	2,98	2,98	3,00.
$C_2H_4O_2$	67,16	67,01.	

Det maa dog bemærkes, at det Salt, hvormed disse Analyser ere foretagne, var af en særlig ren Beskaffenhed og blev analyseret umiddelbart efter Fremstillingen og Tørringen; det var frit for Lugt af Eddikesyre, ligesom det ogsaa ved gjentagne Udvaskninger med Iseddike var befriet for ethvert Spor af eddikesurt Manganforilte. Jeg har oftere havt Produkter, hvor Eddikesyremængden har været lidt lavere, hvorimod Manganmængden var lidt større; dette hidrører aabenbart fra et Indhold af Manganforiltesalt, hvilket ogsaa giver sig tilkjende ved en ringere Mængde virksom Ilt.

Jeg gaar nu over til Beskrivelsen af nogle andre Mangantveiltesalte, der ganske vist kunne fremstilles ved Hjælp af det eddikesure Salt, men da dette dog er lidt besværligt at tilvejebringe i større Kvantiteter, har jeg fundet andre Methoder, der lade sig udføre med ganske anderledes let tilgængelige Stoffer.

Normalt phosphorsurt Mangantveilte.

$$\overset{\cdot VI}{Mn_2} \cdot O_6 \cdot (PO)_2 + 2H_2O.$$

Som tidligere berørt dannes ved Tilsætning af Orthophosphorsyre til en Opløsning af eddikesurt Mangantveilte i Iseddike ved Opvarmning et graalighvidt Bundfald af phosphorsurt Mangantveilte; sandsynligvis er det det samme Salt som Laspeyres[1]) har fremstillet ved Kogning af en vandig Opløsning af den violette smeltede Masse, der faas ved Ophedning af et højere Manganilte med sirupstyk Phosphorsyre i en Platindigel. Dog er

[1]) Journal f. prakt. Chemie [2], 15, 322.

der en Mulighed for, at Laspeyres Salt ogsaa har kunnet indeholde noget pyrophosphorsurt Manganforilte. Jeg har imidlertid fundet, at det normale phosphorsure Mangantveilte lader sig fremstille i saa rigelig Mængde som ønskes paa følgende Maade:

Man opløser ren krystalliseret Orthophosphorsyre i sin dobbelte Mængde Vand, opvarmer denne Opløsning til 100° og tilsætter derpaa efterhaanden under Omrøring en nogenlunde concentreret Opløsning af rent salpetersurt Manganforilte, saaledes at Phosphorsyren er tilstede i Overskud; man holder stadigt Temperaturen ved 100°—105°; Opløsningen bliver strax eller efter nogen Tids Inddampning svagt amethystfarvet, og ved videre Inddampning og Omrøring begynder den at blive blakket og lidt efter lidt at udvikle lavere Kvælstofilter; under denne Luftudvikling, der fra nu af vedbliver, udskilles et graaligt Bundfald af normalt phosphorsurt Mangantveilte i rigelig Mængde. Man holder stadigt Temperaturen ved 100°—105°, ligesom man ogsaa ved Omrøring maa sørge for, at der saavidt muligt ikke afsætter sig nogen Skorpe paa Skaalens Sider; sker dette, dannes der let paa Grund af Overhedning noget Manganoverilte, hvilket let giver sig tilkjende ved den mørke Farve, Skorpen antager, og man maa i saa Fald være særlig forsigtig, naar man fjerner det dannede phosphorsure Salt fra Skaalen, at ikke noget af den mørke, næsten sortfarvede Del af Krystalskorpen følger med, hvilket dog imidlertid let kan undgaas. Naar en større Mængde af Saltet har udskilt sig, gjør man bedst i at lade det sætte sig, og decantherer derpaa Moderluden, ved hvis yderligere Opvarmning, efter Tilsætning af lidt Vand, man er i Stand til at vinde mere af Saltet; Bundfaldet udvaskes først adskillige Gange ved Decanthation, dernæst paa Filter, med koldt Vand, og tørres derpaa i Luften; for at fjerne en ubetydelig Rest af hygroskopisk Vand tørres det tilsidst ved 100°—110°.

Den til Fremstillingen anvendte Phosphorsyre maa være ren Orthophosphorsyre; indeholder den Pyrophosphorsyre, faas et lignende Bundfald, der ved Analysen gav samme Mangan- og Phosphorsyremængde, men indeholdt altfor lidet virksom Ilt; dette kunde kun forklares ved et Indhold af pyrophosphorsurt Manganforilte $Mn_2P_2O_7 + 3H_2O$; dette Salt har, som det vil ses, tilnærmelsesvis samme Molekultal som det orthophosphorsure Mangantveilte $Mn_2P_2O_8 + 2H_2O$.

Det paa ovennævnte Maade fremstillede Salt danner et grønliggraat, mere eller mindre mørkt, krystallinsk Pulver; under Mikroskopet er dog Krystallerne temmelig utydelige. Det paavirkes ikke ved Kogning med fortyndet Salpetersyre eller Svovlsyre, hvorimod det efterhaanden opløses ved Kogning med højst concentreret Saltsyre under Chlorudvikling; dog gaar denne Opløsning ingenlunde særligt let fra Haanden. Ved Rystning med Natronlud angribes det allerede ved almindelig Temperatur, hvorimod Ammoniak først virker i kjendeligere Grad ved Opvarmning. Concentreret Svovlsyre opløser det efterhaanden ved Opvarmning og danner en violet Vædske, der ved Henstand i længere Tid giver et mørkt krystallinsk Bundfald af Fremy's svovlsure Salt.

Det phosphorsure Mangantveilte indeholder 2 Molekuler Vand, der først afgives ved høj Temperatur. Ved 300°—400° i Lufttørrekasse foregaar Tabet kun Milligram for Milligram; først ved svag Rødglødhede bortgaar alt Vand, og samtidigt begynder ogsaa Ilt at undvige, saaledes at der efter Rødglødhede efterlades pyrophosphorsurt Manganforilte i ren Tilstand.

Smelter man krystalliseret Orthophosphorsyre i en Platindigel og opvarmer til 110° paa Sandbad, kan man opløse Manganidphosphatet heri, saaledes som ogsaa Laspeyres angiver, med violet Farve; opvarmer man efterhaanden stærkere under Tilsætning af mere Manganidphosphat, saalænge dette i Løbet af nogen Tid opløses nogenlunde villigt, indtil 170°—180°, og henstiller man derpaa den klare, mættede Opløsning i henved et Døgn ved 170°—180° (i Sandbad), udskilles ofte et penséefarvet, krystallinsk Bundfald, hvis Sammensætning efter en foreløbig Analyse, jeg har udført, synes nærmest at svare til surt pyrophosphorsurt Mangantveilte $\left.\begin{matrix}\overset{VI}{Mn_2}\\ H_2\end{matrix}\right\}(P_2O_7)_2$; dette Salt vil senere blive undersøgt nøjere i Forbindelse med et smukt rødt, krystallinsk Salt, der dannes, naar man opvarmer den smeltede Masse paa Sandbad til ca. 220° i Stedet for til 170°—190°, hvilket Salt ogsaa Laspeyres omtaler.

Analysen af det phosphorsure Mangantveilte gav følgende Resultat:

1) 0,6165 Gr. efterlod ved Glødning 0,519 Gr. $Mn_2P_2O_7$, hvilket svarer til 0,201 Gr. Mangan altsaa 32,60 Proc. Mn og til 0,2595 Gr. P_2O_5 altsaa 42,10 Proc. P_2O_5.

2) 0,722 Gr. gav efter Opløsning i højst conc. Saltsyre, Reduktion med faa Draaber Svovlsyrlingvand og Tilsætning af phosphorsurt Natron samt Fældning med Ammoniak, et Bundfald af krystallinsk phosphorsurt Manganforilte-Ammoniak, som efter Glødning og Correction, ifølge Fresenius, gav 0,605 Gr. $Mn_2P_2O_7$ svarende til 32,45 Proc. Mangan.

3) 0,244 Gr. opløst i højst conc. Saltsyre, Opløsningen reduceret med faa Draaber Svovlsyrlingvand, inddampet og paa sædvanlig Maade behandlet efter Molybdænmethoden, gav 0,1605 Gr. $Mg_2P_2O_7$ svarende til 0,1026 Gr. P_2O_5 eller 42,05 Proc. P_2O_5.

4) 0,464 Gr. forbrugte efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre 28 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, svarende til 4,83 Proc. virksom Ilt.

5) 0,569 Gr. glødet i tør Luftstrøm, og de udviklede Vanddampe absorberede ved Svovlsyre i Winklers Apparat, gav 0,061 Gr. Vand eller 10,72 Proc. H_2O.

	Beregnet	Fundet	
$2Mn$	32,73	32,60	32,45.
P_2O_5	42,26	42,10	42,05.
Virksom O	4,77	4,84.	
$2H_2O$	10,71	10,72.	

Arsensurt Mangantveilte,

$$\overset{VI}{Mn_2} . O_6 . (AsO)_2 + 2H_2O,$$

fremstilles fuldstændigt analogt med det tilsvarende phosphorsure Salt, idet man opløser ren Arsensyre i sin tredobbelte Mængde kogende Vand og til den varme Opløsning efterhaanden sætter en nogenlunde concentreret Opløsning af salpetersurt Manganforilte, saaledes at Arsensyren er tilstede i Overskud; man vedbliver at opvarme til 100°—105°, og under Opvarmningen udskilles da det arsensure Salt under Udvikling af Kvælstofilter; Bundfaldet udvaskes først ved Decanthation, siden paa Filter, og tørres i Luften ved almindelig Temperatur. Det danner et graat Pulver, der er noget mørkere end det phosphorsure Salt.

I sine øvrige Forhold ligner det i høj Grad Phosphatet og opløses ligesom dette med Vanskelighed i højst concentreret Saltsyre, medens det er uopløseligt i Salpetersyre. Ved Kogning med Natron spaltes det og efterlader Mangantveiltehydrat, og med Svovlammonium efterlades Svovlmangan.

Analysen gav følgende Resultat:

1) 0,259 Gr. blev behandlet paa sædvanlig Maade med Jodkalium og Saltsyre; Stoffet opløste sig meget langsomt, men Titreringen lod sig alligevel udføre med $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, af hvilket der blev forbrugt 37 *Cc.* svarende til 0,0296 Gr. virksom Ilt eller 11,42 Proc., af hvilke de to Trediedele hidrøre fra As_2O_5, den ene Trediedel fra Mn_2O_3.

2) 1,034 Gr. blev degereret med Svovlammonium paa Vandbad; det uopløste Svovlmangan blev efter Tørring blandet med Svovl og glødet i en Brintstrøm i Rosesk Digel; herved dannedes 0,423 Gr. MnS svarende til 25,86 Proc. Mangan.

3) 0,602 Gr. blev ophedet i en Porcellænsdigel til svag Rødglødhede; tilsidst dækkedes Diglen faa Øjeblikke med Laag; herved efterlodes en Glødningsrest, der vejede 0,5295 Gr., svarende til et Glødningstab af 12,04 Proc.; dette Tab svarer til $O + 2H_2O$, altsaa bestaar Resten af pyroarsensurt Manganforilte, $Mn_2As_2O_7$; 0,5295 Gr. af dette giver 0,1565 Gr. *Mn* eller 25,99 Proc. *Mn* i Mangantveiltesaltet og 0,3273 Gr. As_2O_5 svarende til 54,36 Proc. As_2O_5 i samme Salt.

	Beregnet	Fundet	
Mn_2	25,94	25,86	25,99.
As_2O_5	54,25		54,36.
O_3	11,32		11,42.

Pyrophosphorsurt Mangantveilte-Natron.

$$\left.\begin{matrix}{}^{VI}\\ Mn_2\\ Na_2\end{matrix}\right\} (P_2O_7)_2 + 10H_2O.$$

Opløser man eddikesurt Mangantveilte i Iseddike under Opvarmning, og heldes den derved dannede Opløsning ned i et Overskud af en Opløsning af pyrophosphorsurt Natron (2 : 25), fældes intet, men der dannes en smuk rød Opløsning, der, naar den er mættet, ved Henstand afsætter et rødt, krystallinsk Bundfald af pyrophosphorsurt Mangantveilte-Natron; koger man den dannede Opløsning, fremkommer Bundfaldet straks, men har da en mere brunlig Farve. Man behøver imidlertid ikke til Fremstilling af dette Dobbeltsalt at anvende eddikesurt Mangantveilte, men kan med Fordel benytte den mørke Opløsning, man faar ved Behandling af glødet Mangantveilte med concentreret Saltsyre ved almindelig Temperatur; heldes denne Opløsning, umiddelbart efter at den er fremstillet, gjennem et nogenlunde tørt Asbestfilter ned i et rigeligt Overskud af pyrophosphorsurt Natron, faar man en meget mørktfarvet Opløsning, der ved Henstand, eller undertiden strax, udskiller det røde krystallinske Salt i rigelig Mængde. Det er af største Vigtighed, at det pyrophosphorsure Natron er til Stede i rigeligt Overskud, saaledes at der ikke bliver fri Saltsyre tilstede i Vædsken; man kan ogsaa raade Bod herpaa ved Tilsætning af eddikesurt Natron, men det er i Almindelighed ikke nødvendigt. Den bedste Maade til at prøve, om det rette Forhold er til Stede, er at opvarme lidt af Blandingen til Kogning i et Reagensglas; udskilles herved et krystallinsk Bundfald, der hurtigt sætter sig, i rigelig Mængde, er Forholdet det rette; fremkommer derimod et fyldigt Bundfald eller, hvad undertiden er Tilfældet, holder Vædsken sig klar, maa der tilsættes mere pyrophosphorsurt Natron. Det ved almindelig Temperatur udkrystalliserede Salt udvaskes med svagt eddikesyreholdigt Vand; vaskes med Vand alene, antager det en mere brunlig Farve paa Overfladen; dog synes Saltet atter ved Tørring i Luften at antage sin oprindelige Farve.

Det tørre Salt danner et rødligt Krystalpulver, der meget let mister noget Krystalvand.

Det er ikke uden Interesse, at man til Fremstilling af dette Salt ogsaa kan anvende Manganoveriltehydrat, idet man behandler dette med concentreret Saltsyre ved almindelig Temperatur og anvender den derved dannede Opløsning umiddelbart efter, at den er fremstillet; man arbejder fuldstændig som ovenfor angivet.

Herved bekræftes Pickerings[1]) Angivelse, at der ved Indvirkning af conc. Saltsyre paa Manganoverilte dannes Mn_2Cl_6 og ikke $MnCl_4$, idet man saaledes direkte af Opløs-

[1]) Journal of the chem. society, vol. 35, p. 654.

ningen kan fremstille et Mangantveiltesalt. Processen ved Indvirkning af Saltsyre paa Manganoverilte bliver altsaa, som Pickering angiver, at udtrykke ved

$$2\,MnO_2 + 8\,HCl = \overset{VI}{Mn_2}Cl_6 + 4\,H_2O + Cl_2,$$

hvorefter ved Opvarmning Mn_2Cl_6 spaltes i $2\,MnCl_2$ og Cl_2.

Naar man behandler frisk tilberedt rent Manganoveriltehydrat med højst conc. Saltsyre, bemærker man ogsaa ved sædvanlig Temperatur en kraftig Chlorudvikling, ligesaa kraftig som naar man sætter Syre til et kulsyreholdigt Stof; dette stemmer ogsaa med ovennævnte Formel.

I Saltsyre opløses det pyrophosphorsure Mangantveilte-Natron let med mørk Farve og udvikler Chlor ved Opvarmning.

Salpetersyre sønderdeler det ved Kogning og efterlader Manganoveriltehydrat.

Conc. Svovlsyre opløser det ved Opvarmning med smuk violet Farve, og Opløsningen afsætter efterhaanden smukke, mørke Krystaller.

Henstilles det pyrophosphorsure Mangantveilte-Natron ved 100°, taber det efterhaanden en Del af sit Krystalvand; efter et Par Timers Henstand ved denne Temperatur tabte en Prøve af Saltet 15,0 Proc.; det saaledes tørrede Salt indsuger Fugtighed under Vejningen.

Ligeledes taber Saltet Vand ved Henstand over Svovlsyre; 0,908 Gr. tabte paa denne Maade i 2 Døgn 0,115 Gr. eller 12,67 Proc.; Resten henstillet ved 100° i 20 Timer tabte derved yderligere 0,057 Gr.; altsaa ialt tabt 0,172 Gr. eller 18,94 Proc., hvilket nærmest svarer til et Tab af 7 Molekuler Vand, hvilket dog kun kræver 18,42 Proc.

Den ved 100° tørrede Rest blev behandlet paa Vandbad med concentreret Saltsyre og Opløsningen reduceret med Svovlsyrlingvand og inddampet til Tørhed; Inddampningen med concentreret Saltsyre blev gjentaget 3 Gange, hvorpaa Resten atter blev opløst i Saltsyre og fældet i Varmen med Ammoniak, hvorved dannes et krystallinsk Bundfald af phosphorsurt Manganforilte-Ammoniak; dette gav ved Glødning 0,379 Gr. $Mn_2P_2O_7$ svarende til 16,15 Proc. Mangan.

Analysen gav iøvrigt følgende Resultat:

1) 0,723 Gr. blev kogt med fortyndet Salpetersyre i Bægerglas paa Asbestplade i 1 Time; det herved dannede Manganoveriltehydrat, hvilket altsaa indeholder Halvdelen af den i Saltet tilstedeværende Manganmængde, gav 0,080 Gr. Mn_3O_4 svarende til 0,0577 Gr. Mangan; altsaa er hele Manganindholdet 0,1154 Gr., svarende til 15,96 Proc. Mangan.

2) 0,576 Gr. behandlet med Jodkalium og Saltsyre brugte 16,9 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 0,01352 Gr. virksom Ilt eller 2,34 Proc.

3) 0,266 Gr. blev behandlet i Platinskaal med lidt Svovlsyrlingvand og concentreret Svovlsyre; derpaa blev inddampet til Tørhed; Resten blev opløst i Salpetersyre og atter inddampet til Tørhed, hvorpaa den blev opløst i concentreret Saltsyre og atter inddampet

til et ringe Rumfang; denne Behandling viste sig nødvendig for at omdanne al Pyrophosphorsyre til Orthophosphorsyre; derefter blev Opløsningen behandlet efter Molybdænmethoden og gav derved 0,1718 Gr. $Mg_2P_2O_7$ svarende til 0,1099 Gr. P_2O_5 eller 41,32 Proc. P_2O_5.

4) 0,5935 Gr. blev behandlet paa samme Maade, og den saltsure Opløsning blev behandlet med Ammoniak, hvorved alt Mangan udfældes som phosphorsurt Manganforilte-Ammoniak; af Filtratet herfra blev Phosphorsyren fjernet ved Jernchlorid, og derefter Natron bestemt som Na_2SO_4 paa sædvanlig Maade; herved dannedes 0,1235 Gr. Na_2SO_4 svarende til 6,74 Proc. Na.

	Beregnet	Fundet	
Mn_2	16,08	15,96	16,18.
P_2O_5	41,52	41,32.	
Virksom O	2,34	2,34.	
Na	6,72	6,74.	

Et Tilbageblik paa de i det foregaaende omtalte Salte viser os, at de fuldtud have Charakteren af Mangantveiltesalte svarende til analoge Jerntveilte-Forbindelser, og at der her ikke vil kunne være Tale om at opfatte dem som Dobbeltforbindelser af Manganoverilte- og Manganforiltesalte; den Methode, hvorefter det phosphorsure og arsensure Salt dannes, beror paa Iltning af Foriltesalt ved Salpetersyre, idet Anvendelsen af salpetersurt Manganforilte egentlig kun er en Modification af denne Fremgangsmaade, og der er al Rimelighed for, at man paa analog Maade vil kunne fremstille Mangantveiltesalte af flere andre Syrer[1]); det er saaledes det samme Princip, hvorefter flere Jerntveiltesalte fremstilles, der her har fundet Anvendelse. Ligeledes dannes det pyrophosphorsure Mangantveilte-Natron paa en med det tilsvarende Jernsalt analog Maade; dog har det sidstnævnte en noget afvigende Sammensætning, medens de phosphorsure og arsensure Jerntveiltesalte kun afvige fra Mangansaltene i Henseende til Vandmængden.

Til samme Række Salte som de ovennævnte maa sikkert ogsaa Fremy's svovlsure Manganforilte-Manganoverilte henregnes og altsaa opfattes som $\overset{VI}{Mn}_2O_6(SO_2)_3 + H_2O_2(SO_2) + 8H_2O$; det dannes nemlig som tidligere bemærket ved Indvirkning af conc. Svovlsyre paa flere af de i det foregaaende nævnte Salte, og den Omstændighed, at det fremstilles af en Opløsning, der indeholder svovlsurt Manganoverilte ved Tilsætning af svovlsurt Manganforilte, behøver ikke at tale imod den her fremsatte Anskuelse; i saa Henseende have vi ogsaa en vis Analogi i Dannelsen af Kobberforchlor ved Indvirkning af metallisk Kobber paa en saltsur Opløsning af Kobbertvechlor.

[1]) cfr. Etard, Comptes rendus, 86, p. 1400.

Hvad Manganalun angaar, har det mærkeligt nok ikke været mig muligt at fremstille denne Forbindelse; allevegne, hvor jeg har troet at have den i Hænde, har det vist sig, at jeg havde med Fremy's Salt at gjøre; selv ved Opløsning af en afvejet Mængde $Mn_2\overset{VI}{O_3}$ i Flussyre og Tilsætning af den nøjagtige Mængde Fluorkalium, saaledes at der for hver Mn_2 var $2K$, og Behandling af Opløsningen med conc. Svovlsyre, fik jeg af den derved dannede røde Opløsning, efter at Flussyren var uddrevet, ved Henstand over Svovlsyre kun surt svovlsurt Mangantveilte. Muligvis vil dog yderligere anstillede Forsøg føre til et andet Resultat.

III.

Vi have i de foregaaende Afsnit oftere omtalt Manganets Tilbøjelighed til at optræde som tetravalent Enkeltatom overfor Ilt som Aarsagen til Mangantveiltets Spaltning ved Syrer i MnO_2 og MnO og til Mangantveiltesaltenes relative Ubestandighed; denne Stræben efter at optræde som tetravalent Enkeltatom og efter at bevare denne Tilstand, naar den éngang er naaet, bemærke vi som bekjendt ved flere Lejligheder; dels finde vi i Naturen Pyrolusit som Pseudomorphoser efter Manganit, og dels er det en Kjendsgjerning, at det er forbundet med langt større Vanskelighed at fremstille Mn_3O_4 ved Glødning af vandfrit Manganoverilte, end ved Glødning af Manganforilte eller dettes Forbindelser med Kulsyre eller organiske Syrer. I det følgende skal jeg nu først gjøre Rede for nogle Glødningsforsøg med rent Manganoverilte og med Manganmellemilte for derefter at gaa over til at omtale nogle Fænomener, der staa i nær Forbindelse med det ovenomtalte og derved tillige beskrive et Par af de til Fremstillingen af eddikesurt Mangantveilte anvendte Ilter noget nærmere.

2,295 Gr. rent Manganoverilte blev glødet over en almindelig Bunsensk Lampe i aaben Porcellænsdigel i 56 Timer og derpaa over en kraftig Iserlohner Lampe i ca. 30 Timer; det aftog derved 0,172 Gr. og Resten vejede alsaa 2,123 Gr., medens den ved fuldstændig Omdannelse til Mn_2O_3 kun skulde veje 2,084 Gr.; efter Glødning over Blæselampen i $^1/_4$ Time aftog det yderligere, saaat Vægten nu var 2,078 Gr.; det var altsaa nu paa det nærmeste Mn_2O_3. Efter længere Tids Glødning for Blæselampen aftog Vægten, saaledes at den efter $1^1/_2$ Times Forløb var 2,031 Gr.; Mn_3O_4 vilde kræve 2,014 Gr.; Laaget blev nu lagt paa Diglen, og Glødningen gjentaget for Blæselampen i Skorsten, hvorved efter $^1/_4$ Times Forløb Vægten aftog til 2,002 Gr.; vi ere altsaa nu passerede forbi Mn_3O_4; yderligere Glødning i lukket Digel paa samme Maade bevirkede, at Vægten efter en Times Forløb aftog til 1,977; Stoffet havde nu en rødbrun Farve med iblandet grønt; det lykkedes ved yderligere Glødning at danne saa meget Manganforilte, at den pulveriserede Glødningsrest tilsidst kun indeholdt 0,93 Proc. virksom Ilt, medens Mn_3O_4 indeholder 6,99 Proc. En Undersøgelse af Glødningsresten viste tydeligt, at Manganoveriltet paa de hedeste Steder af Diglen nærmest Bunden og Siderne har været fuldstændigt reduceret til Manganforilte, da Glødningsresten paa disse Steder var ren grøn, medens den paa Overfladen stadigt var kanelbrun som Manganmellemilte.

Et med dette parallelt Forsøg blev udført i Platindigel, idet 1,759 Gr. rent Manganoverilte blev ophedet over en Bunsensk Lampe; efter 20 Timers Forløb vejede Resten

1,5935 Gr. og bestod nu af Mn_2O_3, der kræver 1,597 Gr.; i Mellemtiden, nemlig efter 5 Timers Glødning, havde Vægten været lavere, idet Resten da vejede 1,5855 Gr.; der maa altsaa atter have fundet en Iltabsorbtion Sted, formodentlig paa et Punkt, hvor Varmen har været ringere paa Grund af Vexlen i Gastrykket. Efter den omtalte Glødning i 20 Timer blev anvendt en kraftigere Lampe, og man bemærkede nu, at Vægten snart aftog, snart tiltog, saaledes at den efter ca. 75 Timer var 1,590 Gr.; vi ere saaledes ikke naaede langt forbi Mn_2O_3; 2 Timers Glødning i lukket Digel bevirkede en Nedgang til 1,535 Gr., og Farven var nu rødbrun som Mn_3O_4; tager man atter Laaget af Diglen og opheder den, bemærkes en Forøgelse af Vægten, saaledes at denne efter et Par Timers Forløb var 1,546; der har altsaa atter her fundet en Iltabsorbtion Sted, hvilket ogsaa tydeligt bemærkes, idet Glødningsrestens Overflade, der før var kanelbrun, nu har antaget en mørk Farve, navnlig i Midten af Diglen, hvor Stoffet ikke har været udsat for saa stærk Varme, og hvor derfor Manganmellemiltet kan være til Stede i den mindre cohærente Tilstand, hvori det formaar at ilte sig ved Opvarmning til nogle hundrede Grader.

Fortsættelse af Glødningen, tilsidst for Blæselampen, førte tilsidt til samme Resultat som det foranførte, at der fandt en delvis Afiltning til Manganforilte Sted. Dette har allerede Pickering[1]) o. a. tidligere bemærket, men antager, som rimeligt, at det skyldes Platinets Porøsitet, hvorved reducerende Luftarter fra Flammen kunne faa Adgang til Stoffet. Geuther[2]) har iøvrigt reduceret Manganoverilte til Manganforilte ved Ophedning i et hvidglødende Jernrør, men ogsaa her kan maaske Metallets Porøsitet eller Kulstofholdighed have havt nogen Indflydelse.

Af det før omtalte Forsøg, der blev udført i Porcellænsdigel over en meget kraftig Blæselampe, synes det dog at fremgaa at selve Glødheden er tilstrækkelig til at fremkalde den fuldstændige Reduktion, da det neppe synes muligt at reducerende Luftarter her kunne faa Adgang.

Et Forsøg blev udført med Manganmellemilte, Mn_3O_4, ved Glødning i lukket Porcellænsdigel for Blæselampen i Skorsten. 1,171 Gr. Mn_3O_4 vejede efter Glødning i $1^1/_2$ Time 1,097 Gr. og efter yderligere $^3/_4$ Time 1,090 Gr.; fortsat Glødning gav en Rest, der kun indeholdt 1,13 Proc. virksom Ilt. Af dette Produkt blev 0,560 Gr. atter glødet i lukket Porcellænsdigel for Blæselampen i 1 Time og vejede derefter uforandret 0,560 Gr., men Overfladen af Massen var nu kanelbrun, medens den før Glødningen var graagrøn; da Vægten var den samme, maa altsaa det nederste Parti have afgivet noget Ilt, der atter er blevet optaget af det øverste Lag; heraf følger, at reducerende Luftarter næppe have kunnet have Adgang mellem Laaget og Diglen. Dette bekræftedes yderligere ved et Forsøg, hvor Glød-

[1]) Chem. news, 1881.
[2]) Jahresbericht 1865, 226.

ningen foretoges i en Roses Digel med tilkittet Laag og Porcellænsrør; Resultatet var ganske det samme, og her synes alle Muligheder for Adgang af reducerende Luftarter udelukkede.

Det fremgaar heraf, at Manganoverilte maa antages ved stærk Hvidglød uden Luftens Adgang at afgive Halvdelen af sin Ilt og blive til Manganforilte; Geuthers Forsøg bekræftes altsaa herved. Ved høje Temperaturer bliver altsaa Manganforiltet det bestandigste Manganilte.

Det ovenfor berørte Forhold, at Manganmellemilte i en vis mindre cohærent Tilstand formaar at optage Ilt, gjenfinde vi hos det Manganmellemilte, der efter Moissans [1]) Angivelse dannes ved Reduktion af MnO_2 i en Brintstrøm ved 250°; jeg har gjentaget Moissans smukke Forsøg, idet jeg ophedede ren Manganoverilte i et U-formigt Rør, der var anbragt i et Bad af en smeltet Blanding af lige Molekuler Kalium- og Natriumnitrat først til 230° i 6 Timer; man bemærkede stadigt Udvikling af Vanddampe, naar man for Enden af Afledningsrøret anbragte et koldt Uhrglas; efter Moissans Angivelse skulde man ved denne Temperatur faa Mangantveilte; man bemærkede ogsaa paa et vist Punkt en betydelig Aftagen i Vanddampenes Mængde, men nogen fuldstændig Standsning fandt ikke Sted, idet Uhrglasset stadigt beslog sig med Dug; den sikreste Maade til at træffe det rette Punkt vil derfor være at controllere Vægttabet ved Vejning; ved det Forsøg, jeg udførte, viste det sig, at Produktet indeholdt 8,87 Proc. virksom Ilt, hvilket viser, at Grændsen var overskredet, idet Mn_2O_3 kræver 10,1 Proc. Et andet Forsøg, hvor Temperaturen blev holdt lidt lavere end 230°, gav et Ilte, der indeholdt 11,4 Proc. virksom Ilt; altsaa var man ikke her naaet til Mn_2O_3. Fortsattes Opvarmningen paa samme Maade ved 250° fik man et Produkt, der indeholdt 7,3 Proc. virksom Ilt, og dette svarer altsaa meget nær til Mn_3O_4, der kræver 6,99 Proc. virksom Ilt.

Bringes lidt af dette Produkt i en Porcellænsdigel og opvarmes svagt over en Bunsensk Lampe, optager det, saaledes som Moissan angiver, Ilt og antager en mørkere Farve. 0,4915 Gr. af dette iltede Produkt brugte efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre 50 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 8,13 Proc. virksom Ilt, altsaa 0,8 Proc. mere end i det anvendte Manganmellemilte.

De i det foregaaende omtalte Glødningsforsøg vise Resultater, der selvfølgelig ere i høj Grad afhængige af de Betingelser, hvorunder de anstilles, idet saavel de anvendte Diglers Tykkelse og Rumfang som Lampernes Styrke faar en betydelig Indflydelse. Dog fremgaar det tydeligt deraf, at Manganet kun med stort Besvær kan bringes til fuldstændigt at gaa over fra den tetravalente til den divalente Form i sit Forhold overfor Ilt, medens det derimod søger ved given Lejlighed at gaa den omvendte Vej.

---

[1]) Ann. de chimie et de phys. [5] 21, p. 231 o. f.

Dette ses ogsaa, naar vi betragte det Manganmellemilte, der hyppigere er bleven anvendt ved nærværende Undersøgelser, og som fremstilles ved Tilsætning af frisk tilberedt Manganoveriltehydrat til en ammoniakalsk salmiakholdig Opløsning af Manganforchlor under Opvarmning, saaledes som Otto[1]) angiver. Jeg skal her meddele et Par udførligere Analyser af dette Stof end der foreligger fra tidligere Undersøgeres Haand.

1. Manganmellemiltehydrat fremstillet nøjagtigt efter Ottos Forskrift.

1) 0,826 Gr. lufttørret Manganmellemilte blev behandlet med fortyndet Salpetersyre i Bægerglas paa Asbestplade og opvarmet til Kogning i en Time; herved lades Manganoverilte uopløst; dette gav 0,2735 Gr. Mn_3O_4 eller 33,11 Proc.

2) 0,941 Gr. gav ved Glødning i Platindigel et ensartet kanelbrunt Mn_3O_4, der vejede 0,894 Gr. svarende til 88,36 Proc. MnO.

3) 0,817 Gr. tabte ved 100° 0,017 Gr. eller 2,07 Proc.

4) 1,285 Gr. tabte ved Tørring over Svovlsyre i 40 Timer 0,0225 Gr. svarende til 1,75 Proc.

5) 0,368 Gr. lufttørret Stof, behandlet med Jodkalium og Saltsyre, brugte 32,3 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 0,02584 Gr. virksom Ilt eller 7,02 Proc.

Uagtet sit Vandindhold indeholder altsaa Stoffet samme Mængde virksom Ilt som vandfrit Mn_3O_4; det maa altsaa indeholde et Overskud af Manganoverilte.

Det lufttørrede Stof faar altsaa Sammensætningen:

$3\,MnO$	88,36 Proc.	
O	7,02 —	
xH_2O	4,62 —	(Differens).

6) 0,893 Gr. af det over Svovlsyre tørrede Ilte gav efter Kogning med Salpetersyre et Manganoveriltehydrat, der efter Glødning gav 0,297 Gr. Mn_3O_4 eller 33,26 Proc.

7) 0,379 Gr. af samme over Svovlsyre tørrede Ilte brugte efter sædvanlig Behandling med Jodkalium og Saltsyre 34,1 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron svarende til 7,19 Proc. virksom Ilt.

8) 0,5025 Gr. af det ved 100° tørrede Stof efterlod ved Behandling med fortyndet Salpetersyre et Manganoveriltehydrat, der ved Glødning gav 0,171 Gr. Mn_3O_4 eller 34,03 Proc.

9) 0,305 Gr. af det ved 100° tørrede Stof brugte ved Titrering med $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron 28,3 *Cc.* svarende til 7,42 Proc. virksom Ilt.

---

[1]) Liebigs Annaler, 93, 372.

Saafremt det Tab af 2,07 Proc., som det lufttørrede Ilte lider ved Tørring ved 100°, repræsenterede det fuldstændige Vandtab ved denne Temperatur, uden at der samtidigt foregik en Iltning af Stoffet, vilde dette kun kunne medføre en meget ringe Forskjel i Mængden af virksom Ilt i det lufttørrede og det ved 100° tørrede Stof, idet de 7,02 Dele der før fandtes paa 100 Dele nu skulde findes i 97,93 Dele, hvilket vilde give det Resultat, at det ved 100° tørrede Stof skulde indeholde 7,16 Proc. virksom Ilt; da der fandtes 7,42 Proc. er der altsaa allerede ved 100° foregaaet en Iltning; denne bliver ifølge J. Posts [1]) Undersøgelser langt betydeligere ved 250° til 300°, saaledes som vi ogsaa senere skulle se.

Otto angiver, at det her omtalte Manganmellemiltehydrat ikke angribes ved Kogning med en Salmiakopløsning, hvorfor han anvender denne Methode til at rense det for Manganforilte; ifølge Roses [2]) Angivelse angribes derimod det cohærente glødede Manganmellemilte af Salmiak; der synes her at være en ikke let forklarlig Uoverensstemmelse mellem de to Ilter, da det dog er overvejende sandsynligt, at det mindre cohærente Ilte maa være lettere angribeligt. At Roses Angivelse er rigtig viser følgende Forsøg:

1) 1,077 Gr. glødet Mn_3O_4 blev opvarmet med en concentreret Salmiakopløsning paa Vandbad i 1 Time; Filtratet gav en meget tydelig Manganreaction med Svovlammonium; og Bundfaldet gav efter Glødning 1,056 Gr. Mn_3O_4, der var altsaa tabt 0,021 Gr. eller 1,95 Proc.

2) 1,249 Gr. behandlet paa samme Maade, men inddampet til Tørhed i 3 Timer, tabte 0,067 Gr., altsaa 5,44 Proc.

3) 1,409 Gr. behandlet med conc. Salmiakopløsning i 15 Timer i Porcellænsskaal overdækket med Tragt, saaledes at det fordampende Vand stadigt fortættedes og flød tilbage, tabte 0,064 Gr. eller 4,0 Proc.; det synes af Forøgene 2 og 3 at fremgaa, at Salmiakken ved Inddampning til Tørhed ved 100° angriber Manganmellemiltet langt stærkere; formodentlig findes der allerede ved denne Temperatur en Dissociaton Sted af Salmiakken i NH_3 og HCl, naar et andet Stof er til Stede, hvormed Saltsyren kan forene sig.

Det synes mig herefter sandsynligt, at Ottos Manganmellemilte ogsaa maa angribes af en Salmiakopløsning, og jeg søger en Støtte for denne Anskuelse i den Omstændighed, at dette Ilte, naar det fremstilles paa den af Otto angivne Methode og koges med Chlorammonium, altid indeholder for meget virksom Ilt, hvilket altsaa kan hidrøre fra den Omstændighed, at Salmiakken har berøvet det noget Manganforilte. Til nærmere Undersøgelse af dette Forhold saavelsom for at prøve, hvorvidt Sammensætningen af dette Ilte var nogenlunde constant, fremstillede jeg en ny Portion deraf, anvendte rigeligt Overskud af Manganforilte og kogte en enkelt Gang med Salmiak, men undlod den gjentagne Kogning hermed

---

[1]) Verh. zur Beförderung d. Gewerbefl. in Preussen, 58, p. 468, og Gmelin-Kaut: Handbuch der Chemie, II, p. 442.

[2]) Handbuch der anal. Chemie, 1867, Bd. I, p. 235.

og tørredc efter omhyggelig Udvaskning Stoffet ved almindelig Temperatur. Dette Produkt, der havde en særdeles smuk kanelbrun Farve, blev underkastet følgende Analyse:

2. Manganmellemilte fremstillet efter Ottos Methode med Udeladelse af den gjentagne Kogning med Salmiakopløsning.

1) 1,2755 Gr. gav efter Glødning 1,217 Gr. Mn_3O_4 svarende til 88,74 Proc. MnO.

2) 0,567 Gr. gav ved Glødning i en tør Iltstrøm 0,559 Gr. Mangantveilte, der ved Titrering viste sig at indeholde 0,0252 Gr. virksom Ilt (9,96 Proc.) og altsaa svarer til 88,76 Proc. MnO i det anvendte Manganmellemilte, hvilket stemmer med Glødningsbestemmelsen som Manganmellemilte.

3) 0,559 Gr. afgav ved Glødning i en tør Luftstrøm 0,0245 Gr. Vand, der absorberedes i Winklers Absorptionsrør; dette giver 4,38 Proc. H_2O.

4) 0,588 Gr. brugte efter Behandling med Jodkalium og Saltsyre 50 $Cc.$ $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, hvilket svarer til 6,80 Proc. virksom Ilt.

Resultatet er altsaa, at det lufttørrede Ilte har Sammensætningen:

$3\,MnO$	88,76 Proc.	
O	6,80 —	
$x\,H_2O$	4,38 —	(direkte).
	99,94 Proc.	

Dette Produkt indeholder altsaa en mindre Mængde virksom Ilt end det føromtalte og nærmer sig meget til rent Manganmellemilte; de 95,54 Dele vandfrit Ilte, der findes deri, indeholde 6,80 Proc. virksom Ilt, hvilket vilde give 7,1 Dele paa 100, medens rent Mn_3O_4 kræver 6,99 Proc.; Forskjellen er altsaa ringe.

Dette Ilte blev nu prøvet overfor en concentreret Salmiakopløsning, idet det blev opvarmet dermed paa Vandbad; det viste sig herved, at der efter en Times Forløb kunde paavises kjendelige Mængder Mangan i Filtratet fra det uopløste ved Hjælp af Svovlammonium, og den uopløste Rest afgav efter Udvaskning atter Manganforilte til en Salmiakopløsning. Dette Manganmellemilte angribes altsaa af Salmiak, men som rimeligt er findes der snart en Grændse, hvor denne Virkning maa ophøre; dette følger ligefrem af Dannelsesmaaden for Iltet, thi det er netop fremstillet ved Indvirkning af Manganoveriltehydrat paa Manganforilte i ammoniakalsk salmiakholdig Opløsning, altsaa maa der ved Salmiakkens Indvirkning paa det dannede Ilte snart indtræde et Punkt, hvor Betingelserne for dets Dannelse atter er tilstede, idet der er gaaet Manganforilte i Opløsning, frigjort lidt Ammoniak og dannet noget Manganoveriltehydrat. Heri have vi sandsynligvis Aarsagen til, at Ottos

Manganmellemilte indeholder lidt Overskud af virksom Ilt, da det er behandlet med Salmiakopløsning indtil Produktet ikke afgav mere Manganforilte til denne.

Roses Angivelse gjælder altsaa saavel for det glødede som for det vandholdige Manganmellemilte; begge angribes af Salmiak, dog er det sandsynligt, at der herved dannes Manganoverilte og ikke Mangantveilte, som Rose anfører, da det sidstnævnte ogsaa angribes af en Salmiakopløsning.

Henstilles det paa ovennævnte Maade fremstillede Manganmellemiltehydrat, hvis Sammensætning er angivet ved den sidstanførte Analyse, i en Platindigel i Sandbad ved 300°—330° optager det en betydelig Mængde Ilt; 1,0582 Gr., der henstod paa denne Maade i ca. 12 Dage, havde efter denne Tids Forløb antaget en næsten sort Farve og vejede derefter 1,0826 Gr.; 0,372 Gr. af dette sorte Ilte brugte efter sædvanlig Behandling med Jodkalium og Saltsyre 51,6 *Cc.* $^2/_{10}$ normal svovlundersyrligt Natron, svarende til 11,09 Proc. virksom Ilt; denne Iltmængde svarer til et Indhold af 60,34 Proc. Manganoverilte; Iltningen er altsaa skredet noget forbi Mn_2O_3 og paa Vej til MnO_2, hvilket Maal selvfølgeligt vilde være uopnaaeligt, da ren Manganoverilte begynder at afgive sin Ilt ved 210°. J. Post[1]) har bragt Ottos Manganmellemiltehydrat til at optage saa meget Ilt ved 300°, at det derefter indeholdt 56,95 Proc. MnO_2; dette stemmer altsaa meget vel med ovenanførte Forsøg, hvor den anvendte Temperatur var noget højere og Absorptionen maaske derfor noget stærkere.

Den Egenskab at ilte sig højere tilkommer saaledes i høj Grad Manganmellemiltehydrat, men ogsaa med den naturlige Manganit $Mn_2O_2 . O_2H_2$ lader det sig ved Forsøg vise, at den under visse Omstændigheder optager Ilt, ligesom vi i Naturen finde Pyrolusitkrystaller som Pseudomorphoser efter Manganit. Jeg henstillede fintpulveriseret Manganit paa et Uhrglas i et Kobbertørreskab ved 100°, under daglig Befugtning med destilleret Vand, i 4 Uger; det viste sig derefter, at Stoffet, der oprindeligt indeholdt 9,18 Proc. virksom Ilt, nu indeholdt 9,73 Proc.; under Processen var Pulveret stærkt sammensintret og havde antaget en mørkere Farve. Under den forenede Indvirkning af Fugtighed og Varme var altsaa Manganitten begyndt sin Omdannelse til Pyrolusit.

Det følger ogsaa af, hvad her er fremført, at man ved Fremstilling af Manganilter, der ere lavere end MnO_2, ad den vaade Vej, aldrig maa tørre det fugtige Ilte ved 100° men altid først maa anvende Lufttørring, da man i modsat Tilfælde altid faar en noget for høj Iltmængde. Pickering har allerede tidligere bemærket dette, men ikke forfulgt Spørgsmaalet videre.

Jeg er nu naaet til Slutningen af dette Afsnit af mine Undersøgelser, der væsentlig have omfattet Manganets Forhold til Jerngruppens Metaller og dets Tilbøjelighed til at op-

[1]) Se foran.

træde tetravalent overfor Ilt; Fortsættelsen af nærværende Arbejde vil nærmest omfatte Manganets Stilling til Platingruppen, til hvilket Spørgsmaal Nicklès [1]) Undersøgelser har givet et væsentlig Bidrag.

Nærværende Arbejde er udført i den polytekniske Læreanstalts chemiske Laboratorium, og jeg bringer herved dettes Bestyrer, Hr. Lektor, Dr. phil. S. M. Jørgensen en hjertelig Tak for den Beredvillighed, hvormed han har stillet alt til min Raadighed, hvad der krævedes til Arbejdets Udførelse.

[1]) Comptes rendus, 65, p. 107.

Kjøbenhavn, d. 7de Marts 1883.

Farvespredningens Theori.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 5.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1883.

Da vi kjende saavel Lovene for Lysbevægelserne i et fuldkommen homogent og gjennemsigtigt Medium som Lovene for Bevægelserne ved Overgangen fra et saadant Medium til et andet lignende, saa maa det altid være muligt uden nogen som helst Hypothese at beregne Lysbevægelserne i det Indre af et ikke homogent, overalt fuldkommen gjennemsigtigt Medium, naar kun Lysets Hastighed, den eneste Størrelse, hvorpaa det her kommer an, er bekjendt i ethvert Punkt af samme. Jeg skal her forsøge at udføre en saadan Beregning med det Formaal, at udlede Loven for et isotropt, gjennemsigtigt Legemes Farvespredning, navnlig for saa vidt denne er afhængig af Bølgelængden og Legemets Vægtfylde.

De almindelige, til en variabel Forplantningshastighed svarende, Love for Lysbevægelserne har jeg allerede for 20 Aar siden udviklet i min Lystheori. Disse almindelige Love skal jeg her, uden at støtte mig paa tidligere Arbejder, udlede paa ny og paa en simplere Maade.

Da endvidere Opgaven gaar ud paa at beregne Lysbevægelserne i et Legemes Indre, saa maa en bestemt indre Konstitution af Legemet forudsættes. Der kan vel næppe herske nogen Tvivl om, at Legemerne bestaa af adskilte Atomer eller Molekuler, og det fremgaar yderligere af min Theori af Refraktionskonstanten, som har vist sig i god Overensstemmelse med Erfaringen, at ved alle fysiske Tilstandsforandringer forbliver en Del af Lysmediet uforanderlig forbunden med Atomerne, medens Lyset i det øvrige Mellemrum forplanter sig med samme Hastighed som i det tomme Rum eller i Verdensrummet. Forøvrigt bliver der med Hensyn til Atomernes Gruppering og Lysmediets Afhængighed af denne Gruppering endnu en vid Mark aaben for Hypotheser, men til en Begyndelse maa Beregningen indskrænke sig til de simplest mulige Forudsætninger. Jeg antager derfor, at Lysets Hastighed nær ved Atomerne, som jeg betragter som mathematiske Punkter, er en Funktion af Afstanden fra Atomet og den samme Funktion for alle Atomer, at endvidere Hastigheden i større Afstande er den samme som i det tomme Rum, og endelig, at Atomerne ere lejrede tilfældigt, dog saaledes, at de tilfredsstille Betingelserne for Legemets Isotropi.

Man vil her kunne gjøre den Indvending, at Atomernes indre Bevægelser ligeledes ere en uomstødelig Kjendsgjerning, som ogsaa maa tages med i Betragtning. Efter de for Tiden gængse Forestillinger ere disse Bevægelser af en dobbelt Art, dels nemlig saadanne som antages at være identiske med Varmen, dels andre, som foregaa i Takt med Lyssvingningerne og som antages at være Aarsagen til Legemernes Absorbtion og Udstraaling af Lyset.

Skjøndt jeg ingenlunde anser Identiteten af Varmen og de indre molekulære Bevægelser for bevist, saa betvivler jeg dog aldeles ikke saadanne Bevægelsers Existens, men de Hastigheder, hvorom her er Tale, ville i Sammenligning med Lysets Hastighed altid være saa smaa, at de ingen kjendelig Indflydelse kunne faa paa Lysbevægelserne. Det eneste bekjendte Spor af en Indvirkning af Legemernes Bevægelser paa Lyset (bortset fra et meget tvivlsomt, 33 Aar gammelt Forsøg af Fizeau over Lysets Gjennemgang gjennem strømmende Vand) er Stjernernes Aberration, men de molekulære Hastigheder ere endnu langt mindre end Jordens Hastighed i Verdensrummet.

Den anden Art af Bevægelser danner Grundlaget for de nyere Lystheoretikeres Arbejder over Absorbtionen og Emissionen. Mod Antagelsen af disse Bevægelser kunde strax gjøres den Indvending, at naar et Legemes Atomer skulde ligesom Lyset kunne udføre 500 Billioner Svingninger i Sekundet, saa maatte der være saa uhyre Kræfter tilstede i Legemets Indre, at en Forskydelse af en Billiontedel Millimeter fra Ligevægtsstillingen af de i et Gram indeholdte Atomer vilde udkræve et Tryk af en Billion Kilogram. Denne Hypothese er dog ikke opfunden for at forklare en eller anden umiddelbart ved Lyset fremkaldt Massebevægelse, da vi overhovedet ikke kjende nogen saadan Virkning af Lyset, men kun til Forklaringen af visse optiske Fænomener, som maaske ogsaa kunde forklares paa anden Maade. Hvorledes nu dette end forholder sig, saa vil det dog i ethvert Tilfælde være nødvendigt først at beregne Medsvingningerne af det Atomerne omgivende Lysmedium under Forudsætning af, at Atomerne ere i Hvile. Skulde det derefter vise sig nødvendigt at antage Atomernes Medsvingninger, saa vilde disse altid bagefter kunne medtages i Regningen.

De almindelig anerkjendte Love for Lysets Svingninger i et isotropt og fuldkommen homogent Medium kunne udtrykkes ved følgende Ligninger:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2\xi = \frac{d^2\xi}{a^2dt^2},\quad \Delta_2\eta = \frac{d^2\eta}{a^2dt^2},\quad \Delta_2\zeta = \frac{d^2\zeta}{a^2dt^2},\\ \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz} = \theta = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

idet ξ, η, ζ ere Lyssvingningernes Komposanter og

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

a betegner her Lysets konstante Forplantningshastighed.

Ved Overgangen fra et saadant Medium til et andet lignende, hvor dog Hastigheden er forskjellig, følger Lysstraalen den bekjendte Sinuslov, medens ifølge de af Fresnel opdagede Love Amplituderne i de indfaldende, brudte og tilbagekastede Straaler forholde sig som

$$1 : \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} : \frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)},$$

naar den indfaldende Straales Svingninger ligge i Indfaldsplanen, og som

$$1 : \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} : -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

naar den indfaldende Straales Svingninger ere vinkelret paa Indfaldsplanen. Ved α er Indfaldsvinklen, ved β Brydningsvinklen betegnet. Polarisationsplanen er her antaget vinkelret paa Svingningsretningen.

Den af mig udviklede Theori gaar alene ud fra, at disse Love ere almindelig gjældende, saaledes at alle Afvigelser fra disse Love kun hidrøre derfra, at intet Legeme er fuldkommen homogent, og at Overgangen fra et Legeme til et andet foregaar successivt, uden Afbrydelse af Kontinuiteten.

De ovenfor angivne Love kunne ogsaa udtrykkes paa en anden Maade. Naar Koordinatplanen yz tages som Grænseplanen imellem de to Medier, saa ville de fire Størrelser

$$\eta,\ \zeta,\ \frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy},\ \frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}$$

paa begge Sider af Grænseplanen faa lige store Værdier, hvilket fremgaar af de angivne Love, ligesom ogsaa disse omvendt kunne udledes af denne Sætning. Heraf følger, at for Exempel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right) \text{ og } \frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)$$

ere endelige overalt, ogsaa for $x = 0$. Ved Addition af disse to Størrelser erholdes

$$\Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}.$$

Dette Udtryk har altsaa overalt en endelig Værdi. Man vil saaledes ifølge den anden Ligning (1) kunne danne Ligningen

$$\Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{dt^2}$$

som fælles for begge Medier, idet ω er Forplantningshastigheden, som antager forskjellige Værdier i de to Medier. Paa ganske lignende Maade kan man af de ovenstaaende Grænsebetingelser udlede Ligningen

$$\Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

og, da yz-Planen vilkaarlig er valgt som Grænseplan, ved Omsætning af Bogstaverne

$$\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}.$$

Saaledes ere altsaa alle Lovene for Lysbevægelserne udtrykte ved tre partielle Differentialligninger, af hvilke atter de Love, vi ere gaaede ud fra, let ville kunne afledes. De fundne Differentialligninger maa ogsaa vedblive at gjælde, naar ω betragtes som en hvilken som helst Funktion af x, y og z. De indeholde egentlig intet nyt, og man vilde kunne undvære dem, men de ere af stor Betydning for den praktiske Regning.

Indskrænke vi Beregningen til en Bølgebevægelse med given Svingningstid, kunne vi udtrykke Afhængigheden af Tiden t ved den fælles komplexe Faktor e^{kti}. Sættes

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu,$$

gaa de ovenfor fundne Differentialligninger over til

$$\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} + \mu \xi = 0, \quad \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} + \mu \eta = 0, \quad \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} + \mu \zeta = 0. \quad \ldots \quad (2)$$

Jeg skal først søge at bestemme Lysbevægelsen i et af koncentriske kugleformige Lag bestaaende Medium, hvor Lysets Hastighed er alene Funktion af Afstanden r fra Centret. Inden for ethvert af disse Lag antages μ konstant, medens i de forskjellige Lag μ antager forskjellige Værdier. Selvfølgelig udelukker denne Forudsætning ikke det Tilfælde, at μ forandrer sig kontinuerlig, da Lagenes Tykkelse altid kan antages saa lille, som man vil.

Sættes

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho,$$

og multipliceres Ligningerne (2) henholdsvis med x, y og z, saa erholdes ved Addition

$$\Delta_2 \rho - \frac{dr^2 \theta}{r dr} + \mu \rho = 0. \quad \ldots \quad (3)$$

De samme Ligninger (2) differentierede med Hensyn til x, y, z og adderede give

$$\mu \theta + \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\rho}{r} = 0. \quad \ldots \quad (4)$$

Medens μ i Grænsefladen mellem to Lag forandrer sig diskontinuerlig, ville visse Funktioner af Svingningskomposanterne overalt variere kontinuerlig. Saaledes fremgaar af Ligning (3), at

$$\frac{d^2 r\rho}{r dr^2} - \frac{dr^2 \theta}{r dr}$$

er endelig overalt, hvoraf følger, at

$$\frac{dr\rho}{dr} - r^2 \theta$$

er en kontinuerlig Funktion, som altsaa paa begge Sider af enhver Grænseflade, hvor μ forandrer sig diskontinuert, har den samme Værdi. Jeg vil udtrykke dette ved følgende Betegnelse

$$\left[\frac{dr\rho}{dr} - r^2\theta\right] = 0.$$

Da endvidere paa begge Sider af Grænsefladen μ er konstant og θ derfor lig 0, saa reduceres denne Grænsebetingelse til

$$\left[\frac{dr\rho}{dr}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

En anden Grænsebetingelse fremgaar deraf, at

$$\theta - \frac{d}{dr}\frac{\rho}{r}$$

maa være endelig overalt, da Differentialkoefficienterne med Hensyn til r her bortfalde. Indsættes heri den i Ligning (4) angivne Værdi af θ, gaar Udtrykket over til

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{dr}\frac{\mu\rho}{r},$$

hvoraf følger, at $\mu\rho$ er en kontinuerlig Funktion, og at man altsaa for alle Grænseflader har

$$[\mu\rho] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Disse to Grænsebetingelser i Forbindelse med den inden for ethvert Lag, hvor μ er konstant, gjældende Differentialligning

$$\Delta_2\rho + \mu\rho = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ere tilstrækkelige til Bestemmelsen af ρ.

Naar i den første Ligning (2) sættes $x = r\cos\varphi$, ses det, at

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d\theta}{dr}r\cos\varphi + \frac{d\theta}{d\varphi}\sin\varphi$$

er en Størrelse, som overalt er endelig. Da endvidere ligeledes, som ovenfor vist,

$$\frac{d^2r\rho}{dr^2} - \frac{dr^2\theta}{dr} \text{ og } \theta - \frac{d}{dr}\frac{\rho}{r}$$

ere endelige overalt, saa fremgaar, at

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \cos\varphi\,\frac{d^2\rho}{dr^2} + \sin\varphi\,\frac{d^2}{drd\varphi}\frac{\rho}{r}$$

er en overalt endelig Størrelse. Efter at dette Udtryk er omdannet til

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\rho}{dx}\right),$$

erholdes heraf Grænsebetingelsen

$$\left[\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\rho}{dx}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da tillige dette Udtryk og altsaa ogsaa

$$\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\rho}{dr}\cos\varphi$$

er endeligt overalt, saa erholdes som anden Grænsebetingelse

$$[r^2\xi - \rho x] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

I Analogi med disse to Ligninger dannes

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{dr\eta}{dr} - \frac{d\rho}{dy}\right] &= 0\,, \quad [r^2\eta - \rho y] = 0, \\ \left[\frac{dr\zeta}{dr} - \frac{d\rho}{dz}\right] &= 0\,, \quad [r^2\zeta - \rho z] = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

til hvilke Grænsebetingelser slutte sig de udenfor Grænsefladerne gjældende Differentialligninger

$$\Delta_2\xi + \mu\xi = 0, \quad \Delta_2\eta + \mu\eta = 0, \quad \Delta_2\zeta + \mu\zeta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Desuden skal man her have $\theta = 0$.

Funktionerne ρ, ξ, η og ζ kunne udvikles i Rækker efter Kuglefunktioner. Jeg vil imidlertid her benytte en fra den sædvanlige forskjellig Form, hvorved der opnaas en betydelig Lettelse i Beregningen. Sættes

$$V_n^m = \frac{d^n}{dx^{n-m}dy^m}\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

og antages, hvad der for den følgende Regning er tilstrækkeligt, at ρ, ξ og η ere lige Funktioner af z, ζ derimod en ulige Funktion af z, vil man kunne benytte følgende Udviklinger:

$$\rho = \Sigma\rho_n^m V_n^m, \quad \xi = \Sigma\xi_n^m V_n^m, \quad \eta = \Sigma\eta_n^m V_n^m, \quad \zeta = \Sigma\zeta_n^m \frac{d}{dz} V_{n-1}^m, \quad \ldots \quad (12)$$

idet Summationen udstrækkes til alle hele Værdier af m fra $m = 0$ til $m = n$ i de tre første Rækker og til $m = n - 1$ i den sidste Række, og dernæst til alle hele positive Værdier af n fra $n = 0$ til $n = \infty$. Koefficienterne ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m ere alene Funktioner af r. Tillige bemærkes, at naar der i Regningen indkommer Differentialkoefficienter med Hensyn til z af højere Orden end den første, saa bortelimineres de ved Hjælp af Ligningen

$$\Delta_2 V_n^m = 0.$$

Af Definitionen af V_n^m fremgaar endvidere

$$\frac{dV_n^m}{dr} = -\frac{n+1}{r} V_n^m.$$

Naar Rækkeudviklingerne indsættes i Ligningerne (7) og (11), ses det, at Koefficienterne ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m maa tilfredsstille Differentialligningen

$$\frac{d^2f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r}\frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Denne Ligning har de to partikulære Integraler

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= r^{2n+1}\left(1 - \frac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \frac{\mu^2 r^4}{2\,.\,4\,.\,(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right) \\ \psi_n &= 1 + \frac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \frac{\mu^2 r^4}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)(2n-3)} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14)$$

Man vil altsaa kunne sætte

$$\left.\begin{aligned} \rho_n^m &= k_n^m \varphi_n + \varkappa_n^m \psi_n\,, \quad \xi_n^m = a_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n\,, \\ \eta_n^m &= b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n\,, \quad \zeta_n^m = c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

idet alle disse nye Koefficienter ligesom μ ere konstante inden for ethvert af Lagene, men have forskjellige Værdier i de forskjellige Lag. Af Ligningerne (14) erholdes

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_n}{rdr} &= (2n+1)\,\varphi_{n-1}\,, \qquad \frac{d\psi_n}{rdr} = \frac{\mu}{2n-1}\,\psi_{n-1}\,, \\ r^{n+2}\frac{d}{dr}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} &= -\frac{\mu}{2n+3}\,\varphi_{n+1}\,, \qquad r^{2n+2}\frac{d}{dr}\frac{\psi_n}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\,\psi_{n+1}\,. \end{aligned}\right\} \ldots (16)$$

Ifølge Definitionen af V_n^m har man

$$x V_0^0 + r^2 V_1^0 = 0\,, \quad y V_0^0 + r^2 V_1^1 = 0.$$

Differentieres den første Ligning $n - m$ Gange med Hensyn til x og m Gange med Hensyn til y, og differentieres den anden Ligning $n - m + 1$ Gange med Hensyn til x og $m - 1$ Gange med Hensyn til y, saa erholdes to Ligninger, som let omdannes til

$$\left.\begin{aligned} (2n+1)\,x V_n^m &= -r^2 V_{n+1}^m - (n^2 - m^2) V_{n-1}^m + m(m-1) V_{n-1}^{m-2} \\ (2n+1)\,y V_n^{m-1} &= -r^2 V_{n+1}^m + (n-m+1)(n-m) V_{n-1}^m - (2n-m+1)(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

Paa lignende Maade og med Benyttelse af de sidste Ligninger erholdes

$$(2n+1)\,z V_n^m = -r^2 \frac{d}{dz} V_n^m + (n-m)(n-m-1)\frac{d}{dz} V_{n-2}^m + m(m-1)\frac{d}{dz} V_{n-2}^{m-2}. \ldots (18)$$

Af denne Ligning erholdes endvidere ved Differentiation med Hensyn til z, naar $n - 1$ sættes i Stedet for n,

$$\begin{aligned} (2n+1)\,z\frac{d}{dz} V_{n-1}^m = {} & r^2 V_{n+1}^{m+2} + r^2 V_{n+1}^m - (n-m-1)(n-m-2) V_{n-1}^{m+2} \\ & - \left((n-m-1)^2 + n + m^2\right) V_{n-1}^m - m(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \ldots (19) \end{aligned}$$

De fire Størrelser ρ, ξ, η, ζ ere indbyrdes forbundne ved Ligningerne

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho\,, \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

For at bestemme de heraf følgende Relationer imellem Koefficienterne ρ_n^m, o. s. v., danner jeg først følgende Rækkeudviklinger, idet s er et vilkaarligt Tal,

$$\frac{dr^s x\xi}{dr} - r^{s+1}\frac{d\xi}{dx} = \Sigma\xi_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}x\,V_n^m - r^{s+1}\,V_{n+1}^m\right),$$

$$\frac{dr^s y\eta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\eta}{dy} = \Sigma\eta_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}y\,V_n^m - r^{s+1}\,V_{n+1}^{m+1}\right),$$

$$\frac{dr^s z\zeta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\zeta}{dz} = \Sigma\zeta_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m + r^{s+1}(V_{n+1}^m + V_{n+1}^{m+2})\right).$$

Ved Addition af disse tre Ligninger erholdes paa venstre Side

$$\frac{dr^s\rho}{dr} = \Sigma\frac{dr^{s-n-1}\rho_n^m}{dr}\cdot r^{n+1}V_n^m.$$

Paa højre Side indsættes de ovenfor fundne Værdier af xV_n^m, yV_n^m og $z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m$, hvorefter paa begge Sider Koefficienterne til V_n^m sættes lige store. Paa denne Maade erholdes, naar man sætter $s = n+1$,

$$\frac{2n-1}{2n+1}\frac{d\rho_n^m}{rdr} + \xi_{n-1}^m + \eta_{n-1}^{m-1} - \zeta_{n-1}^m - \zeta_{n-1}^{m-2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

og naar man sætter $s = -n$,

$$\frac{2n+3}{2n+1}r^{2n+2}\frac{d}{dr}\frac{\rho_n^m}{r^{2n+1}} + (m+2)(m+1)\xi_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)\xi_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)\eta_{n+1}^{m+1}$$
$$+ (n-m+2)(n-m+1)\eta_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\zeta_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n+1\right)\zeta_{n+1}^m$$
$$- (n-m+2)(n-m+1)\zeta_{n+1}^{m-2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Indsættes heri de i Ligningerne (15) givne Udtryk for ρ_n^m, o. s. v., saa erholdes med Benyttelse af Ligningerne (16)

$$\left.\begin{aligned}(2n-1)k_n^m + a_{n-1}^m + b_{n-1}^{m-1} - c_{n-1}^m - c_{n-1}^{m-2} &= 0,\\ \frac{\mu}{2n+1}\varkappa_n^m + a_{n-1}^m + \beta_{n-1}^{m-1} - \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m-2} &= 0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\mu}{2n+1}k_n^m + (m+2)(m+1)a_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)a_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)b_{n+1}^{m+1}\\ + (n-m+2)(n-m+1)b_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)c_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n+1\right)c_{n+1}^m\\ - (n-m+2)(n-m+1)c_{n+1}^{m-2} = 0,\\ -(2n+3)\varkappa_n^m + (m+2)(m+1)a_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)a_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)\beta_{n+1}^{m+1}\\ + (n-m+2)(n-m+1)\beta_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\gamma_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n+1\right)\gamma_{n+1}^m\\ - (n-m+2)(n-m+1)\gamma_{n+1}^{m-2} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Foruden disse Relationer imellem de indenfor ethvert af Lagene konstante Koefficienter maa man ogsaa opsøge Relationerne imellem de forskjellige Koefficienter i to tilgrænsende Lag.

Betegnes Koefficienterne i det indre tilgrænsende Lag ved et Mærke, og er r Grænsefladens Radius, saa erholdes af Ligningerne (5) og (6)

$$\left.\begin{aligned} k_n^m \frac{dr^{-n}\varphi_n}{dr} + \varkappa_n^m \frac{dr^{-n}\psi_n}{dr} &= k_n'^m \frac{dr^{-n}\varphi_n'}{dr} + \varkappa_n'^m \frac{dr^{-n}\psi_n'}{dr}, \\ \mu\left(k_n^m\varphi_n + \varkappa_n^m\psi_n\right) &= \mu'\left(k_n'^m\varphi_n' + \varkappa_n'^m\psi_n'\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

idet φ_n' og ψ_n' ere de samme Funktioner som φ_n og ψ_n, blot med Forandring af μ til μ'.

Naar den betragtede Grænseflade er den Centrum nærmeste, saa tilhører Koefficienterne $k_n'^m$ og $\varkappa_n'^m$ det centrale Kuglelag. Her maa alle Koefficienterne $\varkappa_n'^m$ forsvinde, da i modsat Tilfælde ρ vilde blive uendelig i selve Centret, og af Ligningerne (24) kan $k_n'^m$ bortskaffes ved Elimination. Derefter kan man gaa over til den næste Grænseflade og saaledes videre, hvoraf ses, at man for et hvilket som helst Lag vil kunne finde en Ligning

$$\varkappa_n^m = p_n k_n^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

hvor p_n afhænger alene af n og af de Værdier, som μ og Grænsefladernes Radier gjennemløbe i n d e n f o r det betragtede Lag.

Ligeledes erholdes af Ligningerne (8), (9) og (10) ved Indsættelse af Rækkeudviklingerne og Sammenligning af Koefficienterne til V_n^m sex Ligninger, som ved Hjælp af Ligningerne (20) og (21) kunne reduceres til følgende to Grænsebetingelser:

$$\left.\begin{aligned} \left[m\left(\xi_n^m - \zeta_n^m\right) - (n-m+1)\left(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}\right)\right] &= 0, \\ \left[\frac{d}{dr}\left(m\left(\xi_n^m - \zeta_n^m\right) - (n-m+1)\left(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}\right)\right)\right] &= 0. \end{aligned}\right.$$

Sættes for Kortheds Skyld

$$\left.\begin{aligned} m\left(a_n^m - c_n^m\right) - (n-m+1)\left(b_n^{m-1} - c_n^{m-2}\right) &= s_n^m, \\ m\left(\alpha_n^m - \gamma_n^m\right) - (n-m+1)\left(\beta_n^{m-1} - \gamma_n^{m-2}\right) &= \sigma_n^m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

saa erholdes med samme Betydning af de markerede Bogstaver som ovenfor

$$\left.\begin{aligned} s_n^m\varphi_n + \sigma_n^m\psi_n &= s_n'^m\varphi_n' + \sigma_n'^m\psi_n', \\ s_n^m \frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi_n}{dr} &= s_n'^m \frac{d\varphi_n'}{dr} + \sigma_n'^m \frac{d\psi_n'}{dr}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

hvoraf atter, paa ganske lignende Maade som ovenfor, erholdes

$$\sigma_n^m = q_n s_n^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

idet q_n alene afhænger af n og af de Værdier, som μ og r gjennemløbe indenfor det betragtede Lag.

Efter at saaledes de almindelige Ligninger til Udførelsen af Beregningen af Lysbevægelserne i et af koncentriske, homogene Kuglelag bestaaende Lysmedium ere opstillede, skal jeg gaa over til Undersøgelsen af Lysbevægelserne i det Indre af et isotropt Legeme,

idet jeg, saaledes som bemærket i Indledningen, betragter Atomerne som Punkter, hvoromkring Lysmediet indtil en vis Afstand lejrer sig i koncentriske Lag, medens det udenfor denne Afstand, som antages mindre end to Naboatomers halve Middelafstand, forholder sig som i det tomme Rum.

Er δ den halve Middelafstand af to Naboatomer, og antages i Afstanden δ fra et af Atomerne Lyssvingningerne parallele med y-Axen, saa vil man, naar tillige Bevægelsen antages at forplante sig i Retning af x-Axen, kunne sætte

$$\text{for } r = \delta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt-lx)i}F, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

idet F er en Funktion, som gjentager sig periodisk fra Atom til Atom. Den sidste Formel fremstiller altsaa en Bølgebevægelse, som forplanter sig igjennem Legemet med Hastigheden $\frac{k}{l}$.

For nærmere at bestemme Betydningen af Funktionen F, ville vi betragte to Atomer, hvis Afstand er 2δ. En ret Linie igjennem de to Atomer skjærer de to tangerende Kugleflader, hvis Centrer ere de to Atomer og hvis Radier ere lig δ, i de tre Punkter A, B og C. De Værdier, F antager i denne rette Linie, kunne fremstilles ved en Kurve, som fra A til B og fra B til C gjentager sig paa samme Maade, saaledes at F faar de samme Værdier i A og i B, og at Tangenterne til Kurven i disse to Punkter blive parallele. Da r regnes positiv til begge Sider fra Centret, vil altsaa $\frac{dF}{dr}$ i A og i B faa lige store Værdier, men med modsatte Fortegn.

Man har

$$e^{kti}F = e^{lxi}\eta = e^{lxi}\Sigma\eta_n^m V_n^m,$$

i hvilken Række Leddene for to diametralt modsatte Punkter blive lige store og for n lige faa samme Fortegn, for n ulige modsatte Fortegn. Man vil følgelig erholde for $r = \delta$

$$e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right) = e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right),$$

$$\frac{d}{dr}\left(e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right) + e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)\right) = 0,$$

hvilke Ligninger kunne omdannes til

$$\left.\begin{aligned} \left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0, \\ \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (30)$$

Disse to Ligninger gjælde for de Punkter, hvori Kuglefladen tangeres af en anden lignende Kugleflade. Dette er altsaa kun et begrænset Antal Punkter, men disse Punkter ligge tilfældigt og kunne, da Legemet antages isotropt, med samme Sandsynlighed falde i ethvert Punkt af Kuglefladen. Jeg antager derfor Ligningerne almindelig gjældende for alle Punkter i Kuglefladen $r = \delta$.

Ved den videre Behandling af disse Ligninger er det af Vigtighed at bemærke, at lx kan betragtes som en meget lille Størrelse. Denne Omstændighed har allerede været benyttet af Helmholtz[1]), som i sin Dispersionstheori er gaaet ud fra den Antagelse, at «de ponderable Deles indbyrdes Afstande ere forsvindende smaa i Sammenligning med Bølgelængderne». Man er i Virkeligheden som bekjendt ad meget forskjellige Veje bleven i Stand til i det mindste at danne sig et Begreb om disse Afstande. Saaledes vil Bølgelængden af det synlige Lys for Exempel for Vand være henimod 10000 Gange større end δ, og for Luftarterne maa, selv ved den største Fortynding, hvorved overhovedet Farvespredningen lader sig maale, Bølgelængden endnu være flere hundrede Gange større end δ.

Nu er

$$N = \frac{lO}{k}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}O, \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda}N,$$

naar N er Legemets Brydningsforhold, O Lysets Hastighed i det tomme Rum og λ den ligeledes til det tomme Rum svarende Bølgelængde. Af den sidste Ligning ses, at lx, som i ovenstaaende Formler ikke kan blive større end $l\delta$, maa være en meget lille Størrelse af samme Orden som $\frac{\delta}{\lambda}$.

Tillige bemærkes, at naar μ for $r = \delta$ betegnes ved μ_δ, saa er

$$\mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

og altsaa

$$N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Det ses heraf, at naar $l\delta$ betragtes som en uendelig lille Størrelse af første Orden, saa vil $\mu_\delta\delta^2$ være uendelig lille af anden Orden, og at N^2 fremtræder som et Forhold imellem to uendelig smaa Størrelser af anden Orden.

Idet altsaa lx betragtes som en uendelig lille Størrelse, erholdes af Ligningerne (30)

$$lxi\Sigma\eta^m_{2n}V^m_{2n} + \Sigma\eta^m_{2n+1}V^m_{2n+1} = 0,$$
$$\frac{d}{dr}\Sigma\eta^m_{2n}V^m_{2n} + lxi\frac{d}{dr}\Sigma\eta^m_{2n+1}V^m_{2n+1} = 0.$$

Ved Hjælp af den første Ligning (17) fremgaaer heraf, idet Koefficienterne til V^m_{2n+1} og V^m_{2n} sammenlignes, for $r = \delta$

$$\left.\begin{aligned} li\left(-\frac{r^2}{4n+1}\eta^m_{2n} - \frac{(2n+2)^2-m^2}{4n+5}\eta^m_{2n+2} + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+5}\eta^{m+2}_{2n+2}\right) + \eta^m_{2n+1} &= 0, \\ lir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+2}}\left(-\frac{r^2}{4n-1}\eta^m_{2n-1} - \frac{(2n+1)^2-m^2}{4n+3}\eta^m_{2n+1} + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+3}\eta^{m+2}_{2n+1}\right) + \frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+1}}\eta^m_{2n} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

[1]) Pogg. Ann. Bd. 154, S. 584.

Sættes $n = 0$, $m = 0$ erholdes

for $r = \delta$

$$\left.\begin{aligned} li\left(-r^2\eta_0^0 - \frac{4}{5}\eta_2^0 + \frac{2}{5}\eta_2^2\right) + \eta_1^0 &= 0, \\ -\frac{1}{3}lir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\eta_1^0 + \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\eta_0^0 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Da man vilkaarlig kan betragte $r^2\eta_0^0$ som en endelig Størrelse, saa ville de i den første Ligning indgaaende Størrelser η_2^0 og η_2^2 kun faa Betydning, for saa vidt de ere endelige. Naar der derfor i den anden Ligning (32) sættes $n = 1$, $m = 0$ og $m = 2$, saa vil det første Led, som indeholder Faktoren lr, kunne bortkastes, hvorefter faas

for $r = \delta$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2^0 = 0, \qquad \frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2^2 = 0.$$

Ved Indførelsen af de konstante Koefficienter (Lign. (15)) erholdes heraf for de til det yderste Lag indtil $r = \delta$ svarende Konstanter, naar de uendelig smaa Størrelser bortkastes,

$$2b_0^0\delta^5 = 3\beta_2^0, \qquad 2b_2^2\delta^5 = 3\beta_2^2.$$

For det samme Lag er ifølge de to første Ligninger (29)

$$a_2^1\delta^5 + a_2^1 = 0, \qquad c_2^1\delta^5 + \gamma_2^1 = 0.$$

Sættes endvidere i den anden Ligning (22) $n = 3$, $m = 1$ og $m = 3$, erholdes med Bortkastelse af det første, uendelig lille Led,

$$a_2^1 + \beta_2^0 - \gamma_2^1 = 0, \qquad \beta_2^2 - \gamma_2^1 = 0,$$

medens Ligningerne (23) for $n = 1$, $m = 1$ give

$$-3a_2^1 - 4b_2^2 + 2b_2^0 - 3c_2^1 = 0,$$

$$-5\varkappa_1^1 - 3a_2^1 - 4\beta_2^2 + 2\beta_2^0 - 3\gamma_2^1 = 0.$$

Disse 8 Ligninger ere dog endnu ikke tilstrækkelige til Bestemmelsen af de 8 Konstanter ved $\varkappa_1^1$, da det viser sig, at Ligningerne indeholde en Identitet. Imidlertid fremgaar af Ligningerne (26) og (28) for $n = 2$, $m = 1$,

$$s_2^1 = a_2^1 - c_2^1 - 2b_2^0, \quad \sigma_2^1 = a_2^1 - \gamma_2^1 - 2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = q_2 s_2^1,$$

som med Ligningerne ovenfor give

$$s_2^1\delta^5 = -2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = -3\beta_2^0, \text{ altsaa } 3\beta_2^0\delta^5 = 2\beta_2^0 q_2.$$

Men da q_2 kun afhænger af de Værdier, som μ og Grænsefladernes Radier antage indenfor det yderste Lag, saa maa man have $\beta_2^0 = 0$. Dernæst erholdes af de ovenfor fremsatte Ligninger

$$b_2^0 = 0, \qquad b_2^2\delta^5 = \frac{3}{2}\beta_2^2 = -\frac{3}{4}\varkappa_1^1.$$

Indsættes endvidere i Ligningerne (22) $n = 1$ og $m = 1$, erholdes

$$k_1^1 + b_0^0 = 0, \qquad \frac{1}{3}\mu\varkappa_1^1 + \beta_0^0 = 0,$$

gjældende for alle Lagene. For det yderste Lag, hvor μ betegnes ved μ_δ, er saaledes med Bibeholdelse af de smaa Størrelser af anden Orden

$$\eta_0^0 = -k_1^1\left(r - \frac{1}{6}\mu_\delta r^3\right) - \frac{1}{3}\mu_\delta\varkappa_1^1.$$

Ligningerne (33) ville nu kunne omdannes til

$$li\left(k_1^1\delta^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^1\right) + b_1^0\delta^3 + \beta_1^0 = 0,$$

$$-li\left(b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0\right) + \mu_\delta\left(k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1\right) = 0,$$

hvoraf erholdes

$$\frac{l^2}{\mu_\delta} = N^2 = \frac{k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1}{k_1^1\delta^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^1} \cdot \frac{b_1^0\delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0}.$$

Ifølge Ligning (25) er

$$\varkappa_1^1 = p_1 k_1^1.$$

Endvidere er ifølge den første Ligning (29) for $r = \delta$ $\xi_1^1 = 0$, altsaa med Bortkastelse af de uendelig smaa Størrelser af højere Orden

$$a_1^1\delta^3 + \alpha_1^1 = 0,$$

og sættes i den anden Ligning (22) $n = 2$, $m = 1$ erholdes med Bortkastelse af det første uendelig lille Led af anden Orden for det yderste Lag

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

medens Ligningerne (26) og (28) for $n = 1$, $m = 1$ give

$$\alpha_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1.$$

Af disse Ligninger følger

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1\delta^3}{q_1 + 2\delta^3}.$$

Brydningsforholdet N vil saaledes være bestemt ved den simple Ligning

$$N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1} \cdot \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}q_1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

hvor p_1 og q_1 ere to af δ uafhængige Funktioner.

Vi have antaget μr^2 uendelig lille i det indenfor $r = \delta$ liggende ydre Lag, men i andre Lag maa denne Størrelse antage en endelig Værdi, hvis overhovedet en Brydning i Legemet skal finde Sted. Antage vi, at μr^2 indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ bliver endelig, saa vil af den anden Ligning (24) erholdes

for $r = \varepsilon$, $\qquad 0 = k_n'^m\varphi_n' + \varkappa_n'^m\psi_n',$

medens man ifølge Ligning (25) skal have $\varkappa_n^{'m} = p_n' k_n^{'m}$, hvor p_n' er uafhængig af ε. Man maa følgelig have $k_n^{'m} = 0$ og $\varkappa_n^{'m} = 0$, det vil sige, Svingningerne ere indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ vinkelret paa Radius. Dette er ogsaa umiddelbart indlysende, da vor Forudsætning er ensbetydende med, at Lysets Hastighed i Grænsefladen $r = \varepsilon$ fra en uendelig stor Værdi gaar over til at blive endelig, hvorved alle indfaldende Lysstraaler maa brydes ind til Midtpunktet og Svingningerne derfor blive vinkelret paa Radius.

Dernæst erholdes af den første Ligning (24) for $n = 1$, $m = 1$

$$k_1^1 \cdot 2\varepsilon - \frac{\varkappa_1^1}{\varepsilon^2} = 0, \quad \text{hvoraf } p_1 = 2\varepsilon^3.$$

Man vil altsaa tilnærmelsesvis kunne betragte p_1 som en Størrelse, der er proportional med Rumfanget af det i Atomets Nærhed stærkt forandrede Lysmedium, men er uafhængig af selve dette Mediums Brydning.

Den anden i Ligningen (34) indgaaende Størrelse q_1 vil være at beregne af Ligningerne (27) og (28).

Paa hvilken Maade q_1 afhænger af Bølgelængden, skal jeg først søge at oplyse ved et Exempel. Jeg antager, at μ udenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ er lig 0, indenfor endelig og overalt konstant lig μ'. I Ligningerne (27) vil i dette Tilfælde $\sigma_n^{'m}$ være lig 0, og sættes $n = 1$, vil man med Bortkastelse af den øvre Index m have

$$s_1\varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1'\left(\varepsilon^3 - \frac{1}{10}\mu'\varepsilon^5 + \ldots\right),$$

$$3s_1\varepsilon^2 \quad = s_1'\left(3\varepsilon^3 - \frac{1}{2}\mu'\varepsilon^4 + \ldots\right),$$

hvoraf findes

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = \frac{1}{15}\mu'\varepsilon^5 + \ldots = \frac{a}{\lambda^2} + \ldots$$

Man vil altsaa, forudsat at Rækkeudviklingen er konvergent, kunne udvikle q_1 i en Række efter stigende Potenser af $\frac{1}{\lambda^2}$, og det første Led i Rækken vil være positivt.

Naar ganske i Almindelighed μ betragtes som en endelig og kontinuerlig variabel Funktion, saa maa man gaa tilbage til Differentialligningen (13), af hvilken Grænsebetingelserne (27) kunne udledes. Antages ligesom før $r = \varepsilon$ som den Grænse, udenfor hvilken μ er 0, saa vil Opgaven være at integrere Differentialligningen under de Betingelser, at man for $r = 0$ faar $f_n = 0$ og for $r = \varepsilon$ $f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n)$, $\frac{df_n}{dr} = (2n+1)s_n r^{2n}$. Efter Eliminationen af de to arbitrære Konstanter vil der da af disse tre Ligninger erholdes en Endeligning til Bestemmelse af q_n. Forudsættes det nu, at f_n overalt lader sig udvikle i en konvergent Række efter Potenser af den i μ indgaaende Faktor $\frac{1}{\lambda^2}$, saa vil det uden Vanskelighed indses, at q_n almindelig lader sig udvikle i en Række af Formen

$$\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \ldots.$$

Man vil saaledes se, at naar det til en uendelig Bølgelængde, og altsaa til $q_1 = 0$, svarende Brydningsforhold betegnes ved A, saa erholdes af Ligning (34)

$$A^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1}, \qquad \frac{A^2-1}{A^2+2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}p_1, \qquad \frac{N^2-A^2}{N^2+2A^2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}q_1.$$

Som Resultat af denne Undersøgelse fremgaar, at Lovene for Brydningen i et gjennemsigtigt, isotropt Legeme med sædvanlig Farvespredning ville kunne udtrykkes ved følgende Ligninger

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}\frac{1}{d} = R, \qquad \frac{N^2-A^2}{N^2+2A^2}\frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \ldots,$$

idet N er Legemets Brydningsforhold, d dets Vægtfylde, R og D to af Vægtfylden uafhængige Konstanter. Endvidere er a en positiv Konstant, og som det af Ligningerne selv fremgaar, vil A være det til $\lambda = \infty$ svarende Brydningsforhold.

Den første af disse Ligninger har jeg allerede for 14 Aar siden[1]) udledet theoretisk paa en ganske anden Maade, og Lovens Rigtighed har senere stadfæstet sig paa mange Maader. Af mine egne Forsøg over nogle Vædskers og deres Dampes Brydning har jeg beregnet følgende til Natriumlinien svarende «Dispersionskonstanter» D, idet A er beregnet ved den simplere Formel $N^2 = A^2 + \frac{a}{\lambda^2}$.

	Vædske ved 10°	Damp ved 100°
Alkohol	0,00585	0,00644
Æthylæther	636	623
Chloroform	413	409
Jodæthyl	551	579
Svovlkulstof	1615	1732
Eddikeæther	536	550

Overensstemmelsen mellem Værdierne af D for disse to forskjellige Tilstandsformer maa betragtes som meget tilfredsstillende.

Naar de i (14) givne Rækkeudviklinger for φ_1 og ψ_1 ikke ere brugbare, saa ville disse Funktioner, naar for Kortheds Skyld sættes $\mu = \alpha^2$, kunne udtrykkes ved

$$\varphi_1 = 3\frac{\sin \alpha r - \alpha r \cos \alpha r}{\alpha^3}, \qquad \psi_1 = \cos \alpha r + \alpha r \sin \alpha r.$$

Er f. Ex. $\mu = 0$ udenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ og $\mu = \alpha^2$ indenfor denne Flade, vil man have

$$s_1\varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1' 3\frac{\sin \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \cos \alpha\varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3s_1\varepsilon^2 = s_1'\frac{3\varepsilon}{\alpha}\sin \alpha\varepsilon,$$

[1]) Vidensk. Selsk. Skrifter, 5te Række, Bd. 8, S. 205. 1869.

hvoraf erholdes

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3\varepsilon^2}{\alpha}\cot\alpha\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{\alpha^2}.$$

Det ses heraf, at naar Bølgelængden λ og derved ogsaa α gjennemløber alle Værdier, saa vil q_1 kunne antage en hvilken som helst reel Værdi imellem $-\infty$ og $+\infty$. Ifølge den anden Ligning (35) vil altsaa ogsaa ved visse Værdier af λ N^2 kunne blive negativ og følgelig N imaginær, hvilket i denne Regning er ensbetydende med en Absorbtion.

Antages, at μ indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ er endelig og at Rækkerne ere konvergente, indtil de i en meget lille Afstand fra Centret gaa over til at blive divergente, saa vil Absorbtionen kun indtræde ved enkelte bestemte Bølgelængder, saaledes at vi erholde et sædvanligt af Absorbtionslinier ledsaget Dispersionsspektrum.

Idet saaledes den her fremstillede Theori ikke udelukker Muligheden af en Absorbtion, saa vil paa den anden Side en ufuldkommen Absorbtion, hvor N antager den komplexe Form $a + bi$, ikke kunne udledes af vore Forudsætninger. Hvis derfor Loven for den anomale Dispersion skal udledes theoretisk, saa vil det være nødvendigt at udvide Beregningen til et System af Atomer, som svarer til sammensatte Legemer eller Blandinger. Det vil da først vise sig, om det ogsaa vil være nødvendigt at forandre selve Theoriens Grundlag saaledes, at μ betragtes som en komplex Variabel, hvilket atter vilde være identisk med til de oprindelige Differentialligninger for Lysbevægelserne at tilføje et den første Differentialkoefficient med Hensyn til t indeholdende Led. I saa Tilfælde vilde Ligningerne antage den samme Form, som jeg allerede har angivet i min Afhandling om Identiteten af Lyssvingninger og elektriske Strømme[1]). Der vil overhovedet, efter at ved de her angivne Methoder Muligheden af Beregningen af Lysbevægelserne i Legemernes Indre er paavist, blive en vid Mark aaben for videre gaaende Undersøgelser.

[1]) Vidensk. Selsk. Oversigt 1867. Nr. 1.

Undersøgelser angaaende

Mængden af Primtal

under en given Grænse.

Af

Dr. **J. P. Gram.**

Motto:

Est data lex numeris magnorum horrenda laborum.

En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisafhandling.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 6.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1884.

Indledning.

At angive i analytisk Form Loven for Primtallenes Fordeling i Talrækken er et Problem, som for en Mathematiker er saa fristende som kun faa andre. Thi paa den ene Side fremkommer Problemet allerede paa det mest elementære Standpunkt, og paa den anden Side frembyder det saa store Vanskeligheder, at det kan have Tillokkelse nok for den største Analytiker. Mange ere derfor ogsaa de Forfattere, som fra Tid til anden have anstillet Undersøgelser vedrørende Primtallenes Fordeling[1]), og naar man blandt disse kan anføre Navne som Euler, Lambert, Legendre, Gauss, Dirichlet, Tchebycheff, Riemann, saa maa det næsten synes mærkeligt, at vort virkelige Kjendskab til Loven for Primtallenes Fordeling saa at sige endnu kun er af tilfældig Natur. Riemann er den eneste Forfatter, som med nogen Ret kan gjøre Fordring paa Æren af at have løst Problemet. I en Afhandling[2]), som trods sin korte og skitserede Form dog maa betegnes som en af den moderne Analyses ypperste Frembringelser, har han ganske vist gjengivet Loven exakt, men i en saadan Form, at det fundne Udtryk ikke lader sig anvende til nogen virkelig Beregning af Primtalmængden op til en given Grænse, ja neppe en Gang med Sikkerhed tør bruges til en tilnærmet Beregning af denne Størrelse. Men naar selv en Riemann ikke er naaet videre, saa maa dette enten ligge i selve Problemets Natur eller ogsaa i, at man ikke har anvendt de mest passende Midler til Problemets Løsning. Det vil derfor være hensigtsmæssigt, før vi gaa over til de specielle Undersøgelser, først at betragte Opgaven fra et mere almindeligt Synspunkt.

De mest elementære Betragtninger give Midler til sukcessive at udskille Primtallene af Talrækken og gjøre det indlysende, at Primtallenes Tæthed i det hele taget vil aftage, efterhaanden som man kommer længere frem i Talrækken. Ligeledes kan let vises, dels at Primtalmængden er uendelig, dels at Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal kan blive saa stort, det skal være. Paa den anden Side ser man af Faktortavlerne, at der

[1]) En Fortegnelse over den herhen hørende Literatur findes i Glaisher's Factor table for the fourth Million. London 1879.

[2]) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Monatsber. der Berliner Akademie 1859.

selv blandt de største undersøgte Tal findes Primtalpar, hvis Interval kun er 2 Enheder, saa at Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal i Nærheden af et givet Tal kan svinge mellem temmelig store Grænser. Den Funktion af x, som udtrykker Mængden af Primtal op til x inklusive — vi ville i det følgende betegne den ved $\theta(x)$ — vil derfor være en diskontinuert Funktion, som vel stadig voxende varierer med Spring af en Enhed, men hvor Afstanden mellem Springene vexler meget uregelmæssigt.

Hvis man nu ikke stillede andre Fordringer til det analytiske Udtryk for $\theta(x)$, end at Formlen skulde fremstille denne Funktion i en eller anden Form, saa vilde Problemet ikke være vanskeligt at løse. Med lidt Behændighed er det ikke vanskeligt at danne analytiske Udtryk f. Ex. i trigonometrisk Form, som blive 0, naar x er et sammensat Tal, 1, naar x er et Primtal, og ved saadanne kunde altsaa $\theta(x)$ fremstilles. Det vil til Bevis for denne Paastand være tilstrækkeligt at henvise dels til Ramus's Doktordisputats[1] («De functionum formis etc.»), dels til Prof. Lorenz' Artikel «Om Primtalrækken» i Tidsskrift for Mathematik 1878, eller til en Afhandling af Libri[2], hvor lignende Former opstilles. Men Vanskeligheden kommer først frem, idet man tillige maa stille den Fordring, at den fundne Formel skal kunne bruges til Beregning af Funktionen $\theta(x)$. Thi derved viser det sig strax, at slige Former blive ubrugelige. Ja selv saadanne Midler som uendelige trigonometriske eller andre analoge Rækker, navnlig Udviklinger efter Kuglefunktioner, som bevislig kunne bruges til Udvikling af arbitrære Funktioner, og som ogsaa her kunne anvendes, ville ikke kunne tilfredsstille denne Fordring. Thi omend slige Rækker, fortsatte i det uendelige, kunne bruges — rent abstrakt taget — til Fremstilling af diskontinuerte Funktioner, saa ville de dog i Nærheden af et Diskontinuitetspunkt blive saa langsomt konvergerende, at det vilde blive et forgjæves Arbejde at summere dem, og naar tilmed som her Diskontinuitetspunkterne optræde i uendeligt Antal og fordelte over hele Talrækken, saa kan man neppe vente at finde en saadan Form, at den vilde vise sig skikket til numerisk Beregning selv for saadanne x, som ikke svare til Diskontinuitetspunkterne.

Noget mere kunde man vente sig af Benyttelsen af bestemte Integraler, det er ogsaa ved Hjælp af saadanne, at Riemann opnaar sine Resultater. Men ogsaa her fremkommer en lignende Vanskelighed som ovenfor paapeget, omend i en noget anden Form. Et Integral, som skal fremstille $\theta(x)$, maa nemlig ikke blot være diskontinuert, men da selve Primtallene ikke explicite maa indgaa i det, saa maa det fremtræde i en saadan Form, at Diskontinuiteten ikke tydelig træder frem. Allerede den Omstændighed, at Integralet fremstiller en diskontinuert Funktion, vanskeliggjør Beregningen, thi det medfører, dels at Integralets Elementer variere meget stærkt, og dels, at saadanne Rækkeudviklinger, f. Ex.

---

[1]) Ramus: Tentamen de functionum formis, originibus et variationibus. Hauniæ MDCCCXXXII.

[2]) Mémoire sur la théorie des nombres. Crelle's Journal Bd. 9.

for Faktorer under Integraltegnet, som i andre Tilfælde kunne anvendes med Held, her ikke kunne benyttes, da Diskontinuiteten derved enten kan gaa tabt eller i alt Fald fremtræde under ubestemt — altsaa ubrugelig — Form. Endnu vanskeligere bliver Forholdet, naar, som her, Beliggenheden af Diskontinuitetspunkterne er ubekjendt, thi man vil ved Beregning af saadanne diskontinuerte Integraler ofte have Lejlighed til at bemærke, at deres Bestemmelse lettest udføres ved Deling i kontinuerte Dele, altsaa netop ved at fremhæve Diskontinuiteten, og dette kan jo i dette Tilfælde ikke gjøres. De tilladelige Transformationer af Integralet blive derfor meget begrænsede og maa foretages med største Forsigtighed, hvis man skal undgaa at strande paa et af de mange Skjær, som en saadan Behandling frembyder. At Riemann har været i Stand til at gjennemføre sin Methode, er et glimrende Vidnesbyrd om hans Geni, men at hans Resultat ikke er bleven helt betydningsløst, beror paa, at det er muligt at dele Funktionen $\theta(x)$ i en Sum af to andre, af hvilke den første og væsentligste Del er kontinuert og lader sig fremstille i Form af en Række, der kan beregnes, medens den anden indeholder den diskontinuerte Korrektion, som skal anbringes derpaa for at faa den korrekte Værdi af $\theta(x)$. Denne Korrektion fremtræder i Form af en Sum af imaginære Integrallogarithmer, som afhænge af Rødderne i en transcendent Ligning. Disse Rødder ere uden Tvivl atter afhængige af de sukcessive Primtal, men selv om denne Afhængighed var fuldstændig udredet, vilde det være meget vanskeligt at afgjøre, om den Række, der gives for Korrektionen, er konvergent og i saa Fald at afgjøre, mellem hvilke Grænser dens Værdi ligger. Det er muligt, at fremtidige Undersøgelser kunne bringe større Klarhed til Veje paa dette Punkt, men en Sammenligning med de gjorte Optællinger viser, at den kontinuerte Del af Riemann's Formel giver en saa god Tilnærmelse til de virkelige Primtalmængder, at der ikke kan være Tvivl om, at den af Riemann angivne Formel giver et særdeles betydningsfuldt Vink om, hvilke Funktionsformer der skulle benyttes. Vil man nøjes med en Tilnærmelsesformel, vil der neppe kunne opnaas noget bedre Resultat end den kontinuerlige Del af Riemann's — naturligvis, naar man ikke vil benytte mere sammensatte Funktionsformer — men der maa rigtignok i saa Fald gives den en noget anden Begrundelse.

Forsaavidt man vil blive staaende ved Tilnærmelsesformler, kunde de saakaldte «Interpolationsrækker» her synes at være paa deres Plads. Dette er utvivlsomt ogsaa Tilfældet, men for at kunne bruges med Held, d. v. s., for at man kan nøjes med nogle faa Led i Rækken, er det nødvendigt, at man først har nogen Indsigt i Beskaffenheden af den Funktion, man vil udvikle. Thi kun i saa Fald er man i Stand til at vælge sine Udviklingsfunktioner paa den mest passende Maade. Og dette er nødvendigt, da Rækkerne i modsat Fald blive for lidet konvergente og paa sine Steder for meget afvigende fra de virkelige Værdier af $\theta(x)$. Og selv i heldigste Tilfælde give de kun et saa at sige udvortes Kjendskab til den Funktion, man udvikler, medens de Relationer, som i Virkeligheden betinge,

at netop én bestemt og ikke nogen anden Funktionsform fremkommer, ikke ville findes ad denne Vej.

Af alle disse Grunde ville vi i den følgende Afhandling ikke nærmere forfølge nogen af de ovenomtalte Veje, men kun — væsentlig til Sammenligning og Orientering — give en Fremstilling af Riemann's Methode; derimod ville vi særlig benytte rent taltheoretiske Methoder for at se, hvorvidt man ad denne Vej kan naa. Disse Methoder synes i Virkeligheden at fortjene en noget større Opmærksomhed, end der hidtil er bleven skjænket dem.

Allerede Legendre har lært, hvorledes man ved Benyttelsen af Primtallene op til $\sqrt{x}$ kan finde Primtalmængden mellem $\sqrt{x}$ og x ved Hjælp af ufuldstændige Kvotienter, og Meissel har vist, at denne Beregning er praktisk udførlig selv for saa store Tal som 100 Millioner. En lignende Beregning er foretagen tidligere af Englænderen Hargreave og senere af en fransk Forfatter, Piarron de Mondesir. Det Held, disse Forfattere have haft, ligger uden Tvivl deri, at de have anvendt virkelig diskontinuerte Funktionsformer og navnlig saadanne, som væsentlig stemme med Problemets Natur. Russeren Bougaïeff er gaaet videre ad samme Vej og har angivet en Formel for selve $\theta(x)$. Formler af denne Art ere endnu langt fra at være det, man maatte ønske, og lade sig navnlig ikke direkte omdanne til analytiske Tilnærmelsesformler. Men de give en større Indsigt i den virkelige Natur af Funktionen $\theta(x)$ og de Relationer, som sammenknytte den med andre lignende, end de tidligere nævnte, og det er muligt, at fortsatte Undersøgelser af saadanne Former ogsaa ville kunne lede til Opstillingen af brugbare Tilnærmelsesformler. Et væsentligt Skridt i lignende Retning er paa et beslægtet Omraade gjort af Svenskeren Berger, der ved som Udgangspunkt at benytte en Formel, der oprindelig skyldes Dirichlet (Abhandlungen der Berliner Akademie 1849), er naaet til at opstille en Række mærkelige Formler, som angive Middelværdierne af visse symmetriske Funktioner af et Tals Divisorer. Analoge Betragtninger lade sig ogsaa anvende paa Primtallene, og ved at sammenknytte disse med visse Undersøgelser af Tchebycheff kan man paa en ret simpel Maade komme til en Bestemmelse af Primtallenes Middeltæthed og derigjennem atter til Tilnærmelsesformler for forskjellige Funktioner af Primtallene op til en given Grænse. Mærkeligt er det, at man ad denne Vej faar tilvejebragt en Forbindelse mellem to saa forskjellige Methoder som de af Tchebycheff og Riemann anvendte.

Uagtet denne Methode synes at give gode Løfter om et heldigt Resultat, er det dog ikke lykkedes mig at gjennemføre disse Undersøgelser paa den Maade, det var ønskeligt. Alligevel tror jeg dog, at denne Methode fortjener nogen Opmærksomhed, fordi den i Virkeligheden giver en Indsigt i det paagjældende Problems Natur som ingen af de andre, og fordi den rammer noget af det mest centrale i det. Og netop at forsøge paa at trænge ind til Problemets Kjærne har været Hovedformaalet for nærværende Arbejde. Vi have derfor fra først af stillet os paa det Standpunkt, i første Række at finde et exakt Udtryk for

Primtalmængden eller for dermed beslægtede Funktioner, medens Spørgsmaalet om Tilnærmelsesformler kun stilledes i anden Række.

Det er muligt, at man ved at stille sig paa det omvendte Standpunkt kunde have opnaaet tilsyneladende større Udbytte, men til Gjengjæld vilde den indbyrdes Sammenhæng mellem de forskjellige Betragtningsmaader neppe være traadt saa klart frem, som vi nu tro er Tilfældet.

---

§ 1. Symmetriske Funktioner af alle Primtallene.

Som Forberedelse til Studiet af Primtallenes Fordeling er det gavnligt at gjøre sig bekjendt med forskjellige Relationer mellem Funktioner af Primtallene og visse Funktioner af Tallene i den naturlige Talrække. Uagtet disse Relationer væsentlig tjene til Beregning af visse symmetriske Funktioner af alle Primtal og altsaa ikke direkte kunne benyttes, naar man kun medtager Primtallene op til en vis Grænse, saa spille de dog i alle Undersøgelser om Primtal en saa stor Rolle, at man altid maa have dem paa rede Haand. Vi ville derfor nedenfor samle disse under et, idet vi dog for Bevisernes Vedkommende i de fleste Tilfælde nøjes med Henvisninger til de Forfattere, hos hvem de findes. Et Primtal vil her som overalt i det følgende blive betegnet ved p, eller hvis der er flere saadanne, ved a, b, c o. s. v., og det bemærkes endvidere udtrykkeligt, at vi ikke medregne Tallet 1 iblandt Primtallene, saaledes som f. Ex. Glaisher gjør det.

Allerede Euler[1]) har undersøgt Produkter af Formen $\Pi\left(1-\frac{1}{p^r}\right)$, hvori p efterhaanden tillægges de Værdier, som angives ved Primtallene. Et saadant Produkt vil som bekjendt[2]) være konvergent, saafremt dette er Tilfældet med Rækken $\Sigma\frac{1}{p^r}$, altsaa, da $\Sigma\frac{1}{p^r} < \Sigma\frac{1}{n^r}$, hvor $n = 1, 2, 3$ o. s. v., i hvert Fald for $r > 1$. Udvikler man den reciproke Værdi af hver af Faktorerne i Række, faas

$$\left(1-\frac{1}{p^r}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{p^r}+\frac{1}{p^{2r}}+\frac{1}{p^{3r}}+\cdots,$$

og altsaa faar man, naar alle disse Faktorer multipliceres sammen, og Leddene ordnes efter deres Størrelse, en Række, der kan skrives som

[1]) Introductio in Analysin infinitorum Cap. XV.

[2]) Weierstrass: Theorie der analytischen Facultäten, Crelle's Journal Bd. 51.

$$s(r) = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots, \tag{1}$$

der er ubetinget konvergent, saalænge $r > 1$. Derfor bliver altsaa

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right) = \frac{1}{s(r)}. \tag{2}$$

Den samme Ligning vil endnu gjælde for komplexe r, for saa vidt mod $r > 1$. Af denne følger atter ved paa begge Sider at tage Logarithmen og udvikle i Række

$$\Sigma \frac{1}{p^r} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{p^{2r}} + \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{1}{p^{3r}} + \ldots = ls(r) \quad \text{for} \quad r > 1, \tag{3}$$

og ligeledes ved Differentiation med Hensyn til r

$$\Sigma p^{-r} lp + \Sigma p^{-2r} lp + \Sigma p^{-3r} lp + \ldots = \frac{1}{s(r)} \sum_1^\infty n^{-r} ln = -\frac{s'(r)}{s(r)}, \tag{4}$$

der ogsaa kan skrives som

$$\Sigma (p^{-r} + p^{-2r} + \ldots) lp = \Sigma \frac{1}{p^r - 1} lp = -\frac{s'(r)}{s(r)}, \quad r > 1. \tag{4'}$$

Da man endvidere maa have

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right) . \Pi\left(1 + \frac{1}{p^r}\right) = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^{2r}}\right),$$

saa kan ogsaa Værdien af Produkter af Formen $\Pi\left(1 + \frac{1}{p^r}\right)$ bestemmes ved Hjælp af de reciproke Potenssummer $s(r)$, for saa vidt mod $r > 1$. For $r = 1$ maa $\Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ blive 0, eftersom den reciproke Værdi giver den harmoniske Række, Produktet $\Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ maa derfor blive uendeligt, og den Række, som faas ved at udføre Multiplikationen, divergent.

Udføres Multiplikationen af de enkelte Faktorer i Produktet $\Pi\left(1 - \frac{1}{p^r}\right)$, faas en Række, der kan skrives som

$$\Pi(1 - p^{-r}) = 1 - \Sigma a^{-r} + \Sigma a^{-r} b^{-r} - \Sigma a^{-r} b^{-r} c^{-r} + \ldots, \tag{5}$$

hvor $a, b, c \ldots$ betegne forskjellige Primtal. Da Rækken er ubetinget konvergent for $r > 1$, kunne Leddene i dette Tilfælde ordnes efter Størrelsen, hvorved faas

$$\Pi(1 - p^{-r}) = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} - 7^{-r} + 10^{-r} - 11^{-r} \ldots = \frac{1}{s(r)}. \tag{6}$$

Man ser, at de enkelte Led indeholde $r$te Potens af saadanne Tal, som ikke ere delelige med noget Kvadrattal, og med Fortegnet $(-1)^m$, hvor m angiver Antallet af det paagjældende Tals Primfaktorer.

Betegner man altsaa ved $\mu(x)$ en Faktor, som for $x =$ et Primtal eller et Produkt af et ulige Antal forskjellige Primtal er lig -1, men for $x = 1$ eller et Produkt af et lige Antal forskjellige Primfaktorer er $+1$, i andre Tilfælde lig 0, saa kan (6) skrives som

$$\Pi(1 - p^{-r}) = \sum_1^\infty \mu(x) x^{-r} = \frac{1}{s(r)}. \tag{7}$$

Hvor vidt ogsaa denne Ligning vedbliver at gjælde for $r = 1$, altsaa om Rækken $\sum_1^\infty \mu(x)x^{-1}$ er konvergent, kan paa dette Stadium ikke afgjøres, senere skal dog vises, at den ialfald er endelig og < 1, naar den afbrydes ved et hvilket som helst Led. For øvrigt vil en numerisk Beregning vise, at dens numeriske Værdi hurtig nærmer sig stærkt til 0, og at den snart er positiv, snart negativ.

Euler har foruden de nævnte Relationer opstillet en hel Række andre, som dog ikke uden videre kunne bruges, da der ikke føres tilstrækkeligt Bevis for Konvergensen af de optrædende Produkter og Summer. Blandt disse kan f. Ex. anføres følgende:

$$\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdots = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

Tællerne i de her optrædende Faktorer ere alle ulige Primtal, Nævnerne de nærmeste Multipla af 4, altsaa $p \pm 1$ eftersom $p = 4m \mp 1$. For denne Ligning er der senere givet et fuldstændigt Bevis af Mertens [1]). En anden er følgende:

$$\frac{5}{5+1}\cdot\frac{7}{7-1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdot\frac{17}{17+1}\cdots = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}\ , \tag{9}$$

hvori der kun indgaar Primtal af Formen $6n \pm 1$. Vi anføre disse Relationer, skjønt vi senere ikke gjøre nogen Brug af dem, fordi den første giver os Anledning til en Bemærkning. Det er klart, at alle ulige Primtal have Formen $4n+1$ eller $4n-1$, lad os antage, at alle Primtal fra en vis endelig Grænse q at regne havde kun en af disse Former, altsaa f. Ex. $4n+1$. Saa fik man, idet de foregaaende Faktorer samledes til en enkelt, A:

$$\frac{\pi}{4} = A\cdot\prod_q^\infty\frac{p}{p-1} = B\cdot\prod_2^\infty\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Men denne Ligning er umulig, eftersom B er en endelig Konstant, og det sidste Produkt har Værdien ∞. Vi lære heraf, at der maa være uendelig mange Primtal af Formen $4n+1$, og paa ganske tilsvarende Maade ses, at der ogsaa maa være uendelig mange af Formen $4n-1$, og vi faa altsaa herved et simpelt Bevis for et specielt Tilfælde af en af Dirichlet bevist almindelig Sætning.

De reciproke Potenssummer $s(r)$ af Tallene i den naturlige Talrække spille i mange Undersøgelser en stor Rolle. De, der svare til lige r, udtrykkes som bekjendt let ved de Bernoulli'ske Tal [2]), idet

$$s(2) = \frac{\pi^2}{6} = B_1\pi^2;\quad s(4) = \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{3}\pi^4 B_3;\quad s(6) = \frac{\pi^6}{945} = \frac{B_5}{[6]}\cdot 2^5\pi^6, \tag{10}$$

almindelig

$$s(2m) = \frac{B_{2m-1}}{[2m]}\cdot 2^{2m-1}\pi^{2m}. \tag{10'}$$

---

[1]) Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, Borchardt's Journal Bd. 78.

[2]) Se f. Ex. Schlömilch: Compendium der höh. Anal. I, S. 244.

For øvrigt ville de, for saa vidt man vil have de numeriske Værdier af dem, baade for r lige og r ulige, lettest og sikrest beregnes ved at udregne de enkelte Led. En saadan Tabel er givet af Legendre og er nedenfor meddelt i Tab. I.

Af Rækkeudviklinger, i hvilke disse Summer indgaa, mærkes især følgende:

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{1}{1}\frac{s_2 z^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{s_4 z^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{s_6 z^6}{\pi^6} \ldots, \quad (z^2 < \pi^2) \tag{11}$$

og de dermed nær beslægtede Tangens- og Secansrækker, samt

$$l\,\Gamma(1+z) = -Cz + \tfrac{1}{2}s_2 z^2 - \tfrac{1}{3}s_3 z^3 + \tfrac{1}{4}s_4 z^4 \ldots, \quad (z^2 < 1), \tag{12}$$

hvor vi, som ofte i det følgende, for Kortheds Skyld skrive s_r for $s(r)$, naar r er hel. Konstanten C er den Euler'ske Konstant 0·5772156..., som ogsaa staar i nær Forbindelse med de samme Summer, idet

$$C = \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{3}s_3 + \tfrac{1}{4}s_4 - \tfrac{1}{5}s_5 \ldots \tag{13}$$

Angaaende disse velbekjendte Ligninger henvises til Schlömilch's Compendium (lejlighedsvis skal her bemærkes, at Konstanten C_3 smstds. II, Side 254 er ukorrekt, den rigtige Værdi er 0·06735 230105).

Det vilde være af stor Betydning, hvis man kjendte en brugbar Rækkeudvikling for Funktionen $s(r)$. Dirichlet[1]) har ganske vist bevist, at $\rho.s(1+\rho) = 1 + (\rho)$, hvor (ρ) betegner en Størrelse, som forsvinder, naar $\rho = 0$, og herved er altsaa ialfald gjort det første Skridt i denne Retning, men saavidt mig bekjendt er ingen direkte gaaet videre paa dette Punkt.

Derimod haves vel et Udtryk ved et bestemt Integral[2]), idet almindelig for $r > 0$

$$[r]\,s(r+1) = \int_0^\infty \frac{z^r dz}{e^z - 1}, \tag{14}$$

hvoraf ses, at den nævnte Funktion staar i nogen Forbindelse med Γ-Funktionen. I sin ovennævnte Afhandling, «Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze», anvender Riemann et betydeligt Arbejde paa at finde et Udtryk for $s(r)$, som kan anvendes til videre Behandling og bruges ogsaa for imaginære r. Ved at gaa ud fra det ovennævnte Integral viser han først, at Funktionen $\Gamma(\frac{1}{2}r)\pi^{-\frac{1}{2}r}s(r)$ bliver uforandret, naar r ombyttes med $1-r$, og for særlig at drage Fordel af denne Egenskab, fremstiller han $s(r)$ ved Formlen

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}r)\pi^{-\frac{1}{2}r}s(r) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{r}{2}-1} dx, \tag{15}$$

hvor $\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$. Idet han dernæst sætter $r = \frac{1}{2} + ti$ og

---

[1]) Se: Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind. 3 Aufl. Supplement II.

[2]) Se f. Ex. Schlömilch, Comp. I, S. 430.

$$\xi(t) = \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)(r-1)\,\pi^{-\frac{r}{2}}\,s(r)\,, \tag{16}$$

kan $\xi(t)$ udtrykkes i Form af et bestemt Integral, der kan udvikles i Række efter Potenser af t^2. Derved ledes han til at indse Muligheden af at opløse $\xi(t)$ i et Produkt af Faktorer af Formen $1-\frac{t^2}{\alpha^2}$, Gange en Konstant $\xi(0)$, og derved vil det i Virkeligheden atter blive muligt at udtrykke $s(r)$ som en Kvotient af Produkter med uendelig mange Faktorer eller med andre Ord at fremstille $ls(r)$ som en Sum af Logarithmer af lineære Faktorer, og det er netop dette, han specielt har Brug for. Men Udtrykket for $\xi(t)$ fremtræder under Formen

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\,(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\tfrac{1}{2}tlx\right)dx\,, \tag{17}$$

og at gjennemføre de antydede Regninger med Udvikling i Række efter Potenser af t samt Opløsning af den derved fremgaaende Ligning turde derfor vistnok være frugtesløst.

Forsaavidt man ikke vil fortsætte Rækkerne for $s(r)$ i det uendelige, men afbryde dem med Leddet n^{-r}, saa kunne Summerne bestemmes, idet man ved Hjælp af Stirling's Formel finder et Udtryk for Summen $\sum_1^n x^{-r}$:

$$\sum_1^n x^{-r} = C - \frac{1}{r-1}n^{-r+1} + \frac{1}{2}n^{-r} - \frac{r}{12}n^{-r-1} + \ldots$$

Specielt mærkes for den harmoniske Række den bekjendte Ligning

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{x} = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{\theta}{12x^2}\,,\quad 0<\theta<1. \tag{18}$$

Et andet Udtryk haves ved Formlen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}l.\,\Gamma(x+1)+C\,, \tag{19}$$

hvor x maa være et helt Tal.

I Forbindelse hermed skal anføres, at

$$l.\,\Gamma(x+1) = x\,lx - x + \frac{1}{2}lx + l\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x}\,,\quad \text{hvor } 0<\theta<1\,, \tag{20}$$

en Ligning, som vi i det følgende ofte faa Anvendelse for.

Foruden de her anførte symmetriske Funktioner af Primtal findes der hos enkelte Forfattere anført nogle andre Rækker, der afhænge af Primtal. Tchebycheff[1]) har f. Ex. bevist, at medens Rækken $\Sigma\frac{1}{nln}$ er divergent, saa er derimod $\Sigma\frac{1}{plp}$ endelig og mindre end 1·73[1]).

[1]) Mémoire sur les nombres premiers. Mém. de l'Académie de St. Pétersbourg T. VII, eller Liouville's Journal Tome 17 (1852).

§ 2. Nogle specielle Rækker. Möbius's Faktorer.

Foruden de anførte Rækker er der nogle andre, som staa i nær Forbindelse med disse, og som vi i det følgende stadig faa Brug for.

Vi saa ovenfor, at $\frac{1}{s_r} = \Pi(1-p^{-r})$ eller ifølge (7)

$$\sum_1^\infty x^{-r} \cdot \sum_1^\infty \mu(x) x^{-r} = 1, \tag{21}$$

hvor $\mu(x)$ som anført er 1, naar x er et Produkt af et lige Antal forskjellige Primfaktorer, -1, naar dette Antal er ulige, og 0, naar x indeholder en kvadratisk Faktor. Denne Ligning beror i Virkeligheden paa en særegen Egenskab hos Faktorerne $\mu(x)$. Udfører man nemlig Multiplikationen direkte og opskriver Regningen saaledes:

$$\begin{array}{rcccccccc}
s_r &=& 1 &+& 2^{-r} &+& 3^{-r} &+& 4^{-r} &+& 5^{-r} &+& 6^{-r} &+& \ldots \\
-2^{-r}s_r &=& & & -2^{-r} & & & & -4^{-r} & & & & -6^{-r} &+& \ldots \\
-3^{-r}s_r &=& & & & & -3^{-r} & & & & & & -6^{-r} &+& \ldots \\
-5^{-r}s_r &=& & & & & & & & & -5^{-r} & & &+& \ldots \\
+6^{-r}s_r &=& & & & & & & & & & & +6^{-r} &+& \ldots
\end{array}$$

o. s. v.

saa ses, at alle Led af sig selv forsvinde ved Summationen undtagen det første. Dette hidrører fra, at naar D betegner en vilkaarlig Divisor i Tallet x, saa vil almindelig

$$\Sigma\mu(D) = 0, \tag{22}$$

naar Summen udstrækkes til alle Tallets Divisorer. Det er tilstrækkeligt at betragte de Divisorer, som ikke indeholde nogen kvadratisk Faktor, da μ for alle andre er 0. Naar da $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, saa ville alle saadanne Divisorer og kun disse optræde som Led i Produktet $(1-a)(1-b)(1-c)\ldots$, og Fortegnet for hvert enkelt Led vil netop blive den Værdi af μ, som svarer til den paagjældende Divisor. Erstattes altsaa $a, b, c \ldots$ alle ved Tallet 1, saa bliver Produktet netop $\Sigma\mu(D) = 0$.

Denne Sætning er angivet af Möbius[1]), efter hvem vi benævne Faktorerne μ som «Möbius's Faktorer» Han har gjort en betydningsfuld Anvendelse af dem til Opløsning af særegne Systemer af Ligninger. Haves nemlig mellem to Systemer af Funktioner, X_r og Y_r, Relationer af Formen

$$\left.\begin{array}{l}
Y_1 = \Sigma X_r = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots \\
Y_2 = \Sigma X_{2r} = X_2 + X_4 + X_6 + \ldots \\
Y_3 = \Sigma X_{3r} = X_3 + X_6 + X_9 + \ldots
\end{array}\right\} \tag{23}$$

o. s. v.,

[1]) Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen. Crelle's Journal Bd. 9, S. 105.

saa findes deraf ved Hjælp af Faktorerne μ

$$X_1 = \Sigma\mu(r)\,Y(r)\,, \quad X_2 = \Sigma\mu(2r)\,Y(2r)\,, \quad X_3 = \Sigma\mu(3r)\,Y(3r)\ldots, \tag{24}$$

naturligvis under Forudsætning af, at de paagjældende Rækker, hvis de skulle fortsættes i det uendelige, ere konvergente.

Betydningen af det her omtalte vil bedst ses af nogle Exempler.

Ex. 1 (efter Möbius). Af Rækken

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{25}$$

faas

$$x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6}\ldots, \tag{26}$$

som er konvergent for $x < 1$. Sætter man $x = \frac{1}{v}$, faas heraf, idet $v > 1$,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{v^3-1} - \frac{1}{v^5-1} + \frac{1}{v^6-1}\ldots,$$

og for $v = 1+w$ og efter Multiplikation med w faas atter

$$\frac{w}{1+w} = \frac{w}{(1+w)-1} - \frac{w}{(1+w)^2-1} - \frac{w}{(1+w)^3-1} - \frac{w}{(1+w)^5-1} + \frac{w}{(1+w)^6-1}\ldots \tag{27}$$

Gaar man her til Grænsen og antager w uendelig lille, gaar denne atter over til følgende

$$0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\ldots = \sum_1^\infty \mu(x)\cdot\frac{1}{x}\,. \tag{28}$$

Forsaavidt nu det var godtgjort, at den her optrædende Række er konvergent, saa vil dens Sum altsaa blive Nul. Forudsat at dette virkelig finder Sted, saa vilde man ogsaa ved Multiplikation med lz og Overgang til Exponentialfunktioner faa, at

$$1 = z\,.\,z^{-\frac{1}{2}}\,.\,z^{-\frac{1}{3}}\,.\,z^{-\frac{1}{5}}\,.\,z^{-\frac{1}{6}}\ldots \tag{29}$$

Ligesaa vilde man af Rækken for $-l(1-x)$ finde følgende nye Række

$$x = -l(1-x) + \tfrac{1}{2}l(1-x^2) + \tfrac{1}{3}l(1-x^3)\ldots \qquad (x<1). \tag{30}$$

Sætter man atter heri $x = 1-z$, faas

$$1-z = -lz + \tfrac{1}{2}l(1-(1-z)^2) + \tfrac{1}{3}l(1-(1-z)^3)\ldots,$$

og antager man z uendelig lille, kan denne atter skrives

$$e^{1-z} = z^{-1}\,.\,(2z)^{\frac{1}{2}}\,.\,(3z)^{\frac{1}{3}}\,.\,(5z)^{\frac{1}{5}}\,.\,(6z)^{-\frac{1}{6}}\ldots = (z^{-1}\,.\,z^{\frac{1}{2}}\,.\,z^{\frac{1}{3}}\ldots)\,.\,(2^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{3}}\,.\,5^{\frac{1}{5}}\,.\,6^{-\frac{1}{6}}\ldots). \tag{31}$$

Da den første Faktor i det sidst anførte Produkt nærmer sig til 1, saa bliver altsaa den anden Faktor e^{1-z} eller, da z er uendelig lille,

$$2^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{3}}\,.\,5^{\frac{1}{5}}\,.\,6^{-\frac{1}{6}}\ldots = e\,, \tag{32}$$

der ogsaa kan skrives som

$$\tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{3}l3 + \tfrac{1}{5}l5 - \tfrac{1}{6}l6 + \tfrac{1}{7}l7\ldots = 1. \tag{33}$$

Vi have anført disse Udviklinger, som findes hos Möbius, fordi de trods de mangelfulde Beviser dog have en ikke ringe Interesse, og de vistnok ved fornyede Undersøgelser

ville vise sig rigtige. Vi have forsøgt at finde Grænser for de Fejl, som begaas ved at afbryde Rækkerne ved et vilkaarligt Led, men disse Grænser ere, naar undtages for den første Række for x (26), ikke snævre nok til at have nogen Betydning.

Ex. 2. Vi have ovenfor vist i (3), at $ls_r = \Sigma p^{-r} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2r} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3r} + \ldots$ Ved at vende denne Ligning om, erholdes

$$\Sigma p^{-r} = ls_r - \tfrac{1}{2}ls_{2r} - \tfrac{1}{3}ls_{3r} - \tfrac{1}{5}ls_{5r} + \tfrac{1}{6}ls_{6r} \ldots = \Sigma \frac{1}{i}\mu(i)\, s_{ir}. \tag{34}$$

Da ls_m for store m nærmer sig meget stærkt til 2^{-m}, saa bliver denne Række stærkt konvergent og kan derfor bekvemt bruges til Beregning af de numeriske Værdier af reciproke Potenssummer for Primtal. Paa denne Maade er Ligningen anvendt af Merrifield [1].

For $r = 1$ kan Σp^{-r} vel findes paa denne Maade, men denne Sum viser sig at være uendelig. Mertens har derfor forsøgt at finde en Tilnærmelsesformel for $\overset{G}{\underset{2}{\Sigma}} p^{-1}$, hvor G er en vilkaarlig valgt højere Grænse. Han finder i den anførte Afhandling [2]

$$\overset{G}{\underset{1}{\Sigma}} \frac{1}{p} = ll.G + C - H + \delta, \tag{35}$$

hvor C er den Eulerske Konstant, H en anden Konstant, bestemt ved, at

$$H = \tfrac{1}{2}ls_2 + \tfrac{1}{3}ls_3 + \tfrac{1}{5}ls_5 - \tfrac{1}{6}ls_6 \ldots = \overset{\infty}{\underset{2}{\Sigma}} \frac{\mu(r)}{r}\, ls(r), \tag{36}$$

medens δ ligger imellem Grænserne

$$\pm\left[\frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{GlG}\right]. \tag{37}$$

Ex. 3. Af Rækken

$$F(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}}) + \tfrac{1}{4}f(x^{\frac{1}{4}}) + \ldots \tag{38}$$

findes ved Omvending, at

$$f(x) = F(x) - \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) \ldots \tag{39}$$

Er specielt $F(x) = (lx)^r$, saa er altsaa ogsaa

$$f(x) = (lx)^r - \frac{1}{2}\cdot 2^{-r}(lx)^r - \frac{1}{3}\cdot 3^{-r}(lx)^r \ldots = (lx)^r \cdot [1 - 2^{-(r+1)} - 3^{-(r+1)} \ldots] = \frac{1}{s_{r+1}}(lx)^r.$$

Hvis derfor $F(x)$ kan udvikles i Række efter stigende Potenser af lx, saa vil det samme være Tilfældet med $f(x)$, og

$$F(x) = a\,lx + b(lx)^2 + c(lx)^3 + \ldots \tag{40}$$

giver

$$f(x) = \frac{a}{s_2}lx + \frac{b}{s_3}(lx)^2 + \frac{c}{s_4}(lx)^3 + \ldots, \tag{41}$$

som vil være konvergent, hvis Rækken for $F(x)$ er det.

---

[1] Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XXXIII. 1881.

[2] Borchardt's Journal Bd. 78.

Ex. 4. Ved Anvendelse af Möbius's Faktorer lader der sig ogsaa udlede adskillige Resultater om endelige Rækker. Betegner man f. Ex. ved $F(x)$ den diskontinuerte Funktion

$$F(x) = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} \ldots + \mu(x) \cdot x^{-r} = \sum_1^x \mu(x) x^{-r}, \qquad (42)$$

og ved $E\frac{x}{m}$ det største hele Tal i Kvotienten $\frac{x}{m}$, saa haves

$$F(x) + 2^{-r} F\left(E\tfrac{x}{2}\right) + 3^{-r} F\left(E\tfrac{x}{3}\right) + \ldots + x^{-r} F(1) = 1, \qquad (43)$$

eller, som den ogsaa kan skrives, $\sum_1^x m^{-r} F\left(\frac{x}{m}\right) = 1$. Er specielt $r = 0$, og sættes $\sum_1^x \mu(x) = M(x)$, saa bliver altsaa

$$M(x) + M\left(\tfrac{x}{2}\right) + M\left(\tfrac{x}{3}\right) + \ldots M(1) = 1. \qquad (44)$$

Ex. 5. Et noget lignende Tilfælde er følgende. Man skal bestemme Funktionen $f(n)$ saaledes, at for alle n haves (idet n er et helt Tal)

$$n = f(n) + f\left(E\tfrac{n}{2}\right) + f\left(E\tfrac{n}{3}\right) + \ldots f\left(E\tfrac{n}{n}\right) = \sum_1^n f\left(E\tfrac{n}{x}\right). \qquad (45)$$

Ved Anvendelse af Möbius's Faktorer faas heraf ved efterhaanden at sætte $E\frac{n}{2}$, $E\frac{n}{3}$ o. s. v. for n

$$f(n) = n - E\frac{n}{2} - E\frac{n}{3} - E\frac{n}{5} + E\frac{n}{6} \ldots = \sum_1^n \mu(x)\, E\frac{n}{x}.$$

Det er imidlertid let at se ved sukcessiv Beregning af $f(1), f(2) \ldots$, at $f(x) = 1$, saa at altsaa almindelig haves

$$\sum_1^n \mu(x)\, E\frac{n}{x} = 1. \qquad (46)$$

Sættes heri $E\frac{n}{x} = \frac{n}{x} - r_x$, hvor r_x er en positiv ægte Brøk, saa faas

$$1 = n \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} - \sum_1^n \mu(x) r_x = n \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} - R_1(n) + R_2(n), \qquad (47)$$

hvor $R_1(n)$ betegner Summen af de Led, $\mu(x) r_x$, som have positive Fortegn, $R_2(n)$ Summen af dem med negative. Altsaa bliver endelig

$$\sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} + \frac{R_1(n)}{n} - \frac{R_2(n)}{n}. \qquad (47')$$

Da de to Restled optræde med modsatte Fortegn, er det at vente, at de omtrent ville ophæve hinanden, saa at $\frac{1}{n}$ vil angive den omtrentlige Værdi af Rækken. Absolute Grænser for Afvigelserne faas ved at bemærke, at $R_1(n) < \Sigma(+\mu)$ (ɔ: Summen af positive μ), og $R_2(n) < \Sigma(-\mu)$, saa at man faar

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_2^n (-\mu) < \sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_2^n (+\mu). \qquad (48)$$

Vi se heraf, at Rækken $\sum_1^n \mu(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} \pm \lambda$, hvor λ i ethvert Fald er en ægte Brøk. Rækken (28) kan derfor, fortsat i det uendelige, ikke divergere, men maa enten være konvergent eller oscillere mellem endelige Grænser.

---

§ 3. Bestemmelse af $\theta(x)$ ved bestemte Integraler. Riemann's Formel.

Naar man ved $\pi(x)$ betegner en Funktion, som har Værdien 1, naar x er et Primtal, og 0, naar x er et sammensat Tal, saa kunne Formlerne

$$-\frac{s'(r)}{s(r)} = \Sigma \frac{1}{p^r - 1} lp \quad \text{og} \quad ls(r) = -\Sigma l(1-p^{-r})$$

skrives som henholdsvis

$$-\frac{s'(r)}{s(r)} = \sum_1^\infty \pi(x) \frac{lx}{x^r - 1} \tag{48}$$

og

$$ls(r) = -\sum_1^\infty \pi(x) l(1 - x^{-r}). \tag{49}$$

Den sidste kan ogsaa skrives

$$ls(r) = \sum_1^\infty \pi(x) (x^{-r} + \tfrac{1}{2}x^{-2r} + \tfrac{1}{3}x^{-3r} + \ldots)$$

eller, naar man ved $\tilde{\omega}(x)$ betegner en Funktion, som er 1, naar $x = p$, $\frac{1}{2}$ for $x = p^2$, almindelig $\frac{1}{n}$, naar $x = p^n$, men 0, naar $x = 1$ eller sammensat af forskjellige Primfaktorer,

$$ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) x^{-r}. \tag{50}$$

Enhver af disse tre Ligninger (48)—(50) indeholder implicite en Definition paa de deri optrædende Funktioner $\pi(x)$ og $\tilde{\omega}(x)$, og da de gjælde for uendelig mange Værdier af r, saa maa det være muligt at udføre Bestemmelsen af disse Funktioner af de nævnte Ligninger. Paa Grund af Vanskeligheden ved at operere med saadanne Summer vil det imidlertid være hensigtsmæssigt at søge at sætte Integraler i Stedet for dem. Navnlig den sidste Form (50) tillader let en saadan Omdannelse, idet x^{-r} erstattes ved $r\int_x^\infty z^{-r-1}dz$. Derved faas

$$\frac{1}{r} ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) \int_x^\infty z^{-r-1} dz. \tag{51}$$

Men nu er

$$\tilde{\omega}(1)\int_1^\infty + \tilde{\omega}(2)\int_2^\infty + \tilde{\omega}(3)\int_3^\infty \ldots = \tilde{\omega}(1)\int_1^2 + (\tilde{\omega}(1)+\tilde{\omega}(2))\int_2^3 + (\tilde{\omega}(1)+\tilde{\omega}(2)+\tilde{\omega}(3))\int_3^4 + \ldots$$

Betegner man altsaa Summen $\tilde{\omega}(1)+\tilde{\omega}(2)+\tilde{\omega}(3)+\ldots\tilde{\omega}(x)$ ved $f(x)$, saa faas, idet $f(x)$ er en diskontinuert Funktion, som ikke varierer, undtagen naar x passerer en Potens af et Primtal, at

$$\frac{1}{r}\,ls(r) = \sum_1^\infty f(x)\int_x^{x+1} z^{-r-1}dz = \sum_1^\infty \int_x^{x+1} f(z)\,z^{-r-1}dz = \int_1^\infty f(z)\,z^{-r-1}dz. \qquad (52)$$

Funktionen $f(x)$ vil angive Antallet af Primtal op til x + det halve Antal Primtalkvadrater + $\frac{1}{3}$ af Antallet af Primtalkuber o. s. v. op til x.

Udtrykt ved $\theta(x)$, Mængden af Primtal op til x (inkl.), skal $f(x)$ altsaa være lig med

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \qquad (53)$$

Vi bruge i det følgende for dette Tal Benævnelsen: «Antallet af dividerede Primtalpotenser», idet hver enkelt Potens af et Primtal i dette Antal kun skal tælles som 1 divideret med Exponenten. Det erindres, at Tallet 1 ikke er medregnet i $\theta(x)$ og altsaa heller ikke i $\vartheta(x)$. Forsaavidt nu $f(x)$ bestemmes af den ovenstaaende Formel under entydig Form, saa vil i Diskontinuitetspunkterne $f(x)$ ikke kunne falde sammen med $\vartheta(x)$, men maa i disse Punkter angive en Middelværdi mellem $\vartheta(x+0)$ og $\vartheta(x-0)$. Derimod er der ikke noget til Hinder for fuldstændig Overensstemmelse i alle andre Punkter.

For af Formlen (52) at bestemme $f(x)$ anvender Riemann[1]) følgende Sætning, som bevises ved Hjælp af Fourier'ske Integraler: Naar, idet $s = a+bi$, hvor $a>1$,

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)\,x^{-r}\,dlx,$$

saa er ogsaa

$$2\pi i\,h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\,y^s ds,$$

og ved Anvendelse af denne fremkommer derefter Udtrykket for $f(x)$ under Formen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{r}\,ls(r)\,x^r dr, \qquad (54)$$

og der staar derefter kun tilbage at omdanne dette Integral til en mere handelig Form.

Skjønt Riemann's Udledning af denne Formel baade er elegant og ikke egentlig

---

[1]) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Monatsber. der Berl. Akad. 1859, eller Riemann's Gesammelte mathematische Werke S. 136.

vanskelig, tro vi dog, at det vil være ret oplysende at vise, hvorledes den samme Formel mere direkte lader sig udlede ad en anden Vej, hvorved det tydeligere ses, at Integralet virkelig fremstiller den søgte Funktion.

Som bekjendt er [1])

$$\int_0^\infty \frac{z\sin bz + k\cos bz}{k^2+z^2}\,dz = \begin{cases} \pi e^{-bk} & \text{for } b>0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } b=0, \\ 0 & \text{for } b<0. \end{cases} \tag{55}$$

k er her en vilkaarlig positiv Konstant. Sættes $b = l\frac{x}{p^n}$, saa er altsaa

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^k \int_0^\infty \frac{z\sin z\,l\frac{x}{p^n} + k\cos z\,l\frac{x}{p^n}}{k^2+z^2}\,dz = \begin{cases} 1 & \text{for } lx>lp^n, \\ \frac{1}{2} & \text{for } lx=lp^n, \\ 0 & \text{for } lx<lp^n, \end{cases} \tag{56}$$

og fremstiller altsaa en diskontinuert Funktion, der er lig 0, saalænge til x, varierende fra 1 til ∞, passerer p^n, og derefter er lig 1. Indføres Exponentialfunktioner for de trigonometriske, saa kan Integralet ændres til

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{k+zi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^{k+zi} + \frac{1}{k-zi}\left(\frac{x}{p^n}\right)^{k-zi}\right)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+zi}\,\frac{x^{k+zi}}{p^{n(k+zi)}}\,dz. \tag{56'}$$

Divideres dette med n, faas en Funktion, som er 0, indtil x passerer p^n, og derefter er lig $\frac{1}{n}$; for $x = p^n$ er den lig $\frac{1}{2n}$. Indsættes nu for p efterhaanden alle Primtal, for Exponenten n alle hele Tal fra 1 og opad og summeres, faas altsaa et Udtryk for Antallet af dividerede Primtalpotenser op til x. Kun hvis x er en Potens af et Primtal, faas ikke selve $\vartheta(x)$, men $\frac{1}{2}(\vartheta(x-0)+\vartheta(x+0))$. Men ved Additionen faas under Integraltegnet $\frac{x^{k+zi}}{k+zi}$, multipliceret med en Række af Formen

$$\Sigma p^{-(k+zi)} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2(k+zi)} + \frac{1}{3}\Sigma p^{-3(k+zi)} + \ldots$$

Men denne Række er for $k>1$ konvergent, og dens Sum lig $l.s(k+zi)$, og altsaa faas, at Integralet

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k+zi}}{k+zi}\,l.s(k+zi)\,dz \tag{57}$$

vil fremstille Funktionen $\vartheta(x)$, undtagen i selve Diskontinuitetspunkterne, for saa vidt k er

---

[1]) Se f. Ex. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, herausgeg. von Hattendorff, S. 33, eller G. F. Meyer: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale S. 197.

en positiv Konstant, der er > 1. Men dette Integral er netop identisk med Riemann's, hvilket strax ses ved at sætte $r = k + zi$.

Integralet (56'), hvorfra vi gik ud, er et specielt Tilfælde af en anden lidt almindeligere Form, som vi nu ville udvikle, da Riemann gjør en udstrakt Brug af den ved Transformationen af Integralet for $f(x)$. Erstatter man nemlig $k + zi$ ved Differensen $(a-b) + (z-y)i$, hvor a, b, z, y ere reelle og $a > b$, saa faas [1])

$$2\pi x^{-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{zi}}{k+zi} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{(z-y)i}}{(a-b)+(z-y)i} dz ,$$

eller, naar man sætter $a + zi = r$, $b + yi = \beta$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{zi}}{r-\beta} dz = 2\pi x^{-k} . x^{yi}.$$

Multipliceres paa begge Sider med x^a, faas altsaa almindelig, idet x antages > 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r-\beta} dz = \frac{1}{i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^r}{r-\beta} dr = 2\pi x^\beta , \tag{58}$$

hvor r og β ere komplexe Tal, og den reelle Del af r er større end den reelle Del af β. I denne Form (med Ombytning af r med s) benyttes Ligningen af Riemann, der dog ved en eller anden Uagtsomhed har faaet et urigtigt Fortegn paa den ene Side af Ligningen. Ved Differentiation med Hensyn til β fremgaar atter heraf følgende Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{(r-\beta)^2} dz = \frac{1}{i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^r}{(r-\beta)^2} dr = 2\pi x^\beta lx , \tag{59}$$

eller for $\beta = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r^2} dz = 2\pi lx. \tag{60}$$

Man ser let, hvorledes man ved Benyttelsen af de her angivne Integralformer kan sammensætte Integraler, som give symmetriske Funktioner af Primtallene op til x, idet man for x sætter $\frac{x}{p}$ og summerer for alle Primtal. Men alle disse Integraler faa væsentlig lignende Form som det Riemannske Integral for $f(x)$ og frembyde altsaa de samme Vanskeligheder som dette. Flere af disse Relationer ere imidlertid ikke uden Interesse. Vi anføre blandt dem følgende:

$$\int \frac{x^r}{r-1} ls(r)\, dz = \int \left(\Sigma \left(\frac{x}{p}\right)^r + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{x}{p^2}\right)^r + \dots \right) \frac{dz}{r-1} = 2\pi x \left[\overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \overset{(x)}{\Sigma} \frac{1}{p^3} \dots \right], \tag{61}$$

hvor alle Nævnerne paa højre Side skulle være $\leqq x$, den reelle Del af $r > 1$;

[1]) Jvfr. Meyer: Bestimmte Integrale, S. 196.

$$\int \frac{x^r}{r^2} ls(r)\,dz = 2\pi\left[\sum^{(x)} l\frac{x}{p} + \frac{1}{2}\sum^{(x)} l\frac{x}{p^2} + \ldots\right] = 2\pi[\vartheta(x)\,lx - \psi(x)], \tag{62}$$

hvor $\psi(x)$ betegner $\sum^{p\leq x} lp + \sum^{p\leq\sqrt{x}} lp + \sum^{p\leq\sqrt[3]{x}} lp + \ldots$;

$$\int \frac{x^r}{r} s(r)\,dz = 2\pi Ex, \tag{63}$$

$$\int \frac{x^r s(r)}{r-1} dz = 2\pi x \sum_1^x \frac{1}{n}; \tag{64}$$

ligesaa

$$\int \frac{\Sigma\mu(x)\left(\frac{x}{n}\right)^r}{r-1} dz = \int \frac{x^r}{(r-1)\,s(r)} dz = 2\pi x \sum_1^x \mu(n)\frac{1}{n}, \tag{65}$$

og

$$\int \frac{x^r}{r\,s(r)} dz = 2\pi \sum_1^x \mu(n). \tag{66}$$

Integrationsgrænserne ere i alle disse Integraler $-\infty$ til $+\infty$.

Paa samme Maade kan man ogsaa indse Rigtigheden af Formlen $\left(D_r = \frac{d}{dr}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r} ls(r)\right) dz = -2\pi lx\,.f(x). \tag{67}$$

Denne kan ogsaa let findes ved delvis Integration af det Riemannske Integral (54). Paa denne Maade er den udledt af Riemann, som derefter lægger den til Grund for den videre Behandling af sin Formel. Det vil ikke være overflødigt at vise, hvorledes Riemann gaar frem ved denne Behandling, da Genocchi i sin Redegjørelse for Riemann's Fremgangsmaade [1]) her afviger lidt fra R. Vi skulle i det følgende saa nær som muligt følge R.'s originale Methode, idet vi kun tilføje de Mellemled, som han har anset for unødvendige.

Ved den videre Omdannelse af det ovenstaaende Integral kan man ikke benytte sig af Rækkeudvikling for x^r efter Potenser af r, da — bortset fra andre Omstændigheder — Diskontinuiteten derved vilde gaa tabt. Man er derfor alene henvist til at omdanne $ls(r)$ til en eller anden Række, hvilket atter vil være ensbetydende med at udvikle $s(r)$ i et Produkt af Faktorer. Vi have ovenfor anført, at det kan vises, at naar $r = \frac{1}{2} + ti$, saa er

$$\pi^{-\frac{r}{2}}(r-1)\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) s(r) = \xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} tlx\right) dx,$$

---

[1]) A. Genocchi: Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite, Annali di matematica da B. Tortolini T. III, p. 52.

hvor $\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$, og hvor $\xi(t)$ fremstiller en Funktion, der altid er endelig og kan udvikles i en konvergent Række efter Potenser af t^2. $\xi(t)$ vil derfor kunne fremstilles under Formen

$$\xi(t) = \xi(0) \cdot \Pi\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right), \tag{68}$$

hvor $\xi(0)$ er en Konstant, og Størrelserne α betegne Rødderne i $\xi(t) = 0$. Den imaginære Del af Rødderne α er stedse beliggende mellem Grænserne $\pm\frac{1}{2}i$, men er sandsynligvis lig 0, saa at alle disse Rødder ere reelle. Fremstillingen af denne Formel er et Hovedpunkt i Riemann's Afhandling, men skjønt de af selve R. saavelsom af Genocchi givne Udviklinger ere fuldstændig tilstrækkelige til at paavise Formlens formelle Gyldighed ialfald for $r > 1$, forekommer der mig dog at hvile nogen Uklarhed over dennes egentlige Beskaffenhed. Dette har naturligvis sin væsentlige Grund deri, at selve Rødderne α ere ubekjendte. At finde disse Rødder ved Udvikling af $\xi(t)$ i Række efter Potenser af t og Opløsning af den derved fremkommende Ligning $\xi(t) = 0$ synes at være et haabløst Arbejde, og der vilde altsaa ikke være andet at gjøre end at forsøge paa at finde disse Rødder ad indirekte Vej. Det er ret rimeligt, at de maa paa en simpel Maade afhænge af Tallene i den naturlige Talrække eller maaske endog af Primtallene, men det er ikke lykkedes mig at vinde Klarhed over dette vigtige Punkt.

Det synes ogsaa at være noget kunstigt at indføre den nye variable t. Det er naturligvis sket for at fremhæve, at $\xi(t)$ er en lige Funktion af t, altsaa af $r - \frac{1}{2}$, men det mærkeligste er, at ved den videre Udvikling maa man igjen indføre selve r. Man faar nemlig ganske vist først

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma_\alpha l\left(1 + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) + l\xi(0), \tag{69}$$

hvor alle de enkelte Led undtagen det første og det sidste kunne udtrykkes ved Elementer af Formen $l(a+br)$, og netop denne Form er for Beregningen af Integralet særlig bekvem, men betragter man et enkelt Led i Summen Σ_α, saa faas

$$l\left(1 + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) = l\left(\alpha^2 + \left(r-\frac{1}{2}\right)^2\right) - l\alpha^2 = l\left(\frac{1}{2} - r + \alpha i\right) + l\left(\frac{1}{2} - r - \alpha i\right) - l\alpha^2$$

$$= l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) + l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - l\alpha^2.$$

Summen Σ_α kan derfor skrives som

$$\Sigma\left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)\right) + \Sigma l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - \Sigma l\alpha^2. \tag{70}$$

Men nu er

$$\Sigma l\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - \Sigma l\alpha^2 = \Sigma l\left(1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) = l\frac{\xi\left(\frac{1}{2}i\right)}{\xi(0)} = l\xi\left(\frac{1}{2}i\right) - l\xi(0),$$

og Følgen heraf bliver, at $l\xi(0)$ helt forsvinder af Formlen for $ls(r)$ og bliver erstattet ved den nye Konstant $l\xi\left(\frac{1}{2}i\right)$. Værdien af denne Konstant kan let angives, idet man som et andet Udtryk for $\xi(t)$ har

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t\, lx\right) dx, \qquad (71)$$

og sættes her $t = \frac{1}{2}i$, faas $\xi\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$. Herefter findes altsaa endelig for $ls(r)$ følgende Udtryk

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma_\alpha\left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)\right) - l2, \qquad (72)$$

og dette Udtryk er det, som skal indsættes i Integralformlen. Man ser deraf, at $l\xi(0)$ helt forsvinder og erstattes ved $-l2$, og faar derved en Bekræftelse paa, at Genocchi's Resultat er det rigtige, medens Riemann har begaaet en Uagtsomhed.

Vi se tillige, at Størrelserne $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ netop maa blive Rødderne i $s(r) = 0$, forsaavidt de ikke tillige kunne gjøre Faktorerne $\pi^{-\frac{r}{2}}(r-1)\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)$ til 0, og hvad der ved Riemann's Fremgangsmaade er vundet, er altsaa den Indsigt, at disse Rødder ere af Formen $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ og derfor stedse optræde parvis.

Vi skulle derefter indsætte det fundne Udtryk for $ls(r)$ i Formlen (67), som giver

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi lx}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r} ls(r)\right) dz,$$

og integrere Led for Led. Tages altsaa først det første Led i (72), saa giver dette som tilsvarende Led i $f(x)$, idet Integrationsgrænserne erindres at være $-\infty$ til $+\infty$,

$$f_1 = -\frac{1}{2\pi lx}\int x^r \cdot 0\, dz = 0,$$

saa at dette Led slet ingen Indflydelse faar. Betragte vi dernæst det sidste Led $-l2$, saa giver dette ifølge (60)

$$f_5 = -\frac{1}{2\pi lx}\int \frac{x^r}{r^2} l2\, dz = -l2,$$

og saaledes vil overhovedet et konstant Led i $s(r)$ give det samme konstante Led i $f(x)$.

Vi betragte dernæst det Led, som efter disse give det simpleste Resultat, nemlig Γ-Funktionen. Ifølge Gauss [1]) haves

$$\Gamma(1+z) = \mathrm{Lim}_m \frac{m^z}{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{m}\right)}, \quad \text{for } m = \infty,$$

---

[1]) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x +$ etc.

hvorefter atter

$$-l.\,\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right) = \operatorname{Lim}\sum_{n=1}^{n=m}\left(l\left(1+\frac{r}{2n}\right)-\frac{r}{2}lm\right), \quad \text{for } m=\infty,$$

og vi maa altsaa søge en Række enkelte Integraler af Formen

$$\int x^r D_r\frac{1}{r}\,l\left(1+\frac{r}{2n}\right)dz - \int x^r D_r\left(\frac{1}{r}\,\frac{r}{2}lm\right)dz.$$

Af disse to forsvinder det sidste, saa at kun det første bliver tilbage. Dette kan betragtes som specielt Tilfælde af det almindeligere Integral

$$B(x) = \int x^r D_r\frac{1}{r}\,l\left(1-\frac{r}{\beta}\right)dz. \tag{73}$$

For at finde dette, differentiere vi med Hensyn til β, hvorved faas

$$\frac{dB(x)}{d\beta} = \int x^r D_r\frac{1}{r}\cdot\frac{r}{\beta(\beta-r)}dz = \int x^r D_r\frac{1}{\beta(\beta-r)}dz = \frac{1}{\beta}\int\frac{x^r}{(r-\beta)^2}dz = 2\pi l x\cdot\frac{x^\beta}{\beta}. \tag{74}$$

Heraf kan atter $B(x)$ findes ved Integration med Hensyn til β, hvorved det ved Bestemmelsen af den lavere Integrationsgrænse maa erindres, at den reelle Del af Differensen $r-\beta$ maa være en positiv Størrelse, men at den reelle Del af r i øvrigt kan tillægges en vilkaarlig konstant endelig Værdi.

I det her foreliggende Tilfælde er $\beta = -2n$, hvor n er et positivt helt Tal, den nævnte Betingelse er altsaa altid opfyldt, naar vi sætte den lavere Integrationsgrænse lig $-\infty$. Derved bliver ogsaa

$$l\left(1+\frac{r}{2n}\right) = \int_{-\infty}^{-2n}\frac{r}{\beta(\beta-r)}d\beta = \int_{-\infty}^{-2n}\left(\frac{1}{\beta-r}-\frac{1}{\beta}\right)d\beta = \left[l\left(1-\frac{r}{\beta}\right)\right]_{-\infty}^{-2n}.$$

De fra Γ-Funktionen hidrørende Led i $f(x)$ kunne derfor fremstilles samlede under Formen

$$f_3 = -\Sigma_n\int_{-\infty}^{-2n}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta.$$

Men nu er

$$\int_{-\infty}^{-2n}\frac{x^\beta}{\beta}d\beta = \int_{-\infty}^{-2n}d\beta\int_{\infty}^{x}x^{\beta-1}dx = \int_{\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{-2n}x^{\beta-1}d\beta = \int_{\infty}^{x}\frac{x^{-2n-1}}{lx}dx = -\int_{x}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{xlx}dx.$$

Følgelig erholdes endelig, idet $x>1$,

$$f_3 = \sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{x}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{xlx}dx = \int_{x}^{\infty}\frac{1}{xlx}\Sigma x^{-2n}dx = \int_{x}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)x\,lx}.$$

Man ser umiddelbart, at dette Integral aftager stærkt, naar x voxer, og dets Indflydelse ved Bestemmelsen af $f(x)$ bliver derfor af ringe Betydning. For $x = 2$ angiver Oppermann [1]), at dets Værdi er omtrent $\frac{1}{7}$, det kan derfor, naar $x > 2$, aldrig faa nogen større Værdi end denne og spiller kun en Rolle, for saa vidt vi tage $x < 2$.

Vi komme dernæst til det vigtigste af de i Formlen for $ls(r)$ indgaaende Led, nemlig $-l(r-1)$. Det tilsvarende Led i $f(x)$ bliver

$$f_2 = \frac{1}{2\pi l x}\int x^r D_r \frac{1}{r}\, l(r-1)\, dz.$$

Dette kan behandles paa lignende Maade som de tilsvarende Integraler ovenfor. Betragter man nemlig det almindelige Integral

$$B(x) = \int x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right) dz,$$

saa er, idet β antages at være uafhængig af r,

$$\frac{dB(x)}{d\beta} = \int x^r D_r \frac{1}{r} \cdot \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, dz = \frac{1}{\beta}\int \frac{x^r}{(r-\beta)^2}\, dz = 2\pi l x \cdot \frac{x^\beta}{\beta},$$

for saa vidt den reelle Del af $r-\beta$ er positiv. Naar nu $B(x)$ heraf bestemmes som

$$\frac{B(x)}{2\pi l x} = \int_g^1 \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta,$$

saa maa altsaa den lavere Grænse g og Integrationsvejen bestemmes saaledes, at den reelle Del af $r-\beta$ stedse er positiv, og at samtidig ved at benytte den samme Integrationsvej

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, dz = l(r-1).$$

Men nu er

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, d\beta = \int_g^1 \left(\frac{1}{r-\beta} - \frac{1}{\beta}\right) d\beta = \left[l(r-\beta) - l\beta\right]_g^1 = \left[l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right)\right]_g^1 = l(r-1) - l\left(\frac{r}{g} - 1\right).$$

For at det sidste Led skal forsvinde, maa mod g være uendelig. Dette kan ikke ske derved, at man sætter $g = +\infty + bi$, da den reelle Del af g maa være mindre end den reelle Del af r.

Man kan heller ikke give g en negativ uendelig reel Værdi, eftersom man da, hvorledes end Integrationsvejen lægges, vilde faa indført i $l(r-1)$ et imaginært Led $\pm\pi i$.

---

[1]) Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabs Selskabs Forh. 1882, S. 178.

Tænke vi os nemlig Integralet $\int_{-\infty}^{1} \frac{-r d\beta}{\beta(r-\beta)}$ delt i de tre Dele $\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{-\rho}^{+\rho} + \int_{\rho}^{1}$, hvor Integrationsvejen i det første og sidste er retlinet og for det sidste en Halvcirkel med den uendelig lille Radius ρ, saa give det første og sidste Integral tilsammentagne den reelle Værdi

$$l\left(\frac{r}{-\rho}-1\right) - l\left(\frac{r}{-\infty}-1\right) + l(r-1) - l\left(\frac{r}{\rho}-1\right) = l\left(\frac{\frac{r}{-\rho}-1}{\frac{r}{-\infty}-1} \cdot \frac{r-1}{\frac{r}{+\rho}-1}\right)$$

$$= l\,\frac{(r+\rho)(r-1)}{(r-\rho)\left(\frac{r}{\infty}+1\right)} = l(r-1), \quad \text{for } \rho = 0.$$

Det mellemste Integral giver, eftersom Integrationsvejen vælges saaledes, at Polpunktet $\beta = 0$ omgaas ved at integrere gjennem positive eller negative Buer φ, henholdsvis, idet $\beta = \rho e^{i\varphi}$,

$$\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{-r d\beta}{\beta(r-\beta)} = -\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{1}{\beta} d\beta = -i\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = -\pi i \quad \text{eller ogsaa} \quad = -i\int_{\pi}^{0} d\varphi = +\pi i.$$

Det imaginære Led kan altsaa ikke undgaas. Alligevel kunne vi bruge $-\infty$ som lavere Grænse, idet Middeltallet mellem de to sidste Integraler er lig Nul. Vi kunne derfor skrive $l(r-1)$ som den halve Sum af to Integraler

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{-r d\beta}{\beta(r-\beta)},$$

idet vi vælge Integrationsvejen forskjellig for de to Integraler. Men dette vil ikke sige andet, end at vi ved Integrationen helt bortkaste det singulære Integral, som hidrører fra det uendelige Element for $\beta = 0$. Man kunde ogsaa, som Riemann gjør, vælge den lavere Grænse som $g = \pm\infty i$ med passende Valg af Integrationsvejen.

Hvad enten man gaar frem paa den ene eller den anden Maade, skal Integrationen ved Bestemmelsen af $B(x)$ udføres paa samme Maade, og vi faa altsaa

$$\frac{B(x)}{2\pi lx} = \int_{-\infty}^{1} \frac{x^{\beta}}{\beta} d\beta,$$

hvor Integrationen kan udføres ved simpelthen at indsætte Grænserne i det ubestemte Integral, idet man bortkaster det singulære Integral for $\beta = 0$. Ændre vi dette Integral ved Substitutionen $x^{\beta} = z$, $\beta = \frac{lz}{lx}$, $d\beta = \frac{1}{z lx} dz$, saa faas

$$f_2 = \frac{B(x)}{2\pi lx} = \int_{0}^{x} \frac{dz}{lz} = \int_{0}^{x} \frac{dx}{lx} = Li(x),$$

idet det sidste Integral med Bortkastelse af det singulære Integral netop er Integrallogarithmen til x, saaledes som denne sædvanlig defineres.

Vi se altsaa, at Leddet $-l(r-1)$ medfører Indbringelsen af Integrallogarithmen i $f(x)$. Funktionen $Li(x)$ kan som bekjendt fremstilles ved Rækken

$$Li(x) = C + llx + \frac{lx}{[1]} + \frac{(lx)^2}{2.[2]} + \frac{(lx)^3}{3.[3]} + \frac{(lx)^4}{4.[4]} + \cdots \tag{75}$$

Det fortjener at bemærkes, at af Leddene i denne Række hidrøre alle de, som indeholde Potenser af lx fra $-l\left(1-\frac{1}{r}\right)$. Sætter man nemlig $-l(r-1) = -lr - l\left(1-\frac{1}{r}\right)$ og indfører hvert af disse Led i det Riemann'ske Integral, saa kan $l\left(1-\frac{1}{r}\right)$ udvikles i Række efter Potenser af $\frac{1}{r}$. Divideres med r og differentieres, saa giver den saaledes fremkomne Række ved Integration Led for Led netop de Led af Integrallogarithmen, som indeholde Potenser af lx. De to første maa da hidrøre fra $-lr$, altsaa maa man have

$$\frac{1}{2\pi lx}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r\left(\frac{1}{r}lr\right)dz = C + llx. \tag{76}$$

Vi komme endelig til det sidste Led i Formlen for $ls(r)$, nemlig det, som indeholder $\Sigma\alpha$. Leddene i denne Sum kunne nu behandles ganske paa samme Maade som de tidligere, idet de opfattes som specielle Tilfælde af den almindelige Form

$$B(x) = \int x^r D_r \frac{1}{r} l\left(1-\frac{r}{\beta}\right)dz = 2\pi lx \int_g^\beta \frac{x^\beta}{\beta}\,d\beta.$$

hvor for β sættes $\frac{1}{2} \pm \alpha i$. Som lavere Integrationsgrænse kan ogsaa her vælges $g = -\infty$, naar Integrationen udføres ganske som i forrige Tilfælde. Det i $B(x)$ optrædende Integral ændres ved at sætte $x^\beta = z$ til Formen

$$\int_0^{x^\beta} \frac{dz}{lz} = Li(x^\beta).$$

Herefter blive altsaa to sammenhørende Led i $f(x)$, som afhænge af samme α,

$$-\left(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right),$$

og hele den fra $\Sigma\alpha$ hidrørende Del af $f(x)$

$$f_4 = -\Sigma\alpha\left(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right).$$

Den endelige Form for Riemann's Formel bliver herefter

$$f(x) = Li(x) - \Sigma\alpha\left(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{xlx} - l2, \tag{77}$$

som kun afviger fra Riemann's Resultat ved, at Konstanten er $-l2$ ligesom hos Genocchi, i Stedet for $l\xi(0)$.

Selv en meget flygtig Sammenligning med de optalte Primtalmængder viser, at det første Led i denne Formel særdeles nøje fremstiller Funktionen $\vartheta(x)$. Afvigelserne mellem $\vartheta(x)$ og $Li(x)$ maa altsaa navnlig tilskrives det periodiske Led Σ_α. Da vi ikke kjende Rødderne α, er det ikke muligt af Formlen at slutte noget bestemt om Størrelsen af disse Afvigelser, men det vil i hvert Fald være gavnligt at se, under hvilke forskjellige Former dette periodiske Led kan fremstilles.

Da vi fik et af de i denne Sum indgaaende Led under Formen $\int_0^{x^\beta} \frac{dz}{lz}$, saa kan dette ændres ved at sætte $z = y^\beta$. Derved faas

$$Li(x^\beta) = \int_0^x \frac{y^{\beta-1}}{ly}\,dy = \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{lx}\,dx.$$

Indføres heri $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ for β og tages to sammenhørende Led, faas disses Sum at være

$$\int_0^x \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+\alpha i}}{lx} + \frac{x^{-\frac{1}{2}-\alpha i}}{lx} \right) dx = 2\int_0^x \frac{\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}\,dx,$$

saa at altsaa de periodiske Led ogsaa kunne skrives under Formen

$$-2\Sigma_\alpha \int_0^x \frac{\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}\,dx, \quad \text{eller som} \quad -2\int_0^x \frac{\Sigma\cos(\alpha lx)}{\sqrt{x}\,lx}\,dx, \tag{78}$$

hvis Rækken $\Sigma\cos(\alpha lx)$ er konvergent. Under denne Forudsætning vilde da, hvis M var den største positive eller negative Værdi, som Rækken $\Sigma\cos(\alpha lx)$ kunde antage, de periodiske Leds Sum være beliggende mellem Grænserne $\pm M.2Li(x^{\frac{1}{2}}) = \pm M.2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}\,lx}$.

En anden Form for Summen Σ_α faas ved at bemærke, at man ved Bestemmelsen af $B(x)$ kan vælge den lavere Integrationsgrænse g som $a \pm \infty i$, hvor a er en reel endelig Størrelse, specielt $\frac{1}{2}$. Man kan derfor skrive to sammenhørende Led under Formen

$$-\left(\int_{\frac{1}{2}+\infty i}^{\frac{1}{2}+\alpha i} \frac{x^\beta}{\beta}\,d\beta + \int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}-\alpha i} \frac{x^\beta}{\beta}\,d\beta \right) = -\left(i\int_\infty^a \frac{x^{\frac{1}{2}+ti}}{\frac{1}{2}+ti}\,dt - i\int_\infty^a \frac{x^{\frac{1}{2}-ti}}{\frac{1}{2}-ti}\,dt \right) = ix^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty \left(\frac{x^{ti}}{\frac{1}{2}+ti} - \frac{x^{-ti}}{\frac{1}{2}-ti} \right) dt$$

$$= ix^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty \frac{(\frac{1}{2}-ti)x^{ti} - (\frac{1}{2}+ti)x^{-ti}}{\frac{1}{4}+t^2}\,dt = x^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty \frac{2t\cos(tlx) - \sin(tlx)}{\frac{1}{4}+t^2}\,dt,$$

saa at Summen af de periodiske Led antager Formen

$$\sqrt{x}\,\Sigma_\alpha \int_a^\infty \frac{2t\cos(tlx) - \sin(tlx)}{\frac{1}{4}+t^2}\,dt. \tag{79}$$

Ogsaa heraf synes det rimeligt, at disse Leds Sum maa være beliggende indenfor Grænser, som væsentlig ere proportionale med $\sqrt{x}$.

Vi se saaledes, at Riemann's Fremgangsmaade virkelig er i Stand til at lede til et exakt Udtryk for Primtalmængden og tilmed, hvad man a priori aldeles ikke var berettiget til at vente, i en saadan Form, at i et enkelt Led Integrallogarithmen træder frem som en kontinuerlig Tilnærmelsesformel, hvis Afvigelser fra den søgte Funktion $\vartheta(x)$ tydelig fremtræde under en saadan periodisk Form, at de, hvis en nøjere Beregning af dem var mulig ved Hjælp af selve Formlen, vilde vise sig snart at være positive, snart negative. Men en Beregning af de periodiske Led ved Hjælp af Formlen lader sig naturligvis ikke iværksætte, saa længe Størrelserne α ere ubekjendte, og selv om de kjendtes, vilde de periodiske Led fremtræde i Form af en Række, der skulde fremstille en meget variabel diskontinuert Funktion. Rækken maatte i hvert Fald blive uendelig og uden Tvivl saa lidet konvergent, at den ikke kunde bruges til nogen numerisk Beregning. Derimod kunde det tænkes muligt at omdanne Rækken til andre Funktionsformer, som tilstedte en saadan eller ialfald en Bestemmelse af Grænser, indenfor hvilke Værdien af de periodiske Led maatte være beliggende.

Det er med Hensyn til Bedømmelsen af Muligheden af saadanne Transformationer af stor Interesse, at man er i Stand til at fremstille $f(x)$ under en anden med den forrige noget beslægtet Form, som ganske vist paa en vis Maade ikke giver noget reelt Udbytte, men som dog giver et Indblik i forskjellige Forhold, som Riemann's Formel ikke giver nogen Oplysning om, saa længe Størrelserne α ere ubekjendte.

Det vil erindres, at det ved Bestemmelsen af det Riemann'ske Integral særlig kom an paa at fremstille $s(r)$ i Form af et Produkt af Faktorer. — For at kunne udføre Integrationen Led for Led vil det imidlertid ogsaa være fuldstændig nok, hvis $\frac{1}{s(r)} = \Pi(1-p^{-r})$ kan fremstilles paa denne Maade, og naar man kun vil have $\vartheta(x)$ for en vilkaarlig valgt endelig Grænse x, saa vil det være fuldt tilstrækkeligt, hvis Produktet af Faktorerne $1-p^{-r}$, taget for alle Primtal op til en vilkaarlig valgt Grænse $\gamma \gtrless x$, kan udtrykkes som et Produkt af lineære Faktorer $(ar+b)$. Thi naar Summen $\sigma(r) = 1^{-r} + 2^{-r} + 3^{-r} \ldots + n^{-r} + \ldots$, hvor n betegner alle de Tal, som kun indeholde Primfaktorer $\lessgtr \gamma$, indsættes i det Riemann'ske Integral, saa faas alligevel som Resultat $\frac{1}{2}(\vartheta(x+0) + \vartheta(x-0))$ saalænge $x \lessgtr \gamma$.

Det er i Virkeligheden ikke vanskeligt at fremstille $\frac{1}{\sigma(r)}$ under Form af et Produkt. Som bekjendt er nemlig Produktudviklingen for $\sin z$ ogsaa gjældende for komplexe z, altsaa er

$$e^z - e^{-z} = 2z \,.\, \Pi_m\left(1 + \frac{z^2}{m^2\pi^2}\right) \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots \infty).$$

Sætter man heri $z = \frac{1}{2}rlp$, faas efter Division med e^z

$$1 - p^{-r} = rlp \,.\, p^{-\frac{r}{2}} \prod_1^\infty\left(1 + \left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right), \qquad (80)$$

og altsaa, naar man heri efterhaanden sætter p = alle Primtal $\leqq \gamma$, samt γ antages > 1,

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \Pi_p \left(rlp \,.\, p^{-\frac{r}{2}}\right) \Pi_p \overset{\infty}{\Pi_1}_m \left(1 + \left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right). \tag{81}$$

Følgelig faas ved paa begge Sider at tage Logarithmen

$$-l\sigma(r) = \Sigma llp + \theta(\gamma) lr - \frac{r}{2} \Sigma lp + \Sigma_p \Sigma_m l\left(1 + \left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right). \tag{82}$$

Ogsaa her fremtræder der et Udtryk for $l\sigma(r)$, hvis enkelte Led, indsatte i Integralet (67),

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi lx} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \left(\frac{1}{r} l\sigma(r)\right) dz,$$

kunne integreres.

At gjennemgaa Udførelsen en detail vil efter det foregaaende være overflødigt, vi kunne nøjes med at anføre Resultatet, som bliver

$$f(x) = -\overset{\gamma}{\underset{2}{\Sigma}} llp + \theta(\gamma)\,(C + llx) - \Sigma_p \Sigma_m \left(Li\, x^{\frac{2m\pi i}{lp}} + Li\, x^{-\frac{2m\pi i}{lp}}\right), \tag{83}$$

eller ved Omdannelse af de imaginære Integrallogarithmer

$$f(x) = -\overset{\gamma}{\underset{2}{\Sigma}} llp + \theta(\gamma)\,(C + llx) - 2\Sigma \int_0^x \frac{\cos\left(2m\pi \frac{lx}{lp}\right)}{xlx}\, dx, \tag{84}$$

idet der summeres først med Hensyn til m og dernæst med Hensyn til p, $(p \leqq \gamma)$.

Vi have her faaet en Formel, som vel viser en vis Analogi med den Riemann'ske, men dog væsentlig adskiller sig fra denne ved sin aabenbart mere identiske Karakter. Vi skulle ikke opholde os ved at prøve paa at transformere den her optrædende Integralsum, saaledes at Identiteten træder tydelig frem, men nøjes med at henvise til en analog Formel i det følgende, som er lettere at behandle (se nedenfor § 7).

Paa dette Sted have vi kun anført denne Formel, fordi den giver et gavnligt Vink om, i hvilken Retning man skal søge for at komme efter de virkelige Værdier af Rødderne α. Om end det ikke kan ventes, at disse skulle faa samme Form som de her indgaaende Argumenter $\frac{2m\pi}{lp}$, saa er det dog højst rimeligt, at de maa afhænge dels af Primtallenes Logarithmer, dels af en Række hele Tal ligesom hine.

Det ligger nær at formode, at man ved Anvendelsen af andre diskontinuerte bestemte Integraler end det, der ligger til Grund for hele denne Undersøgelse, maatte kunne erholde andre Former, som muligvis gave bedre Resultater end dette. Men dette er ikke Tilfældet. Alle de, vi have forsøgt, vise sig at frembyde enten ganske de samme eller endog større Vanskeligheder, og altid viser det sig nødvendigt at foretage en Omdannelse af Funktionen $s(r)$, da man i alt Fald paa dette Standpunkt udelukkende er henvist til denne som den

eneste kontinuerte Funktion, som staar i umiddelbar Forbindelse med Primtalrækken. Vi faa ganske vist senere en anden Funktion, som frembyder noget lignende, nemlig log. $\Gamma(x)$, men denne Forbindelse finder kun Sted for hele Værdier af x. Denne Funktion synes derfor ikke at kunne benyttes paa lignende Maade som $s(r)$, medens den derimod spiller en fremtrædende Rolle ved de rent numeriske Undersøgelser, som vi beskjæftige os med i et senere Afsnit af denne Afhandling.

Efter at man ved Beregning af Riemann's Integral har fundet et Udtryk for $\vartheta(x)$, kan selve Antallet af Primtal $\theta(x)$ findes ved Hjælp af Möbius's Faktorer, idet man ved Omvending af Ligningen

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$$

erholder

$$\theta(x) = \vartheta(x) - \tfrac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}\vartheta(x^{\frac{1}{5}}) \ldots = \Sigma \frac{1}{m}\mu(m)\vartheta\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

Sætter man altsaa for $\vartheta(x)$ det fundne Udtryk efter Riemann's Formel, saa faas, idet $F(x)$ betegner en Funktion, som er lig $\frac{1}{2}(\theta(x-0) + \theta(x+0))$,

$$F(x) = \Sigma \frac{1}{m}\mu(m) f\left(x^{\frac{1}{m}}\right). \tag{85}$$

For saa vidt man havde Riemann's Formel i en saadan Skikkelse, at en korrekt Beregning af $f(x)$ lod sig udføre, saa vilde man ved den numeriske Bestemmelse af $\theta(x)$ for et enkelt x lettest kunne udføre denne ved alene at søge $\vartheta(x)$ ved Formlen og finde de andre Led ved Optællinger i Primtaltavlerne, for saa vidt disse vare tilstrækkelig omfattende.

Skal man derimod have et analytisk Udtryk for $F(x)$, saa har man for $f(x)$ at indsætte det fundne Udtryk (77). Det vigtigste Led i dette er Leddet $Li(x)$, som altsaa i $F(x)$ vilde give det tilsvarende Led

$$F_1(x) = Li(x) - \tfrac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \ldots = \sum_1^\infty \frac{1}{m}\mu(m)\, Li\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

hvor Summen kan udstrækkes fra $m = 1$ til $m = \infty$. Men nu bestaar $Li(x)$ af $C + lx +$ en Række, der skrider frem efter Potenser af lx. Betegnes denne Række ved $A(x)$, saa faas altsaa

$$F_1(x) = \Sigma \frac{1}{m}\mu(m).C + \Sigma \frac{1}{m}\mu(m)\, l\frac{lx}{m} + \Sigma \frac{1}{m}\mu(m)\, A\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

Det sidste Led giver en Række, hvis Koefficienter umiddelbart kunne bestemmes ved Hjælp af (41), og man faar, naar denne Række betegnes ved Funktionstegnet $P(x)$,

$$P(x) = \frac{lx}{[1].1s_2} + \frac{(lx)^2}{[2].2s_3} + \frac{(lx)^3}{[3].3s_4} + \frac{(lx)^4}{[4].4s_5} + \ldots \tag{86}$$

Hvad de to første Led angaar, saa give disse, under Forudsætning af Rigtigheden af Formlerne (28) og (33),

$$\Sigma \frac{1}{m}\mu(m).C + \Sigma \frac{1}{m}\mu(m).llx - \Sigma \frac{1}{m}\mu(m)lm = 0.C + 0.llx + 1,$$

saa at man erholder som svarende til Leddet $Li(x)$ et Led i Formlen for $\theta(x)$ af Formen $1 + P(x)$.

Ligeledes ses, at det konstante Led $-l2$ i Formlen for $F(x)$ vil optræde multiplicceret med $\Sigma \frac{1}{m}\mu(m)$ og altsaa helt vil forsvinde.

Tilbage bliver derefter det Led, som indeholder de imaginære Integrallogarithmer, samt Leddet $\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{xlx}$. Dette sidste Led giver Anledning til det nye Led i $F(x)$

$$F_3(x) = \sum_1^\infty \frac{\mu(m)}{m}\int_{x^{\frac{1}{m}}}^\infty \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{yly}.$$

Sætter man i ethvert af de her optrædende Integraler $y = z^{\frac{1}{m}}$, altsaa $ly = \frac{1}{m}lz$, $dy = \frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}dz$, faas

$$\int_{x^{\frac{1}{m}}}^\infty \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{yly} = \int_x^\infty \frac{1}{\left(z^{\frac{2}{m}}-1\right)}\frac{dz}{zlz},$$

saa at man vilde faa en Række af Formen

$$F_3(x) = \sum_1^\infty \frac{\mu(m)}{m}\int_x^\infty \frac{1}{\left(x^{\frac{2}{m}}-1\right)}\frac{dx}{xlx} = \int_x^\infty \sum \frac{\mu(m)}{m}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{m}}-1}\cdot\frac{dx}{xlx}.$$

Indflydelsen af dette Led kan altsaa ikke bedømmes, da dertil vilde kræves et nøjere Kjendskab til Rækker, hvis Koefficienter indeholde Faktorerne μ, og det lønner sig heller ikke at undersøge dette Led særskilt, da det er muligt, at det bør betragtes i Forbindelse med Leddene $\Sigma\alpha$, hvis tilsvarende Led i F heller ikke lade sig undersøge, saa længe man ikke kjender Rødderne α.

Men saameget kunne vi betragte som sikkert, at for saa vidt vi som Tilnærmelsesformel for $\vartheta(x)$ opstille Formlen

$$\vartheta(x) = Li(x) - C - llx,$$

saa faa vi som tilsvarende til denne Tilnærmelsesformlen

$$\theta(x) = P(x), \tag{87}$$

og selv om vi medtage de to bortkastede Led i Integrallogarithmen, hvis Indflydelse, naar

undtages den aller første Del af Talrækken, er ringe, saa medfører dette kun, at man faar

$$\theta(x) = P(x) + 1. \qquad (87')$$

Hvilken af disse to Formler som rettest bør benyttes, ses ved Sammenligning med de sande Værdier af $\theta(x)$; og den vedføjede Tabel VI viser tydelig, at naar undtages $x < 3$, saa giver den sidste Formel øjensynlig den bedste Overensstemmelse, og vi adoptere derfor denne (87') som den endelige Form for en Tilnærmelsesformel for $\theta(x)$.

I Virkeligheden er $P(x)+1$ altsaa kun en anden Form af den kontinuerlige Del af Riemann's Formel, specielt af det Led, som fremstilles ved $Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) \ldots$, men den besidder fremfor denne den Fordel at have Formen af en konvergent Række, som i hvert enkelt Tilfælde direkte lader sig beregne Led for Led. Tilmed er Rækkens Form ikke uden Interesse, navnlig fordi den i Koefficienterne indeholder Funktioner af Primtallene. Det ligger ret nær at formode, at det kunde være muligt for at faa et exakt Udtryk for $\theta(x)$ at erstatte de i Nævnerne optrædende Funktioner $s(r)$ ved andre med disse analoge, men afhængige alene af Primtallene op til x og altsaa diskontinuerte.

Da det maatte være af særlig Betydning at gjøre Beregningen af Funktionen $P(x)$ saa let og bekvem som mulig, besluttede jeg, efter at have fundet dens Fremstilling ved Rækken (86), at forsøge Beregningen af en Tavle over saamange Værdier af den, at en Sammenligning mellem $\theta(x)$ og $P(x)$ indenfor de Grænser, for hvilke $\theta(x)$ var bestemt ved Primtaloptællinger, kunde beregnes ved simpel Interpolation, saaledes at man i det mindste erholdt en rigtig Decimal. Til dette Øjemed beregnedes da først den i Tab. II meddelte Tavle over Integrallogarithmen og ved Hjælp af denne Værdier af Funktionen $P(x)$ paa den Maade, som nedenfor er angivet i Forklaringen til denne Tavle. Da det imidlertid derved viste sig, at Interpolationen, forsaavidt $l.x$ toges til Argument, var langt simplere for Funktionen $\log. P(x)$ end for selve $P(x)$, saa er i Tavle III $\log. P(x)$ taget som det principale, medens de anførte Værdier af selve $P(x)$ kun ere tilføjede af Hensyn til Kontrollen og Bedømmelsen af den Maade, hvorpaa Tavlen er beregnet. — Det bør endnu tilføjes, at de Tilnærmelsesværdier for $\theta(x)$, som beregnes ved denne Tavle, forsaavidt jeg har undersøgt Sagen, stemme saa godt overens med de af Glaisher[1]) angivne, som det kunde ventes. — Selv om der altsaa kan rejses Tvivl om den formelle Rigtighed af Udledelsen af de Sætninger af Möbius, paa hvilke Beviset for Formlen $\theta(x) = P(x) + 1$ beror, saa vil der dog sikkert ikke kunne være Tvivl om den reelle Gyldighed af disse Formler.

Det vil af det foregaaende være klart, at der med Hensyn til den korrekte numeriske Beregning af Primtalmængden op til en vis Grænse ikke er vundet noget ved Riemann's Formel. Men ikke desto mindre have hans Under-

[1]) James Glaisher, Factor Table for the sixth Million. London 1883.

søgelser bragt et væsentligt Fremskridt i vort Kjendskab til Loven for Primtallenes Fordeling, idet han er naaet til at angive Formen af den Funktion, som skal bruges til at udtrykke Loven for Mængden af dividerede Primtalpotenser op til Grænsen x. Da Differentialkvotienten af det dominerende Led $Li(x)$ i Riemann's Formel for $\vartheta(x)$ er $\frac{1}{lx}$, saa lærer denne Formel os endvidere, at det ikke, som Gauss antog, er Tætheden af selve Primtallene, som gjennemsnitlig er omvendt proportional med lx, men at dette derimod er Tilfældet med, hvad man med en analog Betegnelse kunde kalde Tætheden af dividerede Primtalpotenser.

Men trods dette synes dog det Held, Riemann har haft med sine Undersøgelser i denne Retning, at være af en noget tilfældig Natur. Det beror udelukkende paa den særlig hensigtsmæssige Form, det er lykkedes ham at give Funktionen $ls(r)$, og da atter paa, at Leddet $l(r-1)$ udsondrer sig fra alle de andre og bliver af dominerende Betydning. At dette maatte blive Tilfældet, er ikke ganske klart, selv om den Side 10 anførte Formel af Dirichlet, $s(1+\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{(\rho)}{\rho}$, som Mertens og tildels ogsaa Tchebycheff have benyttet ved deres Undersøgelser, nok kunde tyde paa noget saadant. Men selv om det ogsaa vil lykkes ved fortsatte Studier at komme til fuld Klarhed over denne Udvikling og over de i Riemann's Formel indgaaende Rødder α, saa synes det dog, som om den Form, hvorunder disse indgaa i den endelige Formel, i høj Grad maatte vanskeliggjøre igjennem denne nogensinde at naa til en nøjagtig Beregning af Mængden af Primtal op til en given Grænse, og stiller man sig altsaa dette Formaal, saa vil man derfor vistnok endnu i lang Tid være henvist til Beregninger af rent taltheoretisk Natur.

---

§ 4. Ufuldstændige Kvotienter. Theoremer af Berger og Césaro.

I det følgende betegner n gjennemgaaende et konstant helt Tal; det største hele Tal i Kvotienten $\frac{n}{x}$ betegnes efter Legendre ved Symbolet $E\frac{n}{x}$ eller $E\left(\frac{n}{x}\right)$, saa at altsaa

$$E\frac{n}{x} \leqq \frac{n}{x} < E\frac{n}{x} + 1 \quad \text{eller} \quad \frac{n}{x} - 1 < E\frac{n}{x} \leqq \frac{n}{x}. \tag{88}$$

Om saadanne ufuldstændige Kvotienter lader der sig angive forskjellige mærkelige Sætninger.

Betragte vi Talrækken

$$E\frac{n}{1},\ E\frac{n}{2},\ E\frac{n}{3} \ldots E\frac{n}{a},$$

hvor 1, 2, 3 ... a ere de hele Tal op til a inklusive, saa danne de enkelte Led en Række

aftagende hele Tal. Nogle af disse kunne være lige store, og det er let at angive, hvor mange der ere lig et givet helt Tal x.

Thi den største Nævner, som ved Division i n giver den ufuldstændige Kvotient x, maa være det største hele Tal, som fremkommer ved Division af n med x, altsaa $E\frac{n}{x}$; ligesaa er den største Nævner, som giver Kvotienten $x+1$, Tallet $E\frac{n}{x+1}$. De Tal i Rækken, som ere lig x, ere altsaa i Almindelighed de, hvis Nævnere ere Tallene

$$E\frac{n}{x+1}+1,\ E\frac{n}{x+1}+2,\ \ldots\ E\frac{n}{x},\ \text{i Antal}\ E\frac{n}{x}-E\frac{n}{x+1}\ .$$

Dette behøver dog ikke at være Tilfældet for de sidste Led i Rækken. Men betegnes $E\frac{n}{a}$ ved q, saa ses let, at Antallet af Brøker, som ere lig med q, vil være $a-E\frac{n}{q+1}$.

Betragte vi dernæst, idet F betegner en vilkaarlig Funktion, Summen

$$S=\sum_1^a{}_x F\left(E\frac{n}{x}\right)=F\left(E\frac{n}{1}\right)+F\left(E\frac{n}{2}\right)+F\left(E\frac{n}{3}\right)+\ldots F\left(E\frac{n}{a}\right), \qquad (89)$$

saa maa denne aabenbart kunne ændres til Formen

$$S=A_0F(q)+A_1F(q+1)+\ldots A_nF(n),$$

hvor $A_0, A_1\ldots$ betegne konstante Koefficienter, som angive, hvormange af Funktionerne $F\left(E\frac{n}{x}\right)$ der blive lig henholdsvis $F(q)$, $F(q+1)$ o. s. v. Men disse Antal ere angivne ovenfor, og man faar altsaa

$$S=\left(a-E\frac{n}{q+1}\right)F(q)+\left(E\frac{n}{q+1}-E\frac{n}{q+2}\right)F(q+1)\ldots+\left(E\frac{n}{n-1}-E\frac{n}{n}\right)F(n-1)+F(n), \qquad (90)$$

der ogsaa kan skrives

$$S=aF(q)+E\frac{n}{q+1}(F(q+1)-F(q))+E\frac{n}{q+2}(F(q+2)-F(q+1))+\ldots E\frac{n}{n}(F(n)-F(n-1)).$$

Sættes specielt $a=n$, faas de to Formler

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{x}\right)=\sum_1^n\left(E\frac{n}{x}-E\frac{n}{x+1}\right)F(x) \qquad (91)$$

og

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{x}\right)=nF(1)+\sum_2^n(F(x)-F(x-1))E\frac{n}{x}\ . \qquad (92)$$

Paa denne Maade er Formlen angivet af Césaro [1]; den almindeligere Sætning

$$\sum_1^a F\left(E\frac{n}{x}\right)=aF(q)+\sum_{q+1}^n(F(x)-F(x-1))E\frac{n}{x} \qquad (93)$$

skyldes i denne Form Berger [2].

---

[1] Formule d'arithmétique, Mathesis, T. II, p. 97.

[2] Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres, Nova Acta Rge. Soc. Scientiarum Upsaliensis Ser. III, Vol. XI, 1881.

Særlig mærkes Tilfældet $a = E\sqrt{n}$. Da man altid maa have

$$n \leqq (E\sqrt{n}+1)^2 - 1,$$

saa faas

$$E\sqrt{n} \leqq \frac{n}{E\sqrt{n}} \leqq E\sqrt{n}+2,$$

saa at altsaa $q = E\frac{n}{a}$ maa være et af Tallene a, $a+1$, $a+2$. Men betragtes Rækken

$$aF(a) + E\frac{n}{a+1}(F(a+1) - F(a)) + E\frac{n}{a+2}(F(a+2) - F(a+1)) + \text{ o. s. v.},$$

saa ses, at hvis $q = a+1$, saa kan man sammendrage de to første Led til $aF(q)$, og hvis $q = (a+2)$, kan det samme gjøres med de tre første Led. Denne Række bliver derfor identisk med $aF(q) + \sum_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))E\frac{n}{x}$, saaledes at man for $q = E\sqrt{n}$ altid vil have

$$\sum_{1}^{q} F\left(E\frac{n}{x}\right) = qF(q) + \sum_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))E\frac{n}{x}. \tag{94}$$

Sætter man $F(x) - F(x-1) = f(x)$, faas

$$\sum_{q+1}^{n} f(x)E\frac{n}{x} = \sum_{1}^{q} F\left(E\frac{n}{x}\right) - qF(q), \tag{95}$$

og adderes paa begge Sider $\sum_{1}^{q} f(x)E\frac{n}{x}$, saa findes endelig, som angivet af Berger,

$$\sum_{1}^{n} f(x)E\frac{n}{x} = \sum_{1}^{q} f(x)E\frac{n}{x} + \sum_{1}^{q} F\left(E\frac{n}{x}\right) - qF(q). \tag{96}$$

De angivne Formler tilstede en Udvidelse, som er værd at lægge Mærke til. Naar man nemlig i Stedet for at betragte en Række Brøker af Formen $E\frac{n}{x}$, hvor x ere alle hele Tal, lader x gjennemløbe en vilkaarlig valgt Række mærkelige Tal, som vi ville betegne ved z, iblandt disse (f. Ex. alle Primtal), og endvidere betegner ved $\Phi(x)$ Antallet af disse mærkelige Tal op til x inklusive, saa findes paa lignende Maade som ovenfor, at Antallet af Kvotienter $E\frac{n}{z}$, som netop ere lig x, i Almindelighed vil være $\Phi\left(\frac{n}{x}\right) - \Phi\left(\frac{n}{x+1}\right)$. Ved derefter at gjentage Ræsonnementet ganske paa lignende Maade som før faas følgende Relationer, svarende til (90) og (93):

$$\sum_{1}^{a} F\left(E\frac{n}{z}\right) = \left(\Phi(a) - \Phi\left(\frac{n}{q+1}\right)\right)F(q) + \sum_{q+1}^{n}\left(\Phi\left(\frac{n}{x}\right) - \Phi\left(\frac{n}{x+1}\right)\right)F(x), \tag{97}$$

og

$$\sum_{1}^{a} F\left(E\frac{n}{z}\right) = \Phi(a)F(q) + \sum_{q+1}^{n}(F(x) - F(x-1))\Phi\left(\frac{n}{x}\right). \tag{98}$$

Ved som før at sætte $q = E\sqrt{n}$ faas som svarende til (96), idet $F(x) - F(x-1) = f(x)$,

$$\sum_{1}^{n} f(x)\Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{1}^{q} f(x)\Phi\left(\frac{n}{x}\right) + \sum_{1}^{q} F\left(E\frac{n}{z}\right) - \Phi(q)F(q). \tag{99}$$

Ligeledes haves specielt for $a = n$

$$\sum_1^n F\left(E\frac{n}{z}\right) = \sum_1^n (F(x) - F(x-1))\,\Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(\Phi\left(\frac{n}{x}\right) - \Phi\left(\frac{n}{x+1}\right)\right) F(x). \quad (100)$$

Ved at specialisere Formen af de indgaaende Funktioner samt Rækken af Tallene z lader der sig af disse Ligninger udlede en Mængde forskjellige Relationer, som ofte ere af en meget overraskende Form. Skjønt det for det Problem, vi behandle, ikke er ganske nødvendigt at fremhæve mere end en enkelt af dem, tro vi dog, at en lidt fyldigere Udvikling vil være paa sin Plads, og vi give derfor nedenfor en Række Exempler paa deres Anvendelse paa Primtallene. Baade Berger og Césaro have gjort en udstrakt Brug af deres Sætninger til Bestemmelse af Funktioner af Tallenes Divisorer, den første Begyndelse til disse Undersøgelser er allerede gjort af Dirichlet[1]).

Betragter man nemlig Differensen

$$E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x},$$

saa ses, at dens Værdi vil være lig Nul, undtagen naar x er en Divisor i n, da den er lig 1. Betegner altsaa d en Divisor i n, saa vil, naar $f(x)$ er en vilkaarlig Funktion, haves

$$\Sigma_d f(d) = \sum_{x=1}^{x=n} \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right) f(x), \quad (101)$$

som ved Hjælp af Berger's Theorem i mange Tilfælde tilsteder en tilnærmet Bestemmelse af den symmetriske Funktion $\Sigma f(d)$, hvor Summen udstrækkes til alle Divisorer i Tallene op til n inklusive.

Hvis man f. Ex. vil have Antallet af alle disse Divisorer, saa sættes $f(d) = d^0 = 1$, og det søgte Antal faas da ved efterhaanden at sætte $n = 1, 2, 3 \ldots n$ og summere; det vil være

$$N = \Sigma d^0 = \sum_{n=1}^{n=n} \sum_{x=1}^{x=n} \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right) = \sum_{x=1}^{x=n} E\frac{n}{x} = E\frac{n}{1} + E\frac{n}{2} + E\frac{n}{3} + \ldots E\frac{n}{n}. \quad (102)$$

For dette Antal vil det være let at angive en Tilnærmelsesformel. Ved Hjælp af (96) faas nemlig, idet $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $q = E\sqrt{n}$,

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = 2 \cdot \sum_1^q E\frac{n}{x} - q^2 = 2n \sum_1^q \frac{1}{x} - q^2 - 2\delta q, \quad (103)$$

hvor δ er en ægte Brøk.

Men nu er, idet ε er en ægte Brøk,

$$\sum_1^q \frac{1}{x} = lq + C + \frac{1}{2q} - \frac{\varepsilon}{12q^2}.$$

---

[1]) Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie, Abhandlungen der Berliner Akademie 1849; og Ueber ein die Division betreffendes Problem, Monatsber. der Berl. Akad. Januar 1851; eller Crelle's Journal Bd. 47.

Betragter man alene de tre første Led, saa danne disse for $q > 1$ en stedse voxende kontinuert Funktion, og altsaa er

$$lq + C + \frac{1}{2q} < l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} < l(q+1) + C + \frac{1}{2(q+1)}.$$

Heraf faas atter

$$\sum_1^q \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{12q^2} < l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sum_1^q \frac{1}{x} + \frac{1}{q+1} + \frac{\varepsilon'}{12(q+1)^2},$$

eller

$$l\sqrt{n} + C + \frac{1}{2\sqrt{n}} > \sum_1^q \frac{1}{x} > l\sqrt{n} + C - \frac{\varepsilon''}{12n}.$$

Men nu er endvidere altid $\frac{n}{x} \geqq E\frac{n}{x} \geqq \frac{n+1}{x} - 1$, altsaa ogsaa

$$2n \sum_1^q \frac{1}{x} > 2 \sum_1^q E\frac{n}{x} > 2(n+1) \sum_1^q \frac{1}{x} - 2\sqrt{n},$$

og da fremdeles $$n - 2\sqrt{n} < q^2 \leqq n,$$

saa faas endelig for N følgende Grænser

$$nln + n(2C-1) + 3\sqrt{n} > \sum_1^n E\frac{n}{x} > nln + n(2C-1) - 3\sqrt{n}, \qquad (104)$$

idet vi af den lavere Grænse have bortkastet Leddene

$$ln + 2C - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\varepsilon''}{6n},$$

som tilsammen ville udgjøre en positiv Størrelse, naar $n > 2$.

Dette Resultat afviger lidt fra det, der angives af Berger, som sætter

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = nln + n(2C-1) \pm \lambda\sqrt{n}, \quad \text{hvor } \lambda < 4. \qquad (105)$$

De her angivne Grænser ere altsaa lidt snevrere end Berger's, men alligevel ere de vistnok videre end nødvendigt, da der ikke er taget Hensyn til den Omstændighed, at de forskjellige Rester $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$ i Virkeligheden ikke ville være uafhængige af hinanden.

(I Forbindelse hermed skal nævnes en interessant lille Sætning, som i en lidt anden Form skyldes Dirichlet. Er $\frac{1}{n}\sum_2^y E\frac{n}{x} = \varphi(y)$, saa er for $n = ab$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(ab). \qquad (106)$$

Den faas som en simpel Konsekvens af Formlen (93).)

Paa Grundlag af (96) findes, at naar n er et stort Tal, saa vil Middelværdien af Antallet af Divisorer i et Tal i Nærheden af n være $ln + 2C$. Ved en lignende Fremgangsmaade beviser Berger en hel Række lignende Sætninger, blandt hvilke vi skulle anføre følgende:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Middelværdien af } \Sigma d \text{ for et Tal i Nærheden af } n \text{ er} & \frac{\pi^2}{6} n, & \\ \text{—} \quad \text{-} \quad \Sigma \frac{1}{d} & \text{er } \frac{\pi^2}{6}, & \\ \text{—} \quad \text{-} \quad \Sigma ld & \text{er } \frac{1}{2}(ln)^2 + Cln, & \\ \text{—} \quad \text{-} \quad \Sigma a^d & \text{er } l\frac{1}{1-a}, \ 0 < a < 1, & \\ \text{—} \quad \text{-} \quad \Sigma \frac{1}{d+g} & \text{er } \frac{1}{g}\left(\frac{d.l\Gamma(g+1)}{dg} + C\right), \ g > -1, & \\ \text{—} \quad \text{-} \quad \Sigma d.l\left(1+\frac{1}{d}\right) & \text{er } ln + C. & \end{array}\right\} \quad (107)$$

Angaaende Beviserne for disse Sætninger og flere lignende henvises til den citerede Afhandling.

---

§ 5. Anvendelser paa Primtal.

Funktionen $E\frac{n}{x}$ egner sig paa Grund af sin diskontinuerte Karakter særlig til Anvendelse i Taltheorien, og flere Forfattere, blandt hvilke navnlig bør fremhæves Russeren Bougaïeff [1]), have ogsaa benyttet den ved taltheoretiske Undersøgelser. Skjønt disse endnu ikke synes direkte at ville lede til en kontinuert Tilnærmelsesformel for $\theta(x)$, saa kan dog denne Funktion udtrykkes exakt ved ufuldstændige Kvotienter, og Berger's Undersøgelser synes at angive en Vej, ad hvilken Tilnærmelsesformler derefter muligvis ville kunne opnaas. Det vil derfor være af Interesse at se i Sammenhæng de Resultater, hvortil Anvendelse af ufuldstændige Kvotienter fører.

Betegner man ved $\Phi_{(a,b,\ldots o,p)}(x)$ Antallet af Tal $\leqq x$, som ikke ere delelige med noget af Primtallene $a, b, \ldots o, p$, saa er almindelig

$$\Phi_{a,b,c,\ldots o,p}(x) = \Phi_{a,b,c,\ldots o}(x) - \Phi_{a,b,c,\ldots o}\left(\frac{x}{p}\right). \quad (108)$$

Denne Ligning udtrykker nemlig kun, at Antallet af Tal, som ikke ere delelige med noget af Primtallene op til p inklusive, findes ved blandt dem, der ikke ere delelige med Prim-

[1]) Se Darboux: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. T. 10, 1876, p. 13.

tallene $a, b, c \ldots o$, at udslette alle Multipla af p. Af denne Ligning findes nu sukcessive, idet $\Phi_2 = x - E\frac{x}{2}$, $\Phi_{2,3}(x) = x - E\frac{x}{2} - E\frac{x}{3} + E\frac{x}{6} \ldots$

og almindelig

$$\Phi_{a,b,c\ldots p}(x) = x - \Sigma E\frac{x}{a} + \Sigma E\frac{x}{ab} - \Sigma E\frac{x}{abc} + \ldots, \tag{109}$$

hvor der i Nævnerne findes alle Produkter af de givne Primtal tagne 1 Gang. Er specielt $a, b, c \ldots$ alle Primtal op til $\sqrt{x}$, saa vil denne Formel som bekjendt angive 1 + Antallet af Primtal mellem $\sqrt{x}$ og x. Betegne derimod $a, b, c \ldots$ alle Primtal, bliver venstre Side lig 1, og vi faa den Ligning, som er fremstillet i (46).

Paa Grund af Arbejdets Vidtløftighed vil en virkelig numerisk Beregning af $\theta(x) - \theta(x^{\frac{1}{2}})$ ved Formlen (109) være meget besværlig, men den kan gjøres og er i Virkeligheden udført af Meissel [1]).

En lignende Formel skal være benyttet af Hargreave [2]) og Piarron de Mondesir [3]), men intet af disse Forfatteres Arbejder har været mig tilgængeligt i den originale Skikkelse.

Den Sætning, som vi først skulle lægge til Grund ved de følgende Betragtninger, udtrykkes i Formlen

$$\sum_1^n \Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n E\frac{n}{z}. \tag{110}$$

Den faas af (100) ved at sætte $F(x) = Ex$. z betegner her en Række mærkelige Tal, og $\Phi(x)$ Antallet af disse op til x inklusive. Paa venstre Side summeres med Hensyn til x, paa højre Side med Hensyn til alle Tal $z \leqq n$.

Af denne Formel følger en Række Konsekvenser, som ialfald ere ret oplysende. F. Ex. $z = p$, Rækken af alle Primtal, giver

$$\theta(x) + \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p}; \tag{111}$$

$z = p^2$ giver

$$\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \theta\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p^2}; \tag{112}$$

$z = ab$, Produkt af to enkelte Primtal, giver, idet Antallet af saadanne op til x er $\theta_2(x)$,

$$\theta_2(n) + \theta_2\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_2\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{ab}. \tag{113}$$

---

[1]) Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen. Mathematische Annalen Bd. II, p. 636, jvfr. Bd. III, p. 523.

[2]) On the law of prime numbers. Philosophical Magazine Ser. 4, vol. VIII, 1854.

[3]) Annuaire de l'association française (Congrès du Havre 1877), jvfr. Nouv. Corresp. Math. VI, 1880, p. 256.

Ligesaa for $z = abc$

$$\theta_3(n) + \theta_3\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_3\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{abc}. \tag{114}$$

Betegner z alle «Primtalpotenser», d. e. Potenser af Primtal med hel Exponent (1 inkl.), faas, naar disses Antal betegnes ved $\not{p}(x)$,

$$\not{p}(n) + \not{p}\left(\frac{n}{2}\right) + \not{p}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p} + \Sigma E\frac{n}{p^2} + \Sigma E\frac{n}{p^3} + \ldots, \tag{115}$$

og ligeledes faas for Antallet af dividerede Primtalpotenser ved Benyttelse af (111), (112) og de analoge

$$\vartheta(n) + \vartheta\left(\frac{n}{2}\right) + \vartheta\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{p} + \frac{1}{2}\Sigma E\frac{n}{p^2} + \frac{1}{3}\Sigma E\frac{n}{p^3} + \ldots \tag{116}$$

Flere af disse Ligninger kunne ogsaa betragtes fra et noget andet Synspunkt, hvorved deres Betydning bliver mere klar. Af den almindelige Ligning (101),

$$\Sigma f(d) = \Sigma\left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)f(x),$$

faas nemlig ved at antage, at $f(x) = 0$, undtagen naar $x = z$, et Udtryk for en symmetrisk Funktion af de Divisorer i n, som høre til Rækken af mærkelige Tal, nemlig

$$\Sigma f(d_z) = \Sigma\left(E\frac{n}{z} - E\frac{n-1}{z}\right)f(z). \tag{117}$$

Sættes her efterhaanden $n = 1, 2, 3 \ldots n$ og summeres, faas den tilsvarende symmetriske Funktion af alle «mærkelige» Divisorer i Tallene fra 1 til n under Formen

$$\Sigma f(d_z) = \sum_1^n{}_z E\frac{n}{z}f(z). \tag{118}$$

Er specielt $f(z) = 1$, faas altsaa Antallet af saadanne Divisorer i alle Tal fra 1 op til n. F. Ex. $\Sigma E\frac{n}{p}$ betyder Antallet af alle Divisorer i Tallene $1, 2, 3 \ldots n$, som ere Primtal.

Særlig mærkes, at Summen $\Sigma\not{p}\left(\frac{n}{x}\right) = \Sigma E\frac{n}{p} + \Sigma E\frac{n}{p^2} + \ldots$ vil angive Antallet af alle de Divisorer i Tallene op til n, som ere Primtalpotenser. Indeholder et af Tallene altsaa f. Ex. p^r som højeste Potens af p, saa vil der fra dette indkomme i Summen r Divisorer, som ere Potenser af p. Den omtalte Sum vil derfor simpelthen angive Antallet af samtlige Primfaktorer i Produktet af Tallene fra 1 til n inkl. Dette vilde ogsaa umiddelbart indses ved at indskrænke de mærkelige Tals Omraade til det ene Primtal p, idet da Summen $E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + E\frac{n}{p^3} \ldots$ vil angive Antallet af Potenser af p, der forekomme som Faktorer i Tallene op til n, med andre Ord Exponenten til den højeste Potens af p, som findes i $[n]$. Man ser umiddelbart, hvorledes denne Exponent kan findes ved at skrive Tallet n i et p-Tal-System. Det er ogsaa en Selvfølge, at den samme Exponent kan udtrykkes ved Hjælp af $E\frac{ln}{lp} = r$.

En højere Grænse for denne Sum faas saaledes

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+E\frac{n}{p^3}+\ldots < n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\frac{1}{p^r}\right) = \frac{n}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}-\frac{n}{p^{r+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{n}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}-\frac{1}{p\left(p-\frac{1}{p}\right)} = \frac{n-1}{p-1}. \qquad (118)$$

For af Formlerne (111) til (116) at finde explicite Udtryk for de paa venstre Side indgaaende Funktioner $\theta(x)$ o. s. v., maa Ligningerne vendes om ved Hjælp af Möbius's Faktorer.

For $\theta(x)$ har Bougaïeff angivet Formlen

$$\theta(x) = \Sigma E\frac{n}{a}-2\Sigma E\frac{n}{ab}+3\Sigma E\frac{n}{abc}\ldots-\Sigma E\frac{n}{a^2}+\Sigma E\frac{n}{a^2b}-\Sigma E\frac{n}{a^2bc}+\ldots, \qquad (119)$$

som er af en temmelig kompliceret Natur. Men hvad han ikke synes at have bemærket er, at den første Del af Formlen netop angiver $\mathfrak{P}(x)$, Antallet af Primtalpotenser, idet altsaa

$$\mathfrak{P}(x) = \Sigma E\frac{n}{a}-2\Sigma E\frac{n}{ab}+3\Sigma E\frac{n}{abc}-4\Sigma E\frac{abcd}{n}+\ldots \qquad (120)$$

Dette kan uden stor Vanskelighed indses ved Induktion, men vi foretrække at bevise det paa en anden Maade, som ogsaa i andre Henseender har Interesse.

Naar $abc\ldots$ betegne de m første Primtal, da vil Antallet af Led i Udviklingen af Produktet $(1+a)(1+b)(1+c)\ldots$ være 2^m, og skriver man Produktet som

$$1+\Sigma a+\Sigma ab+\Sigma abc+\ldots, \qquad (121)$$

saa vil Antallet af Leddene i de enkelte Summer angives ved Leddene i Rækken

$$1+m_1+m_2+m_3+\ldots = 2^m,$$

hvor m_1, m_2, $m_3\ldots$ betegne Binomialkoefficienter. Betragter man et Tal N, som alene er sammensat af Potenser af disse m Primfaktorer, saa vil dette af Divisorer forskjellige fra 1, som kun indeholde 1ste Potens af hvert enkelt Primtal, netop have de enkelte Led i (121), det første 1 fraregnet. Betegner man nu Antallet af Divisorer i N af Formen a ved D_a, af Formen ab ved D_{ab}, og bemærkes, at

$$1-m_1+m_2-m_3+\ldots = (1-1)^m = 0,$$

saa er ogsaa for ethvert sammensat Tal

$$1-D_a+D_{ab}-D_{abc}\ldots = 0. \qquad (122)$$

Paa lignende Maade faas af Identiteten

$$m_1-2m_2+3m_3-4m_4\ldots = m(1-1)^{m-1} = 0,$$

at

$$D_a-2D_{ab}+3D_{abc}-4D_{abcd}\ldots = 0. \qquad (123)$$

Ligeledes er

$$1.2m_2-2.3m_3+3.4m_4\ldots = 0,$$

altsaa ogsaa

$$1.2D_{ab}-2.3D_{abc}+3.4D_{abcd}\ldots = 0, \quad \text{o. s. v.} \qquad (124)$$

Disse Formler gjælde for ethvert sammensat Tal. Hvis i den første N er et Primtal, saa faas paa højre Side ogsaa Nul. Adderer man alle de tilsvarende Ligninger for Tallene fra 2 til n, saa faar man altsaa Summen 0. Men Antallet af samtlige Divisorer af Formen a i Tallene fra 1 til n er $\Sigma E\frac{n}{a}$, af Formen ab, $\Sigma E\frac{n}{ab}$ o.s.v., altsaa faas den velbekjendte Ligning (46)

$$n - 1 - \Sigma E\frac{n}{a} + \Sigma E\frac{n}{ab} \ldots = 0.$$

Behandles den anden Ligning paa samme Maade, saa ses, at man, hvis N er en Primtalpotens, vil faa 1 i Stedet for 0 paa højre Side af (123), saa at Summation med Hensyn til alle hele Tal giver Antallet af Primtalpotenser

$$\mathfrak{P}(n) = \Sigma E\frac{n}{a} - 2\Sigma E\frac{n}{ab} + 3\Sigma E\frac{n}{abc} \ldots \tag{125}$$

Leddet $\Sigma E\frac{n}{a}$ kan elimineres ved Hjælp af (46), hvorved faas

$$\mathfrak{P}(n) + 1 = n - \Sigma E\frac{n}{ab} + 2\Sigma E\frac{n}{abc} - 3\Sigma E\frac{n}{abcd} \ldots \tag{126}$$

Den tredie Formel (124) vilde, behandlet paa samme Maade, give Formlen

$$2\,\mathfrak{P}_2(n) = 1.2\Sigma E\frac{n}{ab} - 2.3\Sigma E\frac{n}{abc} + 3.4\Sigma E\frac{n}{abcd} \ldots, \tag{127}$$

hvor $\mathfrak{P}_2(n)$ betegner Antallet af Tal, som ere et Produkt af 2 Primtalpotenser.

De saaledes vundne Formler (125)—(127) ere fra det theoretiske Standpunkt ret mærkelige, og de ere ogsaa af Betydning ved den rent numeriske Beregning af Primtalmængden. Men til Afledning af Tilnærmelsesformler egne de sig ikke, det maatte i saa Fald være nødvendigt at præparere dem saaledes, at vi undgik de skiftende Fortegn. Eller ogsaa maatte man først benytte en saadan Funktion af Primtal, at man i en med (125) analog Formel paa højre Side erholdt en bekjendt Funktion eller i det mindste en Funktion, som med Tilnærmelse, hvis Grænser kunde angives, lod sig udtrykke ved bekjendte Funktioner. Det er i Virkeligheden dette, som Tchebycheff har gjort i sin berømte Afhandling: «Mémoire sur les nombres premiers» (1850), som tillige med det to Aar ældre Arbejde: «Note sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée», findes i Liouville's Journal 17 Bd.

Tchebycheff har andetsteds vist, hvorledes man i Almindelighed kan omskrive en Funktion af Formen $\sum_1^\infty f(x)\,lx$ til Formen $\sum_2^n A_p\,lp$. [1]

Det er lige saa simpelt at betragte Funktionen $\sum_1^n f(x)\,lx$. Det er da klart, at lp vil forekomme som Faktor i alle de Led $f(x)\,lx$, hvor x er delelig med p, og tilmed multipli-

[1] Jvfr. Catalan: Nouv. Corresp. Math. T. IV, p. 308.

ceret med m, hvis $x = p^m . q$. Koefficienten til lp vil derfor faas ved særskilt at udtage de Led, som indeholde p, p^2, p^3 o. s. v. Faktorerne til lp blive da følgende:

$$f(p) + f(2p) + f(3p) + \ldots f\left(p \,.\, E\frac{n}{p}\right)$$

$$+f(p^2) + f(2p^2) + f(3p^2) + \ldots f\left(p^2 . E\frac{n}{p^2}\right)$$

$$+f(p^3) + f(2p^3) + f(3p^3) + \ldots f\left(p^3 . E\frac{n}{p^2}\right)$$

o. s. v.,

A_p bliver Summen af alle disse Led, idet man blot har at paase, at intet af Argumenterne overstiger n. Naar man derfor ved mp^t betegner alle de Tal $\leqq n$, som indeholde en Potens af p som Faktor, saa kan man skrive

$$\sum_1^n f(x)\, lx = \sum_2^n lp \,.\, \sum_1^n f(mp^t). \tag{128}$$

Er nu $f(x) = 1$, saa faas specielt

$$\sum_1^n lx = \Sigma lp \,.\, f(mp^t) = \Sigma lp \left(E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + E\frac{n}{p^3} + \cdots\right). \tag{129}$$

Denne Ligning, hvor Faktoren til lp simpelthen angiver den højeste Potens af p, som forekommer i $[n]$, kan naturligvis let indses umiddelbart, og ligeledes vilde den kunne faas strax ved Hjælp af (118), men vi have foretrukket at udlede den som specielt Tilfælde af den almindeligere Formel (128), som i og for sig fortjener Opmærksomhed.

Udtrykket for Σlx kan skrives i en anden Form, idet man har

$$\Sigma l(x) = \Sigma E\frac{n}{p} lp + \Sigma E\frac{n}{p^2} lp + \Sigma E\frac{n}{p^3} lp + \ldots$$

Men naar nu i (100) $F(x)$ betegner Summen af Logarithmerne af alle Primtal fra 2 til x, z alle hele Tal, $\Phi\left(\frac{n}{x}\right)$ altsaa $= E\frac{n}{x}$, saa ses, at

$$\Sigma E\frac{n}{p} lp = F(n) + F\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots$$

Ligesaa for $F_1(x) = \Sigma lp^2$ faas

$$\Sigma E\frac{n}{p^2} lp^2 = F_1(n) + F_1\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots = 2F(n^{\frac{1}{2}}) + 2F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

eller

$$\Sigma E\frac{n}{p^2} lp = F(n^{\frac{1}{2}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Paa lignende Maade bliver

$$\Sigma E\frac{n}{p^3} lp = F(n^{\frac{1}{3}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

saaledes at man endelig erholder

$$\sum_1^n lx = F(n) + F\left(\frac{n}{2}\right) + F\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots$$
$$+ F(n^{\frac{1}{2}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$
$$+ F(n^{\frac{1}{3}}) + F\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + F\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots \quad \text{o. s. v.}$$

Betegne vi nu med Tchebycheff $\sum_1^n lx$ ved $T(n)$ samt Funktionen

$$F(n) + F(n^{\frac{1}{2}}) + F(n^{\frac{1}{3}}) + \ldots \quad \text{ved} \quad \psi(n), \tag{130}$$

saa faas altsaa

$$T(n) = \psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right). \tag{131}$$

I Funktionen $\psi(n)$ indgaar aabenbart hvert enkelt Primtals Logarithme saa mange Gange som Addend, som angives ved den højeste Potens af p, der er lig eller mindre end n, saaledes at man ogsaa kan skrive

$$\psi(n) = \Sigma lp \,.\, E\frac{ln}{lp}. \tag{132}$$

Ligeledes kan ifølge (91) og (92) $T(n)$ skrives som

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n}{x+1}\right)\psi(x) = \sum_1^n (\psi(x) - \psi(x-1))\, E\frac{n}{x}. \tag{133}$$

Det er de to Ligninger (130) og (131):

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right) \quad \text{og} \quad \psi(n) = \sum_1^n F\left(n^{\frac{1}{x}}\right),$$

som Tchebycheff har lagt til Grund for sine Undersøgelser[1]), de tilstede i Virkeligheden ved en dobbelt Anvendelse af Möbius's Faktorer at bestemme Funktionen $F(n)$, som Tchebycheff for øvrigt betegner ved $\theta(n)$.

Af (131) afledes en ny Identitet ved at danne Differensen $T(n) - T(n-1)$. Paa venstre Side faas derved ln, paa højre Side $\Sigma\left(\psi\left(\frac{n}{x}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{x}\right)\right)$. Men Differensen $\psi\left(\frac{n}{x}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{x}\right)$ vil altid være lig 0, undtagen naar $\frac{n}{x}$ er en Potens af et Primtal. Er $\frac{n}{x} = p^m$, saa bliver Differensen $lp = \frac{1}{m} l\frac{n}{x^m}$, saa at man, naar som tidligere $\tilde{\omega}(x)$ betegner en Funktion, som er lig $\frac{1}{m}$, naar $x = p^m$, og i alle andre Tilfælde lig 0, kan sætte

$$ln = \sum_1^n \tilde{\omega}\left(\frac{n}{x}\right) l\frac{n}{x}. \tag{134}$$

---

[1]) Mémoire sur les nombres premiers. Liouville's Journal, Tome 17; jfr. Serret: Cours d'Algèbre supérieure, 3. éd. T. II, p. 202.

Det andet Udtryk for $T(n)$ i (133) giver paa lignende Maade, idet

$$T(n) = \sum_1^n (\psi(x) - \psi(x-1))\, E\frac{n}{x} = \sum_1^n E\frac{n}{x}\,\tilde{\omega}(x)\,lx\,, \tag{135}$$

Formlen

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)\tilde{\omega}(x)\,lx = \Sigma\tilde{\omega}(d)\,ld\,, \tag{136}$$

hvor d betegner alle Divisorer i n, og Summationen udføres med Hensyn til disse.

Disse Udtryk for ln ere saa at sige umiddelbart indlysende, og man kunde derfor ogsaa benytte dem som Udgangspunkt til Bevis for de Tchebycheff'ske Ligninger (130) og (131).

Hvad der imidlertid bør særlig fremhæves paa dette Sted er, at disse Ligninger ret beset indeholde Definitioner af Funktionen $\tilde{\omega}(x)$, idet denne skal være en saadan Funktion, at den symmetriske Funktion $\Sigma\tilde{\omega}(d)\,ld$, dannet af alle Divisorer i Tallet n, faar Værdien ln. Kan derefter $\tilde{\omega}(x)$ bestemmes nøjagtig eller tilnærmelsesvis, saa vil altsaa $\sum_1^n \tilde{\omega}(x)$ give et Udtryk, ikke for selve Primtalmængden $\theta(n)$, men for Funktionen $\vartheta(n)$, den samme Funktion, for hvilken Riemann ad ganske anden Vej finder en Formel. Der er derved knyttet et interessant Baand imellem disse to saa forskjelligartede Undersøgelser, og netop Tilstedeværelsen af denne Forbindelse giver en Antydning af, at det virkelig er Funktionen $\vartheta(n)$, som man navnlig bør fæste Opmærksomheden paa, fordi den tilsteder en simplere analytisk Bestemmelse end selve $\theta(n)$.

Inden vi forlade dette Thema, skulle vi endnu anføre nogle mærkelig udseende Identiteter, der faas som simple Følger af Berger's og Césaro's Sætninger i den udvidede Form.

Ifølge (113) er, naar $\theta_2(x)$ betegner Antallet af Tal af Formen ab, d. e. Produkter af to Primtal

$$\theta_2(n) + \theta_2\left(\frac{n}{2}\right) + \theta_2\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots = \Sigma E\frac{n}{ab}\,,$$

og paa lignende Maade kan findes Ligninger for $\theta_3(x)$, Antallet af Tallene abc, op til x o. s. v. Men hvad vi navnlig her ville fremhæve, er, at $\theta_2(n)$ kan udtrykkes ved $\theta(n)$. Dannes nemlig Summen

$$\theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \theta\left(\frac{n}{5}\right) + \theta\left(\frac{n}{7}\right) + \ldots = \Sigma\theta\left(\frac{n}{p}\right)\,,$$

saa vil denne let ses at angive Antallet af Tal af Formen ab, tagne 2 Gange, + Antallet af Primtalkvadrater op til n, eller

$$\Sigma\theta\left(\frac{n}{p}\right) = 2\,\theta_2(n) + \theta(n^{\frac{1}{2}})\,, \tag{137}$$

en Relation, som i ufuldstændig Form er fundet af Bougaïeff. Lignende, men mere sammensatte Formler kunne findes for $\theta_3(x)$ o. s. v.

Sætter man dernæst i (98) $F(x) = \theta(x)$, $z = p$, altsaa $\Phi(x) = \theta(x)$, saa faas

$$\sum_1^a \theta\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,\theta(q). \tag{138}$$

Specielt for $a = E\sqrt{n} = q$ faas, ved tillige paa begge Sider at addere $\sum_1^q \theta\left(\frac{n}{p}\right)$ eller $\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right)$,

$$2\sum_1^q \theta\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(n^{\frac{1}{2}}),$$

eller ogsaa

$$\sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) = 2\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(n^{\frac{1}{2}}),$$

som i Forbindelse med (137) giver den mærkelige Relation

$$2\sum_{q+1}^n \theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta^2(q) = 2\theta_2(n) + \theta(q). \qquad (q = E\sqrt{n}). \tag{139}$$

Ligeledes følger af (98) ved at sætte $F(x) = \theta^2(x)$, $z = x$

$$\sum_1^a \theta^2\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{q+1}^n (\theta^2(x) - \theta^2(x-1))\,E\frac{n}{x} + a\theta^2(q) = \sum_{q+1}^n (2\theta(p) - 1)\,E\frac{n}{p} + a\theta^2(q). \tag{140}$$

Er tillige $z = p$, bliver Formlen til

$$\sum_1^a \theta^2\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n (2\theta(p) - 1)\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,\theta^2(q), \tag{141}$$

og specielt for $a = n$

$$\sum_1^n \theta^2\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n 2\theta(p)\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) - \sum_1^n \theta\left(\frac{n}{p}\right). \tag{142}$$

Er endelig $F(x)$ Summen af Primtallene op til x, saa bliver

$$\sum_1^a F\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{q+1}^n pE\frac{n}{p} + aF(q); \qquad \sum_1^a F\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_{q+1}^n p\,\theta\left(\frac{n}{p}\right) + \theta(a)\,F(q), \tag{143}$$

og for $a = n$

$$\sum_1^n F\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n pE\frac{n}{p}; \qquad \sum_1^n F\left(\frac{n}{p}\right) = \sum_1^n p\,\theta\left(\frac{n}{p}\right). \tag{143'}$$

I Forbindelse hermed anføres som Exempel paa Tchebycheff's Formel (128), at

$$\sum_1^n E\frac{n}{x}\,lx = \Sigma lp \Sigma E\frac{n}{mp^t} = T(n) + T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots, \tag{144}$$

og at

$$\sum_2^n \frac{lx}{lx} = \Sigma_p lp \Sigma_m \Sigma_t \frac{1}{lm + tlp} = n - 1. \tag{144'}$$

§ 6. Tilnærmet Bestemmelse af Funktionen $\tilde{\omega}(x)$.

Enhver af de ovenfor udviklede Formler (134)—(136) giver tilstrækkelige Data til Bestemmelsen af $\tilde{\omega}(x)$ eller, naar $\tilde{\omega}(x)lx$ betegnes ved $\tau(x)$, af denne Funktion, hvis Værdi i Virkeligheden er 0, undtagen naar $x = p^m$, da den er lp. Ved at indføre $\tau(x)$ i Formlerne, kunne disse skrives som

$$ln = \sum_1^n \tau\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)\tau(x) = \Sigma\tau(d). \tag{145}$$

Vi skulle betragte hvert af disse Udtryk for sig.

For af det første at bestemme $\tau(x)$, maatte Formlen

$$ln = \tau\left(\frac{n}{1}\right) + \tau\left(\frac{n}{2}\right) + \tau\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots \tau\left(\frac{n}{n}\right)$$

vendes om ved Hjælp af Möbius's Faktorer, idet man erindrer, at $\tau(x)$ kun har Betydning for $\frac{n}{x}$ hel, altsaa naar de under Funktionstegnet τ indgaaende Argumenter ere hele Tal. I Virkeligheden bør derfor alle de Led, hvor Nævnerne ikke ere Divisorer i n, udelades. Men naar Formlerne derefter vendes om, saa føres vi identisk tilbage til $\tau(n)$ udtrykt ved Primtallogarithmer, saaledes som det vil ses af et Exempel for $n = 12$. Man faar nemlig da

$$\begin{aligned}
l\,12 &= \tau 12 + \tau\left(\frac{12}{2}\right) + \tau\left(\frac{12}{3}\right) + \tau\left(\frac{12}{4}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right)\\
l\left(\frac{12}{2}\right) &= \tau\left(\frac{12}{2}\right) + \tau\left(\frac{12}{4}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right)\\
l\left(\frac{12}{3}\right) &= \tau\left(\frac{12}{3}\right) + \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right)\\
l\left(\frac{12}{6}\right) &= \tau\left(\frac{12}{6}\right) + \tau\left(\frac{12}{12}\right),
\end{aligned}$$

altsaa identisk $l\,12 - l\frac{12}{2} - l\frac{12}{3} + l\frac{12}{6} = \tau(12)$.

Der opnaas altsaa ad denne Vej ikke nogen væsentlig ny Bestemmelse af $\tau(x)$. Derimod kunde man tænke sig, at man muligvis kunde faa en Tilnærmelsesformel for τ ved at søge Værdien af en Funktion $t(x)$ bestemt ved Ligningen

$$ln = t\left(\frac{n}{1}\right) + t\left(E\frac{n}{2}\right) + t\left(E\frac{n}{3}\right) + \ldots t\left(E\frac{n}{n}\right),$$

som giver

$$t(n) = \sum_1^n \mu(x)\, l E\frac{n}{x}.$$

Men bortset fra, at dette Udtryk for $t(n)$ er noget kompliceret, kan man ikke være sikker paa, at det Resultat, man faar, vil være en virkelig Tilnærmelsesværdi for $\tau(n)$, navnlig fordi $t(n)$ kan blive negativ (f. Ex. for $n = 9$). Vi vende os derfor til det andet Udtryk i (145)

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x} \right) \tau(x).$$

Dette giver os strax en Forestilling om den gjennemsnitlige Værdi af $\tau(x)$. Sætter man paa lignende Maade som før for $\tau(x)$ en Gjennemsnitsværdi af de paa hinanden følgende τ i Nærheden af x, saa vil hvert enkelt Led i denne Formel ogsaa give en Gjennemsnitsværdi af det tilsvarende Led i den oprindelige Sum. Bestemmer man altsaa Funktionen $t(x)$ ved Formlen

$$ln = \sum_1^n \frac{1}{x} t(x),$$

saa er man berettiget til at formode, at $t(x)$ vil paa det nærmeste angive Middelværdien af Funktionen $\tau(x)$ i Nærheden af x. Men nu faas strax

$$\frac{1}{n} t(n) = ln - l(n-1),$$

eller
$$t(n) = nl\frac{n}{n-1} = nl\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \ldots, \qquad (146)$$

som for voxende n nærmer sig stærkt til Grænsen 1.

Skjønt disse Betragtninger ikke kunne opfattes som noget egentligt Bevis, vil det dog være ret oplysende at gjøre en Prøve paa Nøjagtigheden af Formlen for $t(n)$ ved at indsætte det fundne Udtryk i Formlen for $T(n)$ (135). Da Udtrykket for $t(n)$ ikke gjælder for $n = 1$, maa Summen tages fra $x = 2$, og man har altsaa, at denne Sum er

$$S(n) = \sum_2^n E\frac{n}{x} t(x).$$

Men nu er

$$\sum_2^n \frac{n}{x} . xl\frac{x}{x-1} > S(n) > \sum_2^n \left(\frac{n}{x} - 1\right) xl\frac{x}{x-1},$$

eller, da $n\sum_2^n l\frac{x}{x-1} = nln$ og

$$\sum_2^n \left(\frac{n}{x} - 1\right) xl\frac{x}{x-1} = nln - \sum_2^n (xlx - xl(x-1)) = nln - \sum_2^n (xlx - (x-1)\,l(x-1) - l(x-1))$$
$$= nln - nln + l[n-1],$$

faas endelig

$$nln > S(n) > l[n-1].$$

Den tilsvarende Sum, dannet af $\tau(x)$, er $T(n) = l[n] = nln + \frac{1}{2} ln - n + l\sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12n}$, altsaa ogsaa

$$nln > T(n) > l[n-1].$$

Da saaledes $S(n)$ og $T(n)$ ligge mellem de samme Grænser, hvis Differens omtrent er $n - \frac{1}{2} ln - l\sqrt{2\pi}$, saa vil den gjennemsnitlige Afvigelse mellem $\tau(x)$ og $t(x)$ for alle de i $T(n)$ indgaaende $\tau(x)$ ikke kunne overstige $n : \sum_2^n E\frac{n}{x}$, eller den bliver af Ordenen $\frac{1}{ln}$.

Da dette gjælder for alle Værdier af n, vil man være berettiget til at anse $t(x)$ som repræsenterende en Tilnærmelse til de Værdier, som vilde faas ved at udjevne Værdierne af $\tau(n)$ ved en Formel, som ikke tilsteder Vendepunkter, saa at altsaa denne Funktion tilnærmelsesvis maa anses for at være konstant lig 1.

Til det samme Resultat leder det tredie Udtryk i (145)

$$ln = \Sigma\tau(d).$$

Naar man ogsaa her erstatter $\tau(x)$ ved $t(x)$, hvor $t(x)$ har en lignende Betydning som ovenfor, saa skal $t(d)$ være en saadan Funktion, at den symmetriske Funktion $\Sigma t(d)$ faar Middelværdien ln for Tallene i Nærheden af n.

Nu har Berger ved Hjælp af (101) bevist, at naar g bestemmes saaledes, at for $n = \infty$ $\lim \frac{g}{n} = 0$, men $\lim \frac{\sqrt{n}}{g} = 0$, saa vil Middelværdien af Antallet af Divisorer i Tallene mellem $n-g$ og $n+g$ nærme sig til Grænsen $ln + 2C$ (jvfr. S. 37). Udelades Divisoren 1, som forekommer i alle Tallene, bliver Middelværdien $ln + 2C - 1$, og denne Værdi vilde altsaa blive Middelværdien af $\Sigma t(d)$, for saa vidt $t(x) = 1$. Denne Middelværdi er lidt større, end den skulde være, men da det tillige er bevist, at Middelværdien af $\Sigma \frac{1}{d}$ er $\frac{\pi^2}{6}$, eller, naar Divisoren 1 udelades, $\frac{\pi^2}{6} - 1$, saa kunne vi sætte

$$t(n) = 1 - \frac{2C-1}{\frac{\pi^2}{6}-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{k}{n}. \qquad (147)$$

Ogsaa dette Udtryk nærmer sig for voxende n til Grænsen 1.

Da $\sum_1^n \frac{1}{x} E\frac{n}{x} < n \sum_1^n \frac{1}{x^2}$ og $> n \sum_1^n \frac{1}{x^2} - \sum_1^n \frac{1}{x}$, saa faas, ved at indsætte $1 - \frac{k}{x}$ i Formlen (135) i Stedet for $\tau(x)$, at

$$T(n) - \sum_1^n E\frac{n}{x}\left(1 - \frac{k}{x}\right) = \rho\sqrt{n} + \text{Led af lavere Orden},$$

saa at Afvigelsen mellem $T(n)$ og $\Sigma E\frac{n}{x} t(x)$ her kun bliver af Ordenen $\sqrt{n}$.

Alle de her anvendte Fremgangsmaader føre altsaa til det Resultat, at $t(n)$ for store n nærmer sig til Grænsen 1, og at altsaa Middeltætheden af dividerede Primtalpotenser (eller af $\tilde{\omega}(n) = \vartheta(n) - \vartheta(n-1)$) nærmer sig til Grænsen $\frac{1}{ln}$, naar n voxer. Dog kunne disse Udviklinger ikke anses for fyldestgjørende Beviser for denne Sætning, bl. a. af den Grund, at Overgangen fra $\tau(n)$ til $t(n)$ ikke er tilstrækkelig skarpt bestemt.

Denne Indvending kan ikke gjøres mod den følgende Fremgangsmaade, hvor vi direkte benytte Formlen (135)

$$T(n) = \sum_1^n E\frac{n}{x}\tau(x) = \sum_2^n E\frac{n}{x}\tau(x).$$

I denne Formel indgaa nemlig lineært alle Funktionerne $\tau(x)$ fra $x = 1$ eller 2 til $x = n$. Opfattes altsaa Koefficienterne $E\frac{n}{x}$ som Vægte, saa kan der, da $T(n)$ er bekjendt og $\Sigma E\frac{n}{x}$ ogsaa kan betragtes som bekjendt, findes en virkelig Middelværdi af alle disse $\tau(x)$, hvor dog de, der svare til de laveste x, faa størst Indflydelse, eftersom Vægtene omtrent ere proportionale med $\frac{1}{x}$. Betegne vi denne Middelværdi ved $\tau_1(n)$, saa er altsaa, idet $\tau(1)$ ikke medregnes

$$\tau_1(n) = \frac{T(n)}{\sum_2^n E\frac{n}{x}} . \tag{148}$$

Erstatter man her Tæller og Nævner ved de tilnærmende Udtryk (20) og (105), faas

$$\tau_1(n) = \frac{nln - n + \frac{1}{2}ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12n}}{nln + (2C-2)n + \lambda\sqrt{n}}$$

eller

$$\tau_1(n) = \frac{1 - \frac{1}{ln} + \frac{1}{2n} + \frac{k}{nln}}{1 + \frac{2C-2}{ln} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}\,ln}} ,$$

altsaa, naar Divisionen udføres,

$$\tau_1(n) = 1 - \frac{2C-1}{ln} - \frac{2C-2}{(ln)^2} + R , \tag{149}$$

hvor R betegner en Rest, der er af lavere Orden end $\frac{1}{\sqrt{n}}$, saa at altsaa Lim $R\sqrt{n} = 0$ for $n = \infty$.

De til de laveste Værdier af x svarende $\tau(x)$ have den største Indflydelse ved Dannelsen af denne Middelværdi, og da det andet og tredie Led ville optræde med modsatte Fortegn, og deres Indflydelse altsaa gaar i modsat Retning, saa vil Middelværdien $\tau_1(n)$ allerede for lave Værdier af n være nær ved 1, og hvis man tænkte sig, at Middelværdien dannedes med andre Vægte end de her anvendte, saa vilde dette Forhold aabenbart ikke kunne forrykkes meget, da Formlen gjælder for alle n. For store Værdier faar $\tau(x)$ vel en mindre Vægt, men til Gjengjæld faar den, for saa vidt x er et Primtal, en større numerisk Værdi. Man ledes derfor til den Antagelse, at væsentlig den samme Middelværdi maatte komme frem, selv om Vægtene vare ligestore og Middeltallet ikke dannedes af alle $\tau(x)$ fra 2 til n, men alene af dem i Nærheden af n.

Det er i Virkeligheden ikke vanskeligt at danne et Middeltal, hvor de enkelte indgaaende τ optræde med ligestore Vægte, og hvor de til de største x svarende τ faa den største Indflydelse.

Dette faas ved Betragtning af Identiteten

$$T(n) - 2T\left(E\frac{n}{2}\right) = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)\tau(x). \tag{150}$$

For Simpelheds Skyld antage vi, at n er et lige Tal samt $n = ax + r$ $(r < x)$. Da bliver Differensen

$$E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x} = \begin{cases} 0 \text{ for } a \text{ lige} \\ 1 \text{ for } a \text{ ulige.} \end{cases} \tag{151}$$

Koefficienterne til $\tau(x)$ i (150) blive altsaa alle 0 eller 1, og navnlig ses, at for alle Værdier af $x > \frac{n}{2}$ bliver Koefficienten altid 1, medens den for lavere x kun bliver 1 for dem, der give et ulige Tal for Kvotienten $E\frac{n}{x}$. For $n = 10$ faas f. Ex.

$$T(10) - 2T(5) = 0.\tau(1) + 1.\tau(2) + 1.\tau(3) + 0.\tau(4) + 0.\tau(5) + 1.\tau(6) + 1.\tau(7) + 1.\tau(8) + 1.\tau(9) + 1.\tau(10). \tag{152}$$

Danne vi altsaa Middelværdien af alle de i (150) indgaaende τ ($\tau(1)$ undtagen), saa vil denne Middelværdi, som vi ville betegne med $\tau_2(n)$, fortrinsvis afhænge af de τ, der svare til Tallene mellem n og $\frac{n}{2}$. Denne Middelværdi vil fremstilles ved

$$\tau_2(n) = \frac{T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right)}{\sum_2^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)}. \tag{153}$$

Nu er $T(n) - 2T\left(\frac{n}{2}\right) = nln - n + \frac{1}{2}ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n} - nl\frac{n}{2} + n - l\frac{n}{2} - 2l\sqrt{2\pi} - \frac{\lambda'}{3n}$

$$= nl2 - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}, \tag{154}$$

samt, paa en ubetydelig Brøk nær, ifølge (104) eller (105),

$$\sum_2^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right) = nl2 \pm \rho\sqrt{n}. \tag{155}$$

Følgelig faas

$$\tau_2(n) = \frac{nl2 - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}}{nl2 \pm \rho\sqrt{n}} = 1 \pm \frac{\rho}{l2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2l2}\frac{ln}{n} + \ldots \tag{156}$$

Man ser, at Afvigelsen af denne Middelværdi fra 1 kun er af Ordenen $\frac{1}{\sqrt{n}}$, og at den altsaa nærmer sig stærkere til 1 end den ovenfor fundne $\tau_1(n)$. Da dette gjælder for alle n, kan der herefter ikke være nogen Tvivl om, at man kun begaar en ringe Fejl ved at sætte Middelværdien af $\tau(x)$ for et stort Antal paa hinanden følgende Værdier af x lig med 1.

Tillige ses, at Summen af Afvigelserne mellem de enkelte τ og 1 bliver

$$\sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)(\tau(x) - 1) = \pm\rho\sqrt{n} - \frac{1}{2}ln - l\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda''}{n}, \tag{157}$$

og altsaa af Ordenen $\sqrt{n}$.

Ogsaa for Afvigelsernes Kvadratsum lader der sig uden Vanskelighed angive i det mindste en højere Grænse, men de fundne Middelværdier ere alligevel ikke, hvad man

maatte ønske. Det, man skulde tilstræbe, var nemlig at erholde Middeltal og Middelafvigelse fra dette for en Række $\tau(x)$ for alle x fra en vilkaarlig valgt lavere Grænse m til n, helst med ligestore Vægte.

Hvis Vægtene sættes proportionale med $\frac{1}{x}$, da kan dette gjøres, idet man af (135) erholder

$$\frac{1}{n}T(n) < \sum_{2}^{n}\frac{1}{x}\tau(x) < \frac{1}{n}T(n) + \frac{1}{n}\psi(n), \tag{158}$$

hvoraf der i Virkeligheden lader sig finde Grænser for Summen $\sum_{m}^{n}\frac{1}{x}\tau(x)$. Men disse Grænser ville dels komme til at afhænge af Tchebycheff's Grænser for $\psi(n)$, som lide af væsentlige Mangler, og dels ville de ogsaa paa Grund af selve Beskaffenheden af Formlen blive altfor vide, til at man kan have nogen reel Nytte af dem. Det vil ialfald være bedre at benytte selve Funktionen $\psi(n) = \sum_{2}^{n}\tau(x)$.

---

§ 7. Funktionen $\psi(x)$.

For saa vidt det kunde betragtes som fuldstændig sikkert, at Middelværdien af alle $\tau(x)$ fra $x = 2$ til $x = n$ er lig 1, saa vil Funktionen $\psi(n)$ være lig $n - 1 \pm$ en Rest af lavere Orden end n. Dette vil, uanset de andre $\tau(x)$, ogsaa være Tilfældet, hvis blot Middelværdien af de τ, som ikke forekomme i Summen $\Sigma\left(E\frac{n}{x} - 2E\frac{n}{2x}\right)\tau(x)$, har Grænsen 1. Disse τ ere nemlig de, der svare til saadanne x, for hvilke Kvotienten $E\frac{n}{x}$ er et lige Tal $2m$, og Differensen mellem $\psi(n)$ og den angivne Sum vil derfor være Summen af en Række Udtryk af Formen $\left[\tau\left(E\frac{n}{2m+1}+1\right) + \tau\left(E\frac{n}{2m+1}+2\right) \ldots + \tau\left(E\frac{n}{2m}\right)\right]$ taget for alle m fra 1 og opad. For $\tau(m) = 1$ vilde denne Sum ændres til $\Sigma\left(E\frac{n}{2m} - E\frac{n}{2m+1}\right)$, der tilnærmelsesvis kunde omskrives til

$$n \cdot \Sigma\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots \pm \frac{1}{n}\right). \tag{159}$$

Rækken under Parenthesen er med en Fejl af en Brøkdel af $\frac{1}{n}$ lig $1 - l2$, saaledes at man for den søgte Sum tilnærmelsesvis vilde erholde $(1 - l2)n$, og dette adderet til $T(n) - T\left(\frac{n}{2}\right)$ vilde give

$$n - \frac{1}{2} ln + l2 - l\sqrt{2\pi}$$

med en Fejl, som vilde kunne findes, ialfald med Tilnærmelse, hvis Afvigelsen af Middelværdien af de udeladte τ var bekjendt. Men denne Fejl kjendes ikke tilstrækkelig nøjagtig, til at man kan bygge noget paa den, og det bliver derfor ønskeligt at undersøge, om man ikke direkte kan bestemme $\psi(n)$ ad anden Vej.

Det ligger da nær at forsøge at benytte Ligningen (131)

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right)$$

i dette Øjemed. Denne giver, efter Omvending ved Möbius's Faktorer, strax

$$\psi(n) = \Sigma\mu(x)\, T\left(E\frac{n}{x}\right) = T(n) - T\left(E\frac{n}{2}\right) - T\left(E\frac{n}{3}\right) - T\left(E\frac{n}{5}\right) + T\left(E\frac{n}{6}\right) \ldots \quad (160)$$

som exakt Udtryk for $\psi(n)$. Men at udlede en Tilnærmelsesformel af dette er meget vanskeligt, navnlig paa Grund af, at de diskontinuerte Argumenter forhindre en Differentiation, som ellers strax vilde tilvejebringe mere handelige Funktionsformer end de, hvortil $T(x)$ uden videre reduceres.

Det er dog lykkedes Tchebycheff[1]) ved en overordentlig sindrig Fremgangsmaade at tilvejebringe Grænser for $\psi(n)$ af denne Ligning, og for Fuldstændigheds Skyld skulle vi ganske kort antyde, hvorledes han gaar frem, saa meget mere, som hans Methode ogsaa i andre Tilfælde lader sig anvende til en Grænsebestemmelse for Funktioner, som faas ved lignende Omvendinger.

Naar man nemlig har forelagt et System af Ligninger, som

$$Y_1 = \Sigma X_r$$
$$Y_2 = \Sigma X_{2r}$$
$$Y_3 = \Sigma X_{3r} \text{ o. s. v.},$$

og man om de søgte X ved, at de danne en aftagende Række, altsaa $X_1 > X_2 > X_3 \ldots$, og man derefter danner Summen

$$\sigma = Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_5 + Y_{30},$$

saa findes σ udtrykt ved X'erne at være

$$\sigma = X_1 - X_6 + X_7 - X_{10} + X_{11} - X_{12} + X_{13} - X_{15} + X_{17} - X_{18} + X_{19} - X_{20} + X_{23} - X_{24} + X_{29} - X_{30} + \ldots,$$

hvorefter der følge X med Indices, som give de samme Rester ved Division med 30 og med ganske de samme Fortegn som de, der optræde i den angivne første Periode, altsaa saaledes, at hvert andet Fortegn er +, hvert andet —. Naar det nu er givet, at X'erne danne en aftagende Række, saa kan man ved at afbryde denne Række paa et

[1]) Mémoire sur les nombres premiers. Liouvilles's Journal T. 17.

hvilket som helst Punkt angive en Grænse for den derved begaaede Fejl, og navnlig har man de to Uligheder

$$\sigma < X_1 , \quad \text{og} \quad \sigma > X_1 - X_6 ,$$

da de bortkastede Led i første Tilfælde have en negativ, i sidste en positiv Sum.

Anvendt paa det foreliggende Tilfælde faas, idet ved $t(n)$ betegnes

$$T(n) - T\left(E\frac{n}{2}\right) - T\left(E\frac{n}{3}\right) - T\left(E\frac{n}{5}\right) + T\left(E\frac{n}{30}\right) , \tag{161}$$

at

$$t(n) < \psi(n) < t(n) + \psi\left(\frac{n}{6}\right) . \tag{162}$$

Ved derefter først at vise, at

$$T(E) = l\sqrt{2\pi} + xlx - x \pm \frac{1}{2}klx + \frac{\theta}{12} , \quad \text{hvor } k < 1 , \tag{163}$$

finder Tchebycheff først Grænser for $t(n)$, nemlig

$$An + \frac{5}{2}ln > t(n) > An - \frac{5}{2}ln - 1 , \tag{164}$$

hvor

$$A = \frac{1}{2}l2 + \frac{1}{3}l3 + \frac{1}{5}l5 - \frac{1}{30}l30 = 0{\cdot}92129202\ldots , \tag{165}$$

og derefter for $\psi(n)$

$$\frac{6}{5}An + \frac{5}{4l6}(ln)^2 + \frac{5}{4}ln + 1 > \psi(n) > An - \frac{5}{2}ln - 1. \tag{166}$$

Væsentlig den samme Methode er anvendt af Sylvester[1]) og ligeledes af Dr. Jul. Petersen[2]).

Sylvester giver en ringe Forbedring af Tchebycheff's Grænser, men noget væsentligt har hverken han eller nogen anden af de senere Forfattere opnaaet, navnlig har ingen af dem været i Stand til at faa Faktoren til n i Grænserne for $\psi(n)$ erstattet ved 1, hvilket uden Tvivl maa kunne gjøres. I Virkeligheden synes det, som om Tchebycheff's Fremgangsmaade ikke kan udvikles videre; at den har kunnet føre saa vidt, beror paa, at man ved Dannelsen af Summen σ kan faa en Række af X med skiftende Fortegn, og at danne en lignende Række, hvor flere af de første efter X_1 følgende X mangle, synes ikke at være muligt ved at kombinere forskjellige Y.

Vi vende os derfor til de andre Maader, som kunne tjene til Bestemmelsen af $\psi(n)$. Betragtes først Formlen (132)

$$\psi(n) = \Sigma lpE\frac{ln}{lp} ,$$

saa giver denne ganske vist Grænser for $\psi(n)$, nemlig

---

[1]) On Tchebycheff's theorem of the totality of the prime numbers comprised within given limits. American Journal of mathematics. Vol. IV.

[2]) Om Primtal. Tidsskrift for Mathematik 1882. S. 138.

$$\Sigma\left(\frac{ln}{lp}-1\right)lp = \theta(n)ln-\Sigma lp < \psi(n) < \Sigma\frac{ln}{lp}\cdot lp = \theta(n)ln, \tag{167}$$

eller, hvis man antager n delelig med nogle af de første Primtal (f. Ex. 2, 3, 5, altsaa $n \equiv 0 \bmod. 30$),

$$\theta(n)ln-\sum_{7}^{n} lp < \psi(n) < \theta(n)ln, \tag{167'}$$

men denne Formel har ved Bestemmelsen af Grænserne for ψ ingen Betydning, hvorimod den nok, naar disse vare bekjendte, kunde benyttes til at finde Grænser for θ.

Direkte at bestemme $\psi(n)$ ved at vende Formlen (131)

$$\psi(n)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots = T(n)$$

om, efter at det bekjendte Udtryk $T(n) = nln-n+l\sqrt{2\pi}$ o. s. v. indsættes for T, vil ikke kunne føre til noget, da man ikke kan angive Grænser for de enkelte Leds Fejl i det Udtryk, som Omvendingen vilde give.

Bedre vilde det ialfald være at erstatte $T(n)$ ved et Udtryk, i hvilket $\Sigma E\frac{n}{x}$ indgik. Da nemlig

$$T(n) = nln-n+l\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}ln+\frac{\lambda}{12n}$$

og

$$\sum_{1}^{n} E\frac{n}{x} = nln+(2C-1)n+\rho\sqrt{n},$$

saa kan man sætte

$$T(n) = \sum_{1}^{n} E\frac{n}{x}-2Cn+\rho'\sqrt{n}, \tag{168}$$

hvor ρ kan betragtes som en Størrelse, der altid ligger indenfor let angivelige konstante Grænser. Af denne Formel faas

$$\psi(n) = n-2C+\Sigma\mu(x)\rho_x\sqrt{\frac{n}{x}}\,. \tag{169}$$

Men for at finde Grænser for det her optrædende Restled maatte man først for ρ_x sætte den største positive eller negative Værdi, som ρ kunde have, og derefter for sig summere de positive og de negative Led, hvorved vilde faas en højere og lavere Grænse. I Stedet for disse kan man ogsaa benytte videre Grænser af Formen $\pm\rho\sqrt{n}\sum_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}$. Men Summation af Rækken $\sum_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}$ giver en Størrelse af samme Orden som $\int_{1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x}}\,dx = 2(\sqrt{n}-1)$, saa at Grænserne for $\psi(n)$ vilde blive af Ordenen n ligesom hos Tchebycheff, og selv om vi kun udførte Summationen for de positive $\mu(x)$, saa vilde vi derfor ikke komme til væsentlig bedre Grænser, med mindre man blev i Stand til ogsaa at tage Hensyn til Fortegnet for ρ_x, eller ogsaa der for Afvigelsen mellem $T(n)$ og $\Sigma E\frac{n}{x}$ kunde findes en Grænse af lavere Orden end $\sqrt{n}$.

Det ligger nær at benytte Formlen $T(n) = \sum_1^n lx$ ved Omvendingen. Derved faas følgende Ligninger

$$\psi(n) + \psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots \psi\left(\frac{n}{n}\right) = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots ln$$

$$\psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots = l2 + l4 + \ldots - E\frac{n}{2} l2$$

$$+ \psi\left(\frac{n}{3}\right) + \psi\left(\frac{n}{6}\right) + \ldots = l3 + l6 + \ldots - E\frac{n}{3} l3$$

o. s. v.

Deraf faas ved Anvendelse af Möbius's Faktorer

$$\psi(n) = E\frac{n}{2}.l2 + E\frac{n}{3}.l3 + E\frac{n}{5}.l5 - E\frac{n}{6}.l6 + E\frac{n}{7}.l7 + \ldots = -\sum_1^n \mu(x) E\frac{n}{x}.lx, \quad (170)$$

som ogsaa i en anden Form angivet af Dr. Petersen.

Dette Udtryk er nær beslægtet med den af Möbius fundne Formel (33)

$$1 = \frac{1}{2} l2 + \frac{1}{3} l3 + \frac{1}{5} l5 - \frac{1}{6} l6 + \frac{1}{7} l7 + \ldots,$$

men vi træffe her atter paa en lignende Vanskelighed som ved Rækken (28), idet nemlig Formlen for $\psi(n)$ snarere kan bruges til at bevise Konvergensen af Möbius's Række, end denne omvendt til at finde Værdien af $\psi(n)$.

Der kunde endelig være Tale om at benytte Formlen

$$T(n) = \Sigma\psi\left(\frac{n}{x}\right) = \Sigma\left(E\frac{n}{x} - E\frac{n}{x+1}\right)\psi(x)$$

$$= \left(E\frac{n}{2} - E\frac{n}{3}\right)\psi(2) + \left(E\frac{n}{3} - E\frac{n}{4}\right)\psi(3) + \ldots \psi(n),$$

men heller ikke denne fører til noget bedre Resultat end de andre, om end en Tilnærmelsesformel kan faas ved at erstatte Koefficienterne ved $\left(\frac{n}{x} - \frac{n}{x+1}\right)$.

Derimod kan man ved Anvendelse af en med Riemanns's analog Fremgangsmaade naa til et Udtryk for $\psi(n)$, som har Interesse.

Vi fandt nemlig ovenfor Formlen (62)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r^2} ls(r)\, dz = 2\pi\vartheta(x) lx - 2\pi\psi(x),$$

dog med den Indskrænkning, at x ikke skal være en Primtalpotens. Adderes hertil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \frac{1}{r} ls(r)\, dz = \int \frac{x^r}{r} D_r\, ls(r)\, dz - \int \frac{x^r}{r^2} ls(r)\, dz = -2\pi\vartheta(x) lx,$$

saa faas

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r} D_r ls(r)\, dz = 2\pi\psi(x). \tag{171}$$

Her haves altsaa et med det Riemann'ske analogt bestemt Integral, som giver Værdien af $\psi(x)$, eller rettere af $\frac{1}{2}(\psi(x+0)+\psi(x-0))$. Nu faas af det Riemann'ske Udtryk for $ls(r)$

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma l\left(1+\frac{(r-\frac{1}{2})^2}{a^2}\right) + l\xi(0),$$

$$-D_r ls(r) = -\frac{1}{2} l\pi + \frac{1}{r-1} + D_r l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) - D_r\left(\Sigma l\left(1+\frac{(r-\frac{1}{2})^2}{a^2}\right) + l\xi(0)\right). \tag{172}$$

Indsættes dette Udtryk i Formlen for $\psi(x)$, kan Integrationen udføres for hvert Led for sig. Da Integralet $\int \frac{x^r}{r} dz = 2\pi$, saa giver et konstant Led i Formlen for $-D_r ls(r)$ et tilsvarende Led i $\psi(x)$. Derved faas af det andet Led

$$\int \frac{x^r}{r(r-1)} dz = \int x^r \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) dz = 2\pi(x-1)$$

som det tilsvarende Led i $2\pi\psi(x)$.

Overhovedet har man altid

$$\int \frac{x^r}{r(r-\beta)} dz = \frac{1}{\beta}\int x^r \left(\frac{1}{r-\beta} - \frac{1}{r}\right) dz = \frac{2\pi}{\beta}(x^\beta - 1). \tag{173}$$

Dette anvendes ved Behandlingen af det sidste Led. Da [1])

$$D_r l.\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right) = -C + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{r}{2}}\right), \tag{174}$$

saa faas deraf i $2\pi\psi(x)$ dels et konstant Led, dels Led af Formen

$$\int \frac{x^r}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+r}\right) dz = \int \frac{x^r}{r}\frac{r}{n(2n+r)} dz = \frac{1}{n}\int \frac{x^r}{2n+r} dz = \frac{2\pi x^{-2n}}{n}.$$

De fra Γ-Funktionen hidrørende Led blive altsaa, med Udeladelse af det konstante Led,

$$2\pi \sum_1^\infty \frac{1}{n} x^{-2n} = -2\pi l(1-x^{-2}).$$

Angaaende det sidste Led saa vi ved Behandlingen af Riemann's Formel, at

$$\Sigma_a l\left(1+\left(\frac{r-\frac{1}{2}}{a}\right)^2\right) + l\xi(0) = \Sigma\left[l\left(1-\frac{r}{\frac{1}{2}+ai}\right) + l\left(1-\frac{r}{\frac{1}{2}-ai}\right)\right] + l\xi(\tfrac{1}{2}i),$$

hvor Konstanten $l\xi(\frac{1}{2}i)$ ifølge Genocchi er $-l2$. Da nu

$$D_r l\left(1-\frac{r}{\beta}\right) = \frac{1}{r-\beta},$$

---

[1]) Hermite: Cours professé pendant le 2e semestre 1881—82, rédigé par M. Andoyer. Second tir. p. 93.

saa give Integralerne af to til samme α svarende Led i ovenstaaende Sum følgende Resultat

$$\int \frac{x^r}{r} D_r \left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) dz = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}+\alpha i}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i} - 1) + \frac{2\pi}{\frac{1}{2}-\alpha i}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i} - 1)$$

$$= \frac{2\pi x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}+\alpha^2}\left(x^{\alpha i}(\tfrac{1}{2}-\alpha i) + x^{-\alpha i}(\tfrac{1}{2}+\alpha i)\right) - \frac{2\pi}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2\pi x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos \alpha l x + 2\alpha \sin \alpha l x}{\frac{1}{4}+\alpha^2}\right) - \frac{2\pi}{\frac{1}{4}+\alpha^2}.$$

Den herfra hidrørende Konstant kan bestemmes ved at bemærke, at

$$l\xi(t) = l\xi(0) + \Sigma l\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

hvoraf ved Differentiation

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \Sigma \frac{-2t}{\alpha^2 - t^2} = -2t\Sigma \frac{1}{\alpha^2 - t^2}, \tag{175}$$

og altsaa for $t = \frac{1}{2}i$

$$\Sigma \frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = i\frac{\xi'(\frac{1}{2}i)}{\xi(\frac{1}{2}i)} = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right).$$

Da Riemann blandt andet for $\xi(t)$ anfører følgende Udtryk

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (t^2 + \tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos(\tfrac{1}{2} t l x)\, dx,$$

saa faas heraf

$$\xi'(t) = -2t\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t l x\right) dx - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dt} \cos\left(\frac{1}{2} t l x\right) dx,$$

og altsaa findes endelig

$$i\xi'(\tfrac{1}{2}i) = \int_1^\infty \Sigma e^{-n^2\pi x} x^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Sigma e^{-n^2\pi x}(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1})\, dx, \tag{176}$$

hvoraf umiddelbart ses, at dette Integral er en positiv Størrelse, der tilmed maa være mindre end $\sum_1^\infty \int_1^\infty e^{-n^2\pi x} dx < \sum_1^\infty \frac{1}{n^2\pi} = \frac{\pi}{6}$. Det er ikke vanskeligt ved delvis Integration at finde et nøjagtigere Udtryk for denne Konstant, men for vort Formaal er den her angivne Tilnærmelse tilstrækkelig, idet den viser, at

$$\Sigma_\alpha \frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right) < \frac{\pi}{3}. \tag{177}$$

Samle vi nu alle Leddene i Udtrykket for $\psi(x)$, saa faas endelig følgende Formel

$$\psi(x) = (x-1) - l(1-x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}} \Sigma_\alpha \frac{\frac{1}{2}\cos \alpha l x + \alpha \sin \alpha l x}{\frac{1}{4}+\alpha^2} + \lambda, \tag{178}$$

hvor λ betegner en Konstant, hvis nøjagtige Udtryk er

$$\lambda = 2i\xi'\left(\frac{1}{2}i\right) - \frac{1}{2} l\pi - C, \tag{179}$$

og som altsaa maa være en negativ Størrelse, hvis numeriske Værdi ligger mellem 0 og 1·2.

Den her fundne Formel for $\psi(x)$ fortjener i flere Henseender Opmærksomhed. For det første viser den, at $\psi(x)$ tilsteder en betydelig simplere Fremstilling end selve $\vartheta(x)$, og da, som vi nedenfor vise, $\vartheta(x)$ med en angivelig Tilnærmelse kan bestemmes ved $\psi(x)$, saa vil det uden Tvivl være praktisk at lægge Hovedvægten paa at finde $\psi(x)$, noget, som ogsaa de foregaaende Undersøgelser pege hen paa. Endvidere ses det let, at hvert enkelt af de under Σ-Tegnet indgaaende Led er en periodisk Funktion af lx med Perioden $\frac{2\pi}{\alpha}$. Hvert enkelt af disse Led vil altsaa taget for sig have Middelværdien 0, og Følgen deraf vil atter blive den, at naar de periodiske Led udelades, saa vil den øvrige Del af Formlen fremstille en kontinuert Funktion, som angiver den Middelværdi, hvorom Værdierne af $\psi(x)$ svinge saaledes, at Afvigelserne snart er positive, snart negative. Da Leddet $l(1-x^{-2})$ hurtig nærmer sig stærkt til 0, saa vil Middelværdien af $\psi(x)$ kunne fremstilles ved Formlen

$$\psi(x) = x - \text{Konst.} = x - k. \tag{180}$$

Fremdeles ses, at Grænserne for Afvigelsen mellem $\psi(x)$ og $x-k$ ville faas ved at bestemme Grænserne for de periodiske Led. Det ses, at disse Grænser blive afhængige af $\sqrt{x}$, men om de kunne fremstilles ved Formlen $\pm\rho\sqrt{x}$, hvor ρ er en Konstant, vil afhænge af, om Rækken under Σ-Tegnet altid har en Værdi, der er mindre end en af x uafhængig Grænse.

Den Værdi af x, som vilde gjøre et af Leddene i denne Sum til Maximum eller Minimum, skulde bestemmes ved Ligningen $\frac{1}{2}\sin\alpha lx = \alpha\cos\alpha lx$. Men naar lx bestemmes heraf og indsættes i det paagjældende Led, saa bliver, idet $\operatorname{tg}\alpha lx = 2\alpha$,

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2} = 2\cos\alpha lx = \frac{2}{\sqrt{1+4\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^2}}.$$

Hvis altsaa Rækken $\Sigma\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^2}}$ er konvergent, og dens Sum $=\rho$, saa vil Fejlen, der begaas ved at sætte $\psi(x) = x-k$, altid være numerisk mindre end $\rho\sqrt{x}$.

Men om den omtalte Række er konvergent eller ikke, kan ikke afgjøres, før man kjender Rødderne α, og selv om man kjendte dem, er der adskillige Tegn, som tyde paa, at Rækken ikke vilde konvergere.

Den periodiske Faktor $\Sigma\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2}$ viser en Analogi med en bekjendt Række, som fortjener at fremhæves. Ved Udvikling efter Fourier'ske Rækker findes nemlig [1]) for $-h < x < h$

$$\frac{e^x}{e^h - e^{-h}} = \frac{1}{2h} - \left[\frac{h\cos\frac{\pi x}{h} - \pi\sin\frac{\pi x}{h}}{\pi^2+h^2} - \frac{h\cos\frac{2\pi x}{h} - 2\pi\sin\frac{2\pi x}{h}}{(2\pi)^2+h^2} + \frac{h\cos\frac{3\pi x}{h} - 3\pi\sin\frac{3\pi x}{h}}{(3\pi)^2+h^2}\cdots\right].$$

[1]) Se f. Ex. Schlömilch: Compendium der höh. Anal. II, S. 147.

Sættes her $x = h - z$, faas

$$\frac{e^{h-z}}{e^h - e^{-h}} = \frac{1}{2h} + \left[\frac{h\cos\frac{\pi z}{h} + \pi \sin\frac{\pi z}{h}}{\pi^2 + h^2} + \frac{h\cos\frac{2\pi z}{h} + 2\pi\sin\frac{2\pi z}{h}}{(2\pi)^2 + h^2} \cdots \right]. \qquad (181)$$

Denne Formel gjælder kun for $0 < z < 2h$, men det er let at se, hvad højre Side fremstiller, naar $z > 2h$. Da højre Side nemlig er en periodisk Funktion, hvis Periode er $2h$, saa vil man for $z = 2nh + r$, hvor $r < 2h$, paa højre Side erholde

$$\frac{e^{h-r}}{e^h - e^{-h}} = \frac{e^{h-2h\left(\frac{z}{2h} - E\frac{z}{2h}\right)}}{e^h - e^{-h}} = \frac{e^{-\left(\frac{z}{2h} - E\frac{z}{2h}\right)2h}}{1 - e^{-2h}} = \frac{e^{-z+2hE\frac{z}{2h}}}{1 - e^{-2h}}.$$

Sætter man dette Udtryk ind paa venstre Side af (181), gjælder Formlen for alle $z > 0$. Tillægger man nu specielt h og z Værdierne $h = \frac{1}{2}lp$, $z = \frac{1}{2}lx$, saa faas følgende Formel

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}lx + lpE\frac{lx}{2lp}}}{1 - p^{-1}} = \frac{1}{lp} + \Sigma \frac{\frac{1}{2}lp\cos\frac{m\pi lx}{lp} + m\pi\sin\frac{m\pi lx}{lp}}{(m\pi)^2 + \frac{1}{4}(lp)^2},$$

eller

$$\frac{p}{(p-1)\sqrt{x}}\, e^{lpE\frac{lx}{2lp}} = \frac{1}{lp} + \frac{1}{lp}\Sigma_m \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{m\pi lx}{lp} + \frac{m\pi}{lp}\sin\frac{m\pi lx}{lp}}{\left(\frac{m\pi}{lp}\right)^2 + \frac{1}{4}}. \qquad (182)$$

Hvis man heri sætter $\frac{m\pi}{lp} = \beta$, saa faas

$$\Sigma_\beta \frac{\frac{1}{2}\cos\beta lx + \beta\sin\beta lx}{\frac{1}{4} + \beta^2} = \frac{p}{(p-1)\sqrt{x}}\, e^{lpE\frac{lx}{2lp}}\, lp - 1 = \frac{p^{E\frac{l\sqrt{x}}{lp}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{plp}{p-1} - 1. \qquad (183)$$

Analogien af den Række, hvis Sum her er angivet, med den periodiske Faktor i Udtrykket for $\psi(x)$ er saa iøjnefaldende, at det ligger nær at formode, at denne muligvis bestaar netop af ganske lignende Led, men summerede for alle Primtal, saaledes at det almindelige Udtryk for α f. Ex. var $\frac{m\pi}{lp}$, hvor m betegner alle hele Tal, p alle Primtal. Men for at undersøge nærmere, om dette virkelig forholder sig saaledes, maatte man direkte summere Rækken $\Sigma\left(\frac{p^{E\frac{l\sqrt{x}}{lp}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{plp}{p-1} - 1\right)$ for alle Primtal, men dette synes ikke at kunne gjøres med de Midler, vi i det foregaaende have faaet til vor Raadighed.

At der kan være en Mulighed for ad en direkte Vej ved at gaa ud fra rent numeriske Identiteter at komme til Riemann's Formel, saaledes at Betydningen af Rødderne α direkte fremgaar af Formlen, vil blive mere indlysende af den følgende Udvikling, hvor vi benytte det tidligere angivne andet Udtryk for $ls(r)$. Vi saa nemlig, at for saa vidt vi i $s(r)$

kun medtage de Led, som afhænge af Primtallene op til en vis endelig Grænse, som vi i øvrigt kunne vælge saa høj man vil, saa er (82)

$$-l\sigma(r) = klr + k_1 - \frac{r}{2}k_2 + \Sigma l\left(1+\left(\frac{rlp}{2m\pi}\right)^2\right),$$

hvor k, k_1, k_2 ere Konstanter, og m betegner alle hele Tal, p alle Primtal op til den valgte Grænse g. Vælges denne lig eller større end x, saa giver denne Tilnærmelsesformel, indsat i det Riemann'ske Integral, det samme Resultat som selve $s(r)$. Det samme ses ogsaa at være Tilfældet ved Indsættelse i Integralet for $\psi(x)$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^r}{r}D_r l\,s(r)\,dz.$$

Af Leddene i ovenstaaende Formel for $l\sigma(r)$ give ved Indsættelse heri, det første, andet og tredie følgende Led i $\psi(x)$

$$klx + 0 - \frac{1}{2}k_2 = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\sum_2^g lp.$$

Et af de logarithmiske Led giver i $\psi(x)$ Leddet

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{x^r}{r}D_r\left(l\left(1+\frac{irlp}{2m\pi}\right)+l\left(1-\frac{irlp}{2m\pi}\right)\right)dz = \frac{1}{2\pi}\int\frac{x^r}{r}\left(\frac{1}{r-\frac{2m\pi i}{lp}}+\frac{1}{r+\frac{2m\pi i}{lp}}\right)dz$$

$$= \frac{lp}{2m\pi i}\left(x^{\frac{2m\pi i}{lp}} - x^{-\frac{2m\pi i}{lp}}\right) = \frac{lp}{m\pi}\sin\frac{2m\pi lx}{lp}.$$

Altsaa faas

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\overset{(g)}{\Sigma}lp + \frac{1}{\pi}\overset{(g)}{\Sigma}lp\,\frac{\sin\frac{2m\pi lx}{lp}}{m}. \tag{184}$$

Men nu er som bekjendt

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sin mz = \frac{1}{2}(\pi - z) \quad \text{for } 0 < z < 2\pi,$$

og for $z > 2\pi$ ser man paa lignende Maade som ovenfor ved Formel (181), at

$$\Sigma\frac{1}{m}\sin mz = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(z - 2\pi E\frac{z}{2\pi}\right)\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}z + \pi E\frac{z}{2\pi}. \tag{185}$$

For $z = \frac{2\pi lx}{lp}$ faas følgelig

$$\Sigma_m\frac{1}{m}\sin\frac{2m\pi lx}{lp} = \frac{1}{2}\pi - \pi\frac{lx}{lp} + \pi E\frac{lx}{lp},$$

og altsaa endelig

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\overset{(g)}{\Sigma}lp + \frac{1}{\pi}\overset{(g)}{\Sigma_p}lp\left(\frac{1}{2}\pi - \pi\frac{lx}{lp} + \pi E\frac{lx}{lp}\right)$$

$$= \theta(g)lx - \frac{1}{2}\Sigma lp + \frac{1}{2}\Sigma lp - \theta(g)lx + \overset{(g)}{\Sigma}lp\,E\frac{lx}{lp},$$

eller $$\psi(x) = \sum^{(x)} lp\, E\frac{lx}{lp} = \sum^{(q)} lp\, E\frac{lx}{lp},$$

da $E\frac{lx}{lp} = 0$, naar $p > x$. Men dette Udtryk stemmer fuldstændig med, hvad der ad anden Vej er fundet tidligere.

Hvad der i denne sidste Udvikling er af Interesse er navnlig det, at det tydelig viser sig, at Formlen (184) er en ren Identitet. Alle mathematiske Formler ere jo i sidste Instans Identiteter, og en Formel kan ikke betragtes som fuldt bevist, førend det er muligt at paavise dens identiske Karakter. Noget saadant maa altsaa ogsaa kunne gjøres med Riemann's Formel for $\vartheta(x)$ eller, om man vil, ved den efter hans Methode afledte Formel (178) for $\psi(x)$. Men netop den sidste Udvikling giver et Vink om, hvorledes dette maatte kunne iværksættes, og navnlig viser den, at man ved Benyttelsen af trigonometriske Rækker har et Middel, som ret naturligt frembyder sig til at sammenknytte de to forskjelligartede Undersøgelsesrækker, som i det foregaaende have beskjæftiget os — paa den ene Side Riemann's Anvendelse af bestemte Integraler, paa den anden Side de af ufuldstændige Kvotienter afhængige numeriske Funktioner. Det bliver meget sandsynligt, at det maa kunne lade sig gjøre, saavel for $\vartheta(x)$ som for $\psi(x)$, at opstille et Udtryk ved ufuldstændige Kvotienter, som ved Omdannelse til kontinuert Form ved Hjælp af trigonometriske Rækker umiddelbart gik over til Riemann's Formel.

Dette ser ganske vist ret tiltalende ud, men indeholder alligevel et Moment, som ikke varsler godt for fremtidige Undersøgelser. Alt vil nemlig da komme an paa Konvergensen af de her optrædende Rækker. Men saadanne Rækker ere i og for sig særdeles vanskelige at operere med, og naar man som her maa være forberedt paa at træffe en dobbelt uendelig Række Led, saa bliver det mere end tvivlsomt, om man af disse Rækkers Beskaffenhed vil kunne drage nogen sikker Slutning om de Grænser, indenfor hvilke Summen ligger. Snarere kunde det ventes, at Betragtningen af selve de numeriske Relationer maatte kunne give nogen Oplysning i denne Henseende, men det vil i saa Fald sikkert blive nødvendigt at foretage meget indgaaende Undersøgelser om Divisionsrester.

Tillæg. [1]) Endnu en Ting bør her fremhæves, nemlig at i $\psi(x)$ ligesom i $\vartheta(x)$ det Led, som maa anses for det dominerende, hidrører fra Leddet $-l(r-1)$ i Formlen for $ls(r)$. Ligeledes viser det sig, at man ved i Formlerne (63)—(64) at sætte $\frac{1}{r-1}$ for $s(r)$ erholder en meget stor Tilnærmelse til det rigtige Resultat, hvilket for disse to Formlers Vedkommende let lader sig bevise. Det er tænkeligt, at en nøjere Diskussion af disse Formler og dermed analoge kunde lede til Opstilling af en Udvikling for $s(r)$, ved hvis Anvendelse det blev muligt at bedømme de andre Leds Indflydelse, i hvert Fald er dette et Punkt, som fortjener at tages i Betragtning ved fremtidige Undersøgelser.

[1]) Fandtes ikke i det til Bedømmelse indsendte Manuskript.

I Forbindelse hermed vil det være af Interesse at paavise, at ogsaa den af Tchebycheff i hans første Afhandling [1]) anvendte Methode, som netop hviler paa Betragtning af Funktionen $s(r)$, direkte fører til en med det foregaaende overensstemmende Bestemmelse af Lim $\psi(n)$.

Ved at gaa ud fra Formlen (14) viser Tchebycheff nemlig først, at Funktionen

$$\sum_2^\infty x^{-r} - \frac{1}{r-1} = s(r) - 1 - \frac{1}{r-1},$$

saa vel som alle dens Differentialkoefficienter, vil være endelig for $r = 1$, og derefter paa Basis heraf, at det samme vil være Tilfældet med Differentialkoefficienterne af

$$l(r-1) - \Sigma l(1-p^{-r}).$$

Saa vil altsaa ogsaa

$$D_r^m \left[\sum_2^\infty x^{-r} - \frac{1}{r-1} + D_r(l(r-1) - \Sigma l(1-p^{-r}) \right],$$

som med de i det foregaaende anvendte Betegnelser kan skrives som

$$D_r^m \left[\sum_2^\infty x^{-r} + D_r \sum_2^\infty \tilde{\omega}(x) x^{-r} \right] = D_r^m \sum_2^\infty (1-\tau(x)) x^{-r} = (-1)^m \sum_2^\infty (1-\tau(x)) x^{-r} (lx)^m,$$

hvor m er et positivt helt Tal eller 0, vedblive at være endelig for $r = 1$. Betegner nu M den største numeriske Værdi, som denne Sum, naar $r = 1$, kan antage for nogen Værdi af m, saa vil følgelig ogsaa

$$\sum_2^\infty \frac{1-\tau(x)}{x} \left(1 + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{[2]} + \frac{(lx)^3}{[3]} + \cdots\right) < M\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]} + \frac{1}{[3]} \cdots\right) = Me$$

være en endelig Størrelse.

Men denne Sum er det samme som

$$\sum_2^\infty (1-\tau(x)) = \mathrm{Lim}_{n=\infty}(n-1-\psi(n)).$$

Der vilde herved være ført et Bevis for, at den asymptotiske Værdi af $\psi(n)$ havde Formen $n-a$, hvor a er en Konstant, og dette kunde atter benyttes til Bevis for, at Integrallogarithmen gav den asymptotiske Værdi af $\vartheta(n)$. At Tchebycheff ad anden Vej finder Integrallogarithmen for selve $\theta(n)$, beror alene paa den Omstændighed, at han i Stedet for $-\Sigma l(1-p^{-r})$ kun benytter Σp^{-r}, saa der ret beset ikke viser sig nogen Uoverensstemmelse mellem hans Resultat og det, hvortil de andre Methoder føre.

Skjønt det saaledes kunde synes, at man ad denne Vej naar til en direkte Bestemmelse af den asymptotiske Værdi af $\psi(n)$, have vi dog ikke benyttet den, fordi den Sætning, hvorpaa Beviset bygges, hviler paa den Forudsætning, at Formlen

$$ls(r) = -\Sigma l(1-p^{-r})$$

ogsaa vedbliver at være gyldig for $r = 1$, da de paagjældende Rækker ere divergente,

[1]) Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Liouville's Journal Bd. 17.

hvilken ikke uden videre kan betragtes som tilladelig. Det synes imidlertid at være muligt at gjennemføre Beviset ved at tillægge r en større Værdi end 1, men dette Punkt fordrer dog en nærmere Undersøgelse, paa hvilken vi ikke her skulle indlade os.

---

§ 8. Tilnærmelsesformler for $\vartheta(n)$ og $\theta(n)$.

Det vil af de ovenstaaende Betragtninger fremgaa, at Middelværdien af Funktionen $\tau(x)$ tilnærmelsesvis kan sættes lig 1 eller, om man vil, lig $1-\frac{k}{x}$, hvor k er en Konstant, som er lidt mindre end $\frac{1}{4}$. Indsat i Formlen $\sum_2^n E\frac{n}{x}\tau(x)$ giver den $T(n)\pm\rho\sqrt{n}$, hvor ρ er en konstant Størrelse. Derimod have vi ikke været i Stand til at faa tilstrækkelig snævre Grænser for den Fejl, som begaas ved at indsætte det samme Udtryk i Formlen for $\psi(n)$. Derved faas ganske vist for $\psi(n)$ et Udtryk, der kan erstattes ved $(n-1)-kln+$ Konst., men for den virkelige Værdi af $\psi(n)$ have vi kun sikkert de af Tchebycheff angivne Grænser, hvorefter man kan sætte $\psi(n)=n-1\pm\lambda.n$, hvor λ er en ægte Brøk. Vel er det meget sandsynligt, at man i Stedet for λn maatte kunne sætte et Udtryk, hvis væsentligste Led var af Formen $\pm\lambda\sqrt{n}$, men ganske sikkert er det dog ikke.

Da $\vartheta(n)=\sum_2^n\frac{1}{lx}\tau(x)$, saa faas, ved ogsaa her for $\tau(x)$ at sætte $1-\frac{k}{x}$, for $\vartheta(n)$ et Udtryk af Formen

$$\vartheta(n)=\sum_2^n\frac{1}{lx}-k\sum_2^n\frac{1}{xlx}+R(n). \tag{186}$$

Fejlen $R(n)$ vil her let kunne vises at være af samme Orden som Fejlen i det tilnærmede Udtryk for $\psi(n)$. Sættes nemlig $\tau(x)=t(x)+f(x)$, hvor $t(x)=1-\frac{k}{x}$, og $f(x)$ altsaa betegner den Fejl, der begaas ved at sætte $t(x)$ for $\tau(x)$, saa er $\sum_2^n f(x)=F(n)=$ Fejlen i $\psi(n)$. Nu er altsaa

$$R(n)=\sum_2^n\frac{f(x)}{lx}.$$

Summeres her delvis ved Formlen[1]) $\Sigma uv=u\Sigma v-\Sigma(\Delta u\Sigma v_1)$, idet $u=\frac{1}{lx}$, $v=f(x)$, $\Sigma v=F(x)$ og $\Sigma v_1=F(x+1)-F(2)$, saa faas

---

[1]) Ramus: Differential- og Integralregning S. 352.

$$R(n) = \frac{1}{ln} F(n) + \sum_{2}^{n} (F(x+1) - F(2)) \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{lx \,.\, l(x+1)} \,. \tag{187}$$

I det sidste Led er Faktoren $F(x+1) - F(2)$ af samme Orden som $F(x)$, $l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ er af Ordenen $\frac{1}{x}$, og hele Summen kan derfor ikke blive uendelig af højere Orden end $F(n)$, saaledes at Fejlen $R(n)$ i det højeste bliver af samme Orden som $F(n)$. Hvis altsaa Fejlen i $\psi(n)$ afhænger af $\sqrt{n}$, saa vil det samme blive Tilfældet med Fejlen i $\vartheta(n)$. At gjennemføre Beregningen nærmere for de af Tchebycheff angivne Grænser vil ikke lønne sig, da der ikke kommer noget bedre Resultat ud deraf, end hvad man ad anden Vej kan finde, nemlig Grænser, hvis dominerende Led er af Formen $\pm \lambda n$.

Den Formel, vi saaledes have erholdt for $\vartheta(n)$, er, som det strax ses, væsentlig den samme som Integrallogarithmen, idet $\sum_{2}^{n} \frac{1}{lx}$ paa det nærmeste vil kunne erstattes ved $\int_{2-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{lx} dx$, medens det andet Led, der tilnærmelsesvis kan erstattes ved lln, ikke vil have stor Betydning i Sammenligning med det første. Da tilmed Integrallogarithmen $Li(x)$ bliver 0 for en Værdi af x, der er lidt mindre end 1·5, saa kan man altsaa, idet det andet Led helt kastes over paa Restleddet tilligemed Afvigelsen mellem $Li(n)$ og $\sum_{2}^{n} \frac{1}{lx}$, skrive

$$\vartheta(n) = Li(n) + R'(n) \,,$$

hvor Restleddet ikke bliver af højere Orden end i den oprindelige Formel.

Medens vi for den absolute Værdi af Restleddet kun have faaet Grænser af Formen $\pm \lambda n$, hvor λ er en Konstant, saa faar man ved en Beregning af Middelafvigelsen mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$ en noget bedre Forestilling om dette Restled.

Det er nemlig let tilnærmelsesvis at beregne Kvadratsummen af Afvigelserne $\tau(x) - 1$ for alle x fra 2 til n. Betegnes denne Kvadratsum ved S, saa haves

$$S = \sum_{2}^{n} (\tau(x) - 1)^2 = \sum_{2}^{n} \tau(x)^2 - 2 \sum_{2}^{n} \tau(x) + n - 1 \,.$$

Men nu er

$$\sum_{2}^{n} \tau(x)^2 = \sum_{2}^{n} E \frac{ln}{lp} \cdot (lp)^2 < ln \cdot \sum_{2}^{n} lp < \psi(n) ln \,,$$

saa at altsaa erholdes

$$S < \psi(n) ln - 2\psi(n) + n - 1 = \psi(n)(ln - 2) + n - 1 \,. \tag{188}$$

Indføres heri de Tchebycheff'ske Grænser for $\psi(n)$, faas et Udtryk, hvor det dominerende Led bliver af Formen $(\alpha ln - \beta)n$, hvor Konstanterne α og β omtrent ere henholdsvis 1·11 og 1·2. Sættes for Simpelheds Skyld $\alpha = \beta = 1{\cdot}2$, saa findes som tilnærmet Udtryk for Middelafvigelsen mellem $\tau(x)$ og 1 for alle $\tau(x)$ fra $x = 2$ til $x = n$

$$m = \sqrt{1{\cdot}2\,(ln - 1)} \,.$$

For $\frac{\tau(x)}{lx}$ faas altsaa Kvadratet af Middelafvigelsen fra $\frac{1}{lx}$ at være

$$1\cdot 2\left(\frac{1}{lx}-\frac{1}{(lx)^2}\right),$$

som skal summeres for alle x fra 2 til n, hvorved faas Kvadratet af den tilsvarende Middelfejl paa $\vartheta(n)-Li(n)$. Vi kunne her med tilstrækkelig Tilnærmelse integrere i Stedet for at summere. Det første Led indenfor Parenthesen giver da Integralet $Li(x)$, det andet findes saaledes

$$\int\frac{1}{(lx)^2}dx = \int\frac{x}{(lx)^2}dlx = \int\frac{e^z}{z^2}dz = -\frac{e^z}{z}+\int\frac{e^z}{z}dz = -\frac{x}{lx}+Li(x).$$

Derefter faas altsaa endelig for den søgte Middelafvigelses Kvadrat

$$M^2 = 1\cdot 2\frac{n}{ln},$$

idet Indflydelsen af den lavere Integrationsgrænse kan lades ude af Betragtning. For selve M findes derefter

$$M = \sqrt{1\cdot 2\frac{n}{ln}}, \tag{189}$$

saaledes at altsaa Middelafvigelsen mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$ herefter for store n bliver af lavere Orden end $\sqrt{n}$.

Vi saa lejlighedsvis tidligere (167), at $\theta(n)ln > \psi(n) > 0{\cdot}9n$, følgelig er ogsaa $\frac{n}{ln} < \frac{\theta(n)}{0{\cdot}9}$. Indføres dette i Udtrykket for Middelafvigelsen, faas

$$M_n < \sqrt{\frac{4}{3}\theta(n)},$$

saa at altsaa Middelafvigelsen kan antages at voxe mindre stærkt end en Størrelse, der er proportional med Kvadratroden af Primtalmængden.

Et lignende Resultat kan ogsaa udledes ved direkte at danne Summen

$$M^2 = \Sigma\left(\frac{\tau(x)-1}{lx}\right)^2 = \Sigma\frac{\tau^2(x)}{(lx)^2}-2\Sigma\frac{\tau(x)}{(lx)^2}+\Sigma\frac{1}{(lx)^2}.$$

Da $\frac{\tau(x)}{lx} = \tilde{\omega}(x) = \frac{1}{m}$ for $x = p^m$, saa faas

$$\Sigma\frac{\tau^2(x)}{(lx)^2} = \Sigma(\tilde{\omega}(x))^2 = \theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{9}\theta(n^{\frac{1}{3}})+\ldots$$

$$\Sigma\frac{\tau(x)}{(lx)^2} = \Sigma\frac{\tilde{\omega}(x)}{lx} = \Sigma\frac{1}{lp}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{l.p^2}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{l.p^3}\ldots = \sum_{2}^{n}\frac{1}{lp}+\frac{1}{4}\sum_{2}^{\sqrt{n}}\frac{1}{lp}+\frac{1}{9}\sum_{2}^{\sqrt[3]{n}}\frac{1}{lp}+\ldots$$

Da endvidere $\Sigma\frac{ln}{lp} = ln\Sigma\frac{1}{lp} > \vartheta(n) = \theta(n)+\theta(n^{\frac{1}{2}})+\theta(n^{\frac{1}{3}})+\ldots$, saa faas

$$M^2 < \theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots-\frac{2}{ln}\left(\vartheta(n)+\frac{1}{4}\vartheta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots\right)+\Sigma\frac{1}{(lx)^2}$$

eller, da $\theta(n)+\frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots < \vartheta(n) < \vartheta(n)+\frac{1}{4}\vartheta(n^{\frac{1}{2}})+\ldots$,

$$M_n^2 < \vartheta(n) - \frac{2}{ln}\vartheta(n) + Li(n) - \frac{n}{ln} = \vartheta(n)\left(1 - \frac{2}{ln}\right) + Li(n) - \frac{n}{ln}, \qquad (190)$$

som nærmer sig stærkt til $\vartheta(n)$, naar n voxer.

De i det foregaaende beregnede Kvadratsummer give ganske vist strengt taget kun en Forestilling om Middelfejlen paa $\frac{1}{lx}$, betragtet som Fremstilling af $\tilde{\omega}(x)$, men da i Kvadratsummen M_n indgaa Kvadraterne paa alle de enkelte mulige Afvigelser $\tilde{\omega}(x) - \frac{1}{lx}$, saa giver den tillige nogen Oplysning om Afvigelsen mellem $\vartheta(n)$ og $Li(n)$, og navnlig maa denne ventes at ville blive betydelig mindre end M_n. Den virkellge «Middelfejl» paa $Li(n)$, opfattet som Fremstilling af $\vartheta(n)$, skulde bestemmes ved først at søge Kvadratsummen

$$\Sigma(\vartheta(n) - Li(n))^2,$$

men for denne Sum er det ikke muligt a priori at angive noget Udtryk.

Fra $\vartheta(n)$ er det let at gjøre Overgangen til $\theta(n)$. Thi da

$$\vartheta(n) = \theta(n) + \frac{1}{2}\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(n^{\frac{1}{3}}) + \ldots,$$

saa er $\vartheta(n) - \vartheta(n^{\frac{1}{2}}) = \theta(n) - \frac{1}{2}\theta(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(n^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{4}\theta(n^{\frac{1}{4}}) \ldots < \theta(n)$,

saa at man faar

$$\vartheta(n) > \theta(n) > \vartheta(n) - \vartheta(n^{\frac{1}{2}}). \qquad (191)$$

Hvis Restleddet i Formlen $\vartheta(n) = Li(n) + R(n)$ var bekjendt, saa vilde man ved Indsættelse i Formlen

$$\theta(n) = \Sigma\frac{\mu(x)}{x}\left(Li(n^{\frac{1}{x}}) + R(n^{\frac{1}{x}})\right) = P(n) + 1 + \Sigma\frac{\mu(x)}{x}R(n^{\frac{1}{x}})$$

kunne erholde Grænser for Restleddet i Formlen $\theta(n) = P(n) + 1 + R'(n)$ ved for $\mu(x)$ overalt at sætte $+1$. Man vilde derved finde, at Restleddet $R'(n)$ vilde blive af samme Orden som $R(n)$.

Hvorledes end den analytiske Form for Restleddets Grænser er beskaffen, saa er det ialfald for den første Del af Talrækken sikkert, at dets numeriske Værdi er meget ringe. Glaisher har i Indledningen til «Factor Table for the sixth Million» for Intervaller paa 50000 fra 0 til 9 Millioner sammenlignet $\theta(n)$ med Riemann's Formel saa vel som med de andre Tilnærmelsesformler, som ere opstillede. Han finder, at den gjennemsnitlige Afvigelse for hin vilde være -9, en Differens, som tilmed reduceres med en Enhed, da Glaisher regner Tallet 1 med blandt Primtallene og altsaa i Virkeligheden betragter Differensen

$$P(n) + 1 - (\theta(n) + 1) = P(n) - \theta(n),$$

som er en Enhed mindre end $P(n) + 1 - \theta(n)$. Betragter man Afvigelserne nærmere, saa ses, at de snart ere positive, snart negative, saa at der ikke kan være Tvivl om, at det netop er denne Formel og ingen anden, som skal benyttes, for saa vidt man ikke vil benytte en Formel, som tilsteder Vendepunkter. Det vil endvidere ses, at selve Afvigelsernes numeriske Værdi stiger langsomt med n, men om de stige i Forhold til

$\sqrt{n}$ lader sig ikke afgjøre af de Sammenstillinger, Glaisher har foretaget. De numerisk største Afvigelser, Glaisher har i sin Tabel, ere nemlig (naar vi kun medtage de Differenser, som ere større end alle de foregaaende) følgende:

For 0·30 Million ... + 26	for 2·85 Million ... — 45	for 8·70 Million ... — 95
- 1·00 — ... + 29	- 3·45 — ... — 74	- 8·75 — ... —106
- 1·20 — ... — 41	- 7·05 — ... — 87	- 8·80 — ... —139.

Disse Tal kunne nok tyde paa en Stigning proportional med $\sqrt{n}$, men dels kan man ikke gaa ud fra, at de virkelig angive de største Afvigelser, som findes, dels maatte man ogsaa særlig undersøge Forholdet for de laveste Tals Vedkommende, og om dette giver Glaisher ikke nogen Oplysning.

Glaisher har for at anskueliggjøre, hvorledes Afvigelserne variere, fremstillet dem grafisk i et Diagram, der er vedføjet den nævnte Afhandling. Der er noget i dette, som kunde tyde paa en Periode afhængig af ln, saaledes at Periodetallet, naar $\log_{10} n$ toges til Argument, omtrent kunde blive 0·17 (for ln altsaa 0·39). For at se, om dette muligvis skulde bekræfte sig for lavere Tal, have vi for Argumenter ln sammenlignet $\theta(n)$ med $P(n)$ for Tallene op til e^{15}, idet Primtalmængderne ere bestemte ved Optælling dels i de af Felkel i Lambert's «Supplementa» og af Vega i 2den Udgave (1797) af hans Logarithmetavler meddelte Primtallister, efter at de i disse Tavler indeholdte Fejl vare rettede efter Professor Oppermann's Angivelse, dels i de større Faktortavler. Da Gauss [1]) har angivet en Fortegnelse over Primtalmængden i hvert Tusinde af den første Million, og de i denne indeholdte Fejl ere rettede af Meissel, samt selve Tavlen af Glaisher fortsat op til 9 Millioner, var det let ved Sammentælling af disse Tal at danne en Tabel over Primtalmængden op til $1000N$ for $N < 9000$ (jvfr. Tab. IV), og naar en saadan Fortegnelse toges til Hjælp, var det kun et ringe Arbejde at foretage de yderligere Optællinger, som vare nødvendige. Resultatet af den nævnte Sammenligning er angivet i Tabel VI, men det vil ses, at skjønt Intervallet er tilstrækkelig lille til, at den omtalte Periodicitet kunde træde frem, er der dog intet, som tyder paa dens Tilstedeværelse, saa at den i Glaisher's Diagram tilsyneladende regelmæssige Fordeling af de store Maxima og Minima vistnok skyldes en Tilfældighed.

Det bør naturligvis ogsaa erindres, at selve Faktortavlerne ikke kunne anses for fuldt korrekte. Der er f. Ex. i de hos Glaisher og i de her anførte Optællinger ikke taget Hensyn til den af Oppermann paapegede Fejl hos Burckhardt, at 1330001 er et Primtal.

Om de andre Formler, som af forskjellige Forfattere ere bragte i Anvendelse til Fremstilling af $\theta(n)$, kunne vi fatte os i Korthed. Naar Gauss, Tchebycheff og Hargreave benytte selve $Li(n)$ i Stedet for $P(n)+1$, saa maa dette efter det foregaaende utvivlsomt kun betragtes som en første Tilnærmelse, idet man derved begaar en systematisk

---

[1]) Gauss' Werke Bd. II

Fejl af samme Orden som $\theta(n^{\frac{1}{2}})$. Glaisher's Sammenstilling af disse Formler med de optalte Primtalmængder viser ogsaa tydelig, at Fejlen er stadig voxende. Mærkeligere er det vistnok, at Legendre's [1]) Formel

$$\theta(n) = \frac{n}{ln - 1{\cdot}08366} \tag{192}$$

giver saa gode Resultater, som den i Virkeligheden gjør. Man kan naturligvis opfatte dette som begrundet i, at denne Formel giver en god Tilnærmelse til $Li(n)$, men denne Forklaring er ikke ganske tilfredsstillende. At Formlen giver en god Tilnærmelse, siger med Hensyn til Primtallenes Fordeling noget mere. Vi saa nemlig før, at man exakt maa have

$$\psi(n) = \Sigma lp E\frac{ln}{lp}.$$

Heraf følger atter, at

$$\psi(n) = \theta(n) ln - \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

hvor den under Σ-Tegnet staaende Parenthes altid maa være < 1. Hele den paa højre Side staaende Sum Σ maa altsaa være $< \Sigma lp$, altsaa ogsaa $< \psi(n)$ eller lig $\lambda.\psi(n)$, hvor λ er en ægte Brøk. Heraf vilde der faas et Udtryk for $\theta(n)$ af Formen

$$\theta(n) = \frac{\psi(n)(1+\lambda_n)}{ln} = \frac{n(1+\lambda'_n)}{ln}, \tag{193}$$

naar $\psi(n)$ erstattes ved $n - k$, hvor k er en Konstant. Det maa altsaa, naar λ_n ikke betragtes som en Konstant, men som en Funktion af n, være muligt at udtrykke $\theta(n)$ under denne Form, og det var maaske nok Umagen værd at forsøge at finde en saadan Tilnærmelsesformel.

Men naar Legendre's Formel skal gjælde, altsaa

$$\theta(n) = \frac{n}{ln - B}$$

eller $\theta(n).ln - B\theta(n) = n$, saa vil, naar $\psi(n)$ erstattes ved $n - k$, haves, at

$$\theta(n) ln - B\theta(n) - k = \theta(n) ln - \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

eller at

$$B\theta(n) + k = \Sigma lp\left(\frac{ln}{lp} - E\frac{ln}{lp}\right),$$

saa at den paa højre Side indgaaende Sum væsentlig skulde voxe proportionalt med $\theta(n)$.

Nu gjælder ganske vist Legendre's Formel ikke, naar B er en Konstant, men for saa vidt denne Størrelse skal opfattes som variabel, varierer den i hvert Fald meget langsomt, og selve Legendre's Formel giver altsaa ogsaa et af disse mange Vidnesbyrd om de højst mærkværdige Relationer, som Læren om Primtallene giver Anledning til.

---

[1]) Théorie des nombres IV, § 8.

§ 9. Intervallet mellem to paa hinanden følgende Primtal.

Tchebycheff har anvendt de af ham fundne Grænser for $\psi(n)$ til deraf at udlede Grænser for Intervallet mellem to Primtal. Da en laveste Grænse for Intervallet (for $p>3$) altid er 2, bliver det væsentlig den højere Grænse, hvorom der kan være Tale. En saadan Grænse vil i Virkeligheden let kunne bestemmes, saafremt man for en eller anden i øvrigt vilkaarlig Funktion af n, $F(n)$, som kun varierer, naar n passerer et Primtal, har angivet absolute Grænser. Antages nemlig, at disse Grænser ere udtrykte som Funktioner af n ved $A(n)$ og $B(n)$, saa at altsaa

$$A(n) < F(n) < B(n) \tag{194}$$

for alle n (eller i det mindste for alle n større end et givet Tal), og antages, at p er et Primtal og $p+a+1$ det næste, saa at altsaa intet af de a Tal, som følge efter p, er et Primtal, saa vil man have $F(a+p) = F(p)$. Da nu haves

$$A(p) < F(p) < B(p)$$

samt

$$A(p+a) < F(p) < B(p+a),$$

saa er altsaa ogsaa

$$A(p) < B(p+a) \quad \text{og} \quad A(p+a) < B(p).$$

For saa vidt nu $F(p)$ er en stedse voxende eller stedse aftagende Funktion, maa det samme være Tilfældet med $A(p)$ og $B(p)$, og Grænser for Intervallet mellem to Primtal ville derfor kunne bestemmes ved Opløsning af Ligningerne

$$A(p) = B(p+a) \quad \text{eller} \quad A(p+a) = B(p), \tag{195}$$

som ville give en højere Grænse for Tallet a. Sætter man n for p, hvor n er et vilkaarligt Tal, faar man Grænser for Afstandene fra n til de to nærmeste Primtal. Et ganske tilsvarende Ræsonnement kan anvendes, hvis p ikke betegner Primtallene, men en anden Række mærkelige Tal, og $F(n)$ er en Funktion, som kun varierer, naar et af disse passeres.

Som Exempel kunne vi benytte Tchebycheff's Grænser for $\psi(n)$ til deraf at bestemme Grænser for Intervallet mellem to Primtalpotenser, eftersom $\psi(n)$ kun forandres, naar n passerer en saadan. Grænserne for $\psi(n)$ kunne, naar Faktorerne til n gjøres lidt større end de af Tchebycheff angivne, altid erstattes ved Udtryk af Formen λn, hvor λ betegner en Konstant, saa at man kan sætte

$$An < \psi(n) < Bn,$$

hvor A og B betegne konstante Tal. Dette fører til følgende Ligning til Bestemmelse af Intervallet mellem n og den næste Primtalpotens

$$A(n+a) = Bn,$$

og deraf $$a = \frac{B-A}{A} \cdot n = \left(\frac{B}{A} - 1\right) n. \tag{196}$$

Man ser, at Grænsen bliver af Ordenen n.

For selve Summen af Primtallenes Logarithmer $\sum_2^n lp$, som kan findes udtrykt ved Hjælp af $\psi(n)$, har Tchebycheff angivet Grænserne

$$An - \frac{12}{5} A\sqrt{n} - \frac{5}{8l6}(ln)^2 - \frac{15}{4} ln - 3 < \sum_2^n lp < \frac{6}{5} An - A\sqrt{n} + \frac{5}{4l6}(ln)^2 + \frac{5}{2} ln + 2, \tag{197}$$

hvor A betegner en Konstant, nemlig

$$A = l \frac{2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{3}} . 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{\cdot}9213\ldots$$

Naar n er tilstrækkelig stor, kunne disse Grænser atter erstattes ved de videre

$$An - \frac{5}{2}\sqrt{n} < \sum_2^n lp < \frac{6}{5} An.$$

Bestemmes heraf a ved Ligningen

$$A(n+a) - \frac{5}{2}\sqrt{n+a} = \frac{6}{5} An,$$

findes

$$a = \frac{1}{5} n + \frac{25}{8A^2} + \frac{5}{2A}\sqrt{\frac{25}{16A^2} + \frac{6}{5} n},$$

eller, naar n er tilstrækkelig stor,

$$a < \frac{1}{5} n + 3\sqrt{n}. \tag{198}$$

Denne Grænse stemmer ganske godt med Tchebycheff's Resultat, idet han — ad en anden meget besværligere Vej — viser, at der er mindst et Primtal mellem λ og L, naar

$$\lambda = \frac{5}{6} L - 2\sqrt{L} - \frac{25(lL)^2}{16A\,l6} - \frac{125\,lL}{24A} - \frac{25}{2A}.$$

Men denne Grænse for Intervallet er sikkert meget videre, end den er i Virkeligheden, saaledes som det idetmindste for $n < 9 . 10^6$ fremgaar af Faktortavlerne. Selv om man for en Funktion af Primtal fandt Grænser af Formen

$$A . \sqrt[m]{n} < F(n) < B . \sqrt[m]{n}, \qquad A < B,$$

saa vilde disse endnu ikke føre til snævrere Grænser, end at a blev lig $\frac{B^m}{A^m} n$.

Havde man derimod fundet, at almindelig, idet k og λ ere Konstanter,

$$n + \lambda - k\sqrt{n} < \psi(n) < n + \lambda + k\sqrt{n}, \tag{199}$$

saa blev Intervallet bestemt ved Ligningen

$$n + a + \lambda - k\sqrt{n+a} = n + \lambda + k\sqrt{n}\,, \qquad (200)$$

der ved Omskrivning til $a = k(\sqrt{n} + \sqrt{n+a})$ strax viser, at Grænsen væsentlig blev af Ordenen $\sqrt{n}$, og at der mellem n^2 og $n^2 - 2kn$ maatte være mindst en Primtalpotens. Hvis den af Professor Oppermann [1]) angivne Erfaringssætning, at der mellem n^2 og $n(n\pm1)$ altid er mindst et Primtal, er rigtig, saa maatte der altsaa ogsaa mindst være en Primtalpotens. Dette vilde kun kunne opnaas ved at antage $k < \frac{1}{2}$, for saa vidt som Grænserne skulde være saa snævre som muligt.

Der vil efter det tidligere udviklede være god Grund til at antage, at $\psi(n)$ virkelig er indesluttet mellem Grænser af den angivne Form, og da Oppermann's Sætning er rigtig for $n^2 < 9.10^6$, saa tyder dette paa, at k virkelig maatte være $< \frac{1}{2}$. Her maa imidlertid erindres, at Oppermann's Sætning forudsætter, at n er et helt Tal, og at den for smaa Værdier af n ikke gjælder undtagen under denne Forudsætning. Navnlig mærkes Intervallet 14 mellem 113 og 127, men i dette Interval ligger der ogsaa 2 Primtalpotenser, 121 og 125, saa at Intervallet mellem Primtalpotenserne dog holder sig indenfor den ovenfor angivne Grænse. Det samme er Tilfældet for Intervallet mellem 7 og 11 samt 23 og 29. De følgende Primtalintervaller holde sig stedse under den ved Kvadratroden af Tallet bestemte Grænse, og i det forholdsvis store Interval mellem 1327 og 1361 ligger der endog en Primtalpotens $1331 = 11^3$. Det næste Interval, som frembyder den største Interesse, er 31397 til 31469, paa 72, men derefter stiger Intervallets Grænse kun ganske langsomt, saaledes at vi først ved 370261 træffe et Interval paa 112.

For muligen at komme til Klarhed over, hvorledes Intervallet i Virkeligheden varierer, sammenstilledes først det sidstnævnte Interval tillige med de af Glaisher anførte største Intervaller (over 130) i de første 9 Millioner i en Tavle og sammenlignedes dels med $\sqrt{n}$, dels med ln og $(ln)^2$, saaledes som vist i nedenstaaende Tavles sidste Del. Det vil af denne ses, at Intervallet stiger meget langsommere end $\sqrt{n}$, derimod synes det snarere at stige som ln eller maaske som $(ln)^2$. Da der i de anførte Intervaller ikke falder nogen Primtalpotens, faa saadanne ingen Indflydelse.

Mere Oplysning giver en lignende Sammenstilling for de lavere Primtalpotensers Vedkommende, og vi anføre derfor i Tavlens første Del en Oversigt over de mærkeligste af de i den første Del af Talrækken forekommende Intervaller mellem Primtalpotenser.

---

[1]) Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selskabs Forh. 1882.

n	Interval	$\sqrt{n}$	ln	$(ln)^2$	n	Interval	$\sqrt{n}$	ln	$(ln)^2$
2	1	1·4	0·69	0·5	370261	112	608	12·8	164·4
5	2	2·2	1·61	2·6	1357201	132	1165	14·1	199·4
13	3	3·6	2·56	6·6	1561919	132	1250	14·3	203·4
19	4	4·4	2·94	8·7	2010733	148	1418	14·5	210·7
32	5	5·7	3·47	12·0	3826019	138	1956	15·2	229·8
53	6	7·3	3·97	15·8	3933599	132	1983	15·2	230·6
89	8	9·4	4·49	20·1	4652353	154	2157	15·4	235·7
139	10	11·8	4·93	24·3	5888741	132	2427	15·6	243·0
199	12	14·1	5·29	28·0	6034247	146	2456	15·6	243·8
293	14	17·1	5·68	32·3	6371401	136	2524	15·7	245·5
887	20	29·8	6·79	46·1	6958667	134	2638	15·8	248·2
1129	22	33·6	7·03	49·4	7230331	148	2689	15·8	249·4
1331	30	36·5	7·19	51·7	7621259	140	2761	15·8	251·1
5591	32	74·8	8·63	74·5	7743233	138	2783	15·9	251·6
8467	34	92·0	9·04	81·8	8001359	132	2829	15·9	252·6
9551	36	97·7	9·16	84·0	8421251	152	2902	15·9	254·3
15683	44	125·2	9·66	93·3	8917523	140	2986	16·0	256·1
19609	52	140·0	9·88	97·7					
31397	72	177·2	10·35	107·2					

Intervallets Grænse viser sig her omtrent proportional med $(ln)^2$, men voxer dog forholdsvis lidt stærkere. Rimeligvis forholder Sagen sig i Virkeligheden saaledes, at denne Grænse maa kunne udtrykkes ved en stærkt konvergerende Række af Formen

$$a = \alpha + \beta ln + \gamma (ln)^2 + \delta (ln)^3 + \ldots ,$$

hvor Koefficienterne ere saaledes beskafne, at det tredie Led $\gamma (ln)^2$ er det dominerende Led for saa godt som alle de Værdier af n, som angives ved Faktortavlernes Udstrækning.

Man kunde være tilbøjelig til at formode, at de af Mertens bestemte Grænser for $\Sigma \frac{1}{p}$ maatte egne sig til Afledning af Grænser for Intervallet, men dette er ikke Tilfældet; dertil ere de meget for vide, og dette har atter sin Grund i, at de ere udledte ved Hjælp af Grænser for $\psi (n)$, som ere endnu mere vage end de af Tchebycheff angivne.

§ 10. Forklaring af Tabellerne.

Da alle Undersøgelser om Primtallenes Antal blandt andet ogsaa maa stiles mod det Formaal, at tilvejebringe Midler til at kontrollere Faktortavlernes Rigtighed, er det af Vigtighed at have Midler til at kunne jevnføre Formlernes Resultater med de virkelig op-

talte Primtalmængder. En saadan Sammenligning har nu kunnet iværksættes med betydelig større Udbytte end tidligere, efter at Glaisher med saa megen Udholdenhed har naaet at udfylde det Hul i Faktortavlerne, som tidligere fandtes, og Resultaterne af hans Primtal-optællinger nu foreligge fuldstændig i den i indeværende Aar (1883) udkomne Faktortavle for den 6te Million. Glaisher har tillige, som ovenfor omtalt, i Indledningen til denne foretaget udførlige Sammenligninger mellem $\theta(x)$ og de forskjellige Formler, der ere anvendte som Tilnærmelsesformler for denne Funktion. Vi kunne derfor i Hovedsagen nøjes med at henvise til denne Forfatter angaaende dette Punkt. For at blive i Stand til at kunne udføre en saadan Sammenligning havde jeg allerede i Efteraaret 1882 beregnet en Tavle over de dertil nødvendige Fundamentalværdier af Integrallogarithmen og ligeledes paabegyndt Beregningen af en Tabel over Funktionen $P(x)$. Da slige Tavler ingenlunde ere blevne overflødiggjorte ved Glaisher's Arbejde, men dette tvertimod har gjort Tilvejebringelsen af saadanne mere ønskelig, eftersom den Maade, hvorpaa Glaisher har udført Beregningen, er meget besværlig, saa meddele vi nedenfor disse Tavler. Tillige var der en Del andre Tabeller, hvis Betydning for de foreliggende Undersøgelser er iøjnefaldende, og det forekom mig derfor det rigtigste at samle disse og lade dem medfølge dette Arbejde, som de derved fuldstændiggjøre. Tillige give de et Middel til at kontrollere og bedømme Rigtigheden af de angivne Udviklinger, og det har derfor sin store Betydning at have dem let tilgængelige. — Med Hensyn til deres Omfang bemærkes, at de her paa nogle Punkter fremtræde i en lidt fyldigere Skikkelse end den, hvori de fandtes i det oprindelige Manuskript.

Tab. I. Tabel over Værdierne af reciproke Potenssummer og deres Logarithmer.

Denne Tavle indeholder i 1ste Spalte med 16 Decimaler Værdierne af $s(r)$ for $r = 2, 3 \ldots 35$. Disse Værdier ere oprindelig beregnede af Legendre, de ere aftrykte af De Morgan i hans Diff. and Integr. Calc. p. 554. Her ere de anførte efter Merrifield [1]). Da den Prøve, som faas ved Addition, idet $\sum_1^\infty (s(r) - 1) = 1$, stemmer, tør det forudsættes, at Værdierne ere korrekt angivne.

I 2den Spalte findes de naturlige Logarithmer af disse Tal efter Merrifield's Beregning; efter samme Forfatter ere ogsaa Tallene i 4de Spalte, reciproke Potenssummer af Primtallene alene, angivne; de ere beregnede af dem i 2den Spalte ved Anvendelse af Formlen (34).

Tallene i 3die Spalte, de Briggiske Logarithmer af $s(r)$, ere efter egen Beregning. De ere Resultatet af en dobbelt Beregning efter forskjellige Methoder og prøvede ved Sammenligning med de af Merrifield angivne naturlige Logarithmer.

[1]) Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XXXIII. $^7/_{11}$ 1881.

Tab. II. Værdier af e^x og $Li(e^x)$ fra $x = 5$ til $x = 20$ med Interval af 0·2.

De i denne Tavle anførte Tal ere, med Undtagelse af Integrallogarithmerne fra $x = 5$ til $x = 7$, efter selvstændig Beregning. Værdierne fremtræde med en noget forskjellig Nøjagtighed, hidrørende navnlig fra, at den sidste Del af Tavlen fra $x = 14$ er beregnet først, og det oprindelig kun var paatænkt at beregne $Li(e^x)$ med en saadan Nøjagtighed, at log $Li(e^x)$ kunde bestemmes med 12 rigtige Decimaler. Gjennemgaaende kan det sidste Ciffer ikke anses for fuldt paalideligt, navnlig naar det i Tavlen er skrevet med mindre Ciffer end de andre, derimod vil der, da der i det hele taget regnedes med flere Cifre end her anført, og der kun er angivet de Cifre, for hvilke de anvendte Prøver stemte, ikke kunne være Tale om Unøjagtighed i det næstsidste Ciffer. Angaaende Beregningen af $Li(e^x)$ henvises til det efterfølgende Tillæg. Værdierne af e^x ere fundne ved ligefrem Multiplikation, saaledes at e^x først bestemtes for hele x, og nogle af disse Værdier prøvedes ved logarithmisk Beregning af e^x for samme x. Derved fik man tillige en let Kontrol paa Rigtigheden af de mellemliggende Værdier. I Forbigaaende bemærkes, at de i Egen's «Allgemeine Arithmetik» (Berlin 1833—34) anførte Værdier af e^x ved denne Lejlighed fandtes at være meget unøjagtige. Værdierne af e^x i den første Del af Tavlen ere simpelthen fundne ved Logarithmeopslag; de tilsvarende Værdier af $Li(e^x)$ ere angivne efter Bretschneider[1]). For Kontrollens Skyld er i Tavlen Differensen mellem to paa hinanden følgende Værdier af $Li(e^x)$ opført imellem disse.

Tab. III. Værdier af Funktionen $P(e^x)$ fra $x = 0$ til $x = 20$ med Interval af 0·1, med tilhørende Logarithmer m. m., er ligeledes efter selvstændig Beregning.

Denne Tavle, i hvilken log $P(e^x)$ skal opfattes som det principale, er beregnet paa følgende Maade. Da $P(e^x) = \frac{x}{[1].1s_2} + \frac{x^2}{[2].2s_3} + \frac{x^3}{[3].3s_4} + \ldots$, se (86), saa var det let ved Hjælp af Tabel I at danne en Tavle over Logarithmerne til de sukcessive Koefficienter i denne Række. Den første Del af Tavlen beregnedes derefter Led for Led ved Hjælp af disse Koefficienter ad logarithmisk Vej, desuden beregnedes for nogle af Værdierne op til $x = 15$ de tilsvarende Værdier af $P(e^x)$. Denne Beregning blev imidlertid paa Grund af Leddenes Antal snart uoverkommelig, hvorfor jeg valgte en anden Fremgangsmaade. Da nemlig $Li(e^x) - C - lx = P(e^x) + \frac{1}{2}P(e^{\frac{x}{2}}) + \frac{1}{3}P(e^{\frac{x}{3}}) + \ldots$, saa vil Differensen $(Li(e^x) - C - lx) - P(e^x)$ omtrent være lig $\frac{1}{2}P(e^{\frac{x}{2}})$ og altsaa saa lille, at en Rækkeudvikling for denne lettere kan beregnes direkte. Jeg beregnede derfor først Værdierne af Rækken

[1]) Schlömilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik 1861.

$$Q(e^x) = \frac{s_2 - 1}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} + \ldots, \quad (201)$$

hvorefter fandtes

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - Q(e^x). \quad (202)$$

Naar x blev saa stor, at der ved Beregning af Rækken $Q(e^x)$ maatte medtages flere end en halv Snes Led, saa benyttedes Rækken

$$R(e^x) = (Li(e^x) - C - lx) - P(e^x) - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}})$$

$$= \frac{s_2 - 1 - 2^{-2}}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1 - 2^{-3}}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1 - 2^{-4}}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} \ldots, \quad (203)$$

som direkte beregnedes Led for Led, hvorefter det var let at bestemme

$$P(e^x) = (Li(e^x) - C - lx) - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}}) - R(e^x), \quad (204)$$

idet $P(e^{\frac{x}{2}})$ toges af den færdige Del af Tavlen.

Ved Udførelsen af Beregningen af Rækkerne $Q(e^x)$ og $R(e^x)$ benyttedes gjennemgaaende kun 5- eller 6-cifrede Logarithmer, saa at der i intet Tilfælde kunde gjøres Regning paa at faa flere end 4, højst 5 rigtige Decimaler, men dog altid tilstrækkelig mange til, at selve $P(e^x)$ kunde bestemmes saaledes, at i det mindste et Par Decimaler bleve rigtige, hvilket maa anses for nok. Som Prøve paa den rigtige Beregning af $Q(e^x)$ eller $R(e^x)$ anvendtes Differensprøver paa de 5-cifrede Logarithmer af disse Størrelser, idet det viste sig, at Logarithmerne af alle de her optrædende Funktioner variere saaledes, at 3die à 4de Differens blev forsvindende.

Paa Grund af denne Omstændighed fandtes det hensigtsmæssigere at danne en Tabel over $\log P(e^x)$ end over selve $P(e^x)$, saa meget mere, som man da ikke behøvede direkte at beregne $\log P(e^x)$ for alle de i Tavlen indgaaende Argumenter, men kunde nøjes med et ringere Antal og bestemme de mellemliggende Værdier ved Interpolation. Paa denne Maade fremkom da de i Tab. III indeholdte Værdier af $\log P(e^x)$.

I Tabellen have vi under $P(e^x)$ for $x > 2$ kun anført de Fundamentalværdier, paa hvilke Beregningen af Logarithmerne i næste Rubrik hvile. Vi have i disse Tal medtaget alle Cifre, som de fremkom ved Beregningen, uagtet det sidste ialfald er meget upaalideligt, det næstsidste tvivlsomt. I de anførte Logarithmer, af hvilke omtrent Halvdelen er bestemt ved Interpolation, vil derimod Unøjagtigheden kunne betragtes som gjennemgaaende kun værende til Stede i det sidste Ciffer, hvilket ogsaa vil fremgaa ved Betragtning af de tilføjede Differenser. Det vil ses, at disse variere saa regelmæssigt, at det til Bestemmelsen af $P(e^x)$ med et Par rigtige Decimaler op til omtrent $x = 14$ vil være tilstrækkeligt at interpolere med 2den Differens af Logarithmen, og naar man kun bryder sig om at faa det hele Tal i $P(e^x)$ rigtigt eller højst et Par Decimaler, vil den her angivne Tavle være tilstrækkelig til en let og hurtig Udførelse af Regningen.

Til Bestemmelse af Primtalmængden op til n efter Riemann's Formel, naar denne indskrænkes til $P(n)+1$, vil der da kun være at beregne ln og med denne som Argument af Tavlen udtage $\log P(n)$, hvorefter $P(n)$ findes ved et Opslag af Antilogarithmen. 7-cifrede Logarithmetavler ere ved denne Beregning tilstrækkelige for $n < 10$ Millioner og endnu noget derover. Denne Beregning kan med Hensyn til Vanskelighed ikke stilles ved Siden af Glaisher's Fremgangsmaade, og vi tro nok at turde paastaa, at Beregningen af «den lange Hale» ved den her angivne Methode er bleven en forholdsvis let Sag.

Da 7-cifrede Logarithmer af $P(e^x)$ for $x > 14$ kun kunne give det hele Tal i $P(e^x)$ fuldkommen nøjagtigt, og det er ønskeligt, navnlig hvis Tavlen skal fortsættes, at kunne erholde en større Nøjagtighed, have vi for $x > 10$ tilføjet i en særlig Rubrik $\log(Li(e^x) - P(e^x))$ med 6 Decimaler, beregnede ved Interpolation efter Briggs' Methode af de Fundamentalværdier, som ere anførte under $Li(e^x) - P(e^x)$. Denne Tavle er i Virkeligheden for Værdier af x fra $x = 8{\cdot}4$ beregnet før selve $P(e^x)$ og lagt til Grund ved Beregningen af de under $P(e^x)$ for $x = 10$ og opad anførte Fundamentalværdier.

Det skal endnu anføres, at Sammenligning med nogle af de af Glaisher beregnede Værdier har givet god Overensstemmelse mellem disse og dem, som findes ved Tabel III, saa at derved faas en Prøve paa dennes Rigtighed med Hensyn til de Cifre, hvorpaa det ved Anvendelsen kommer an.

Tab. IV. Antallet af Primtal i hvert Hundrede fra 1 til 10000 og i hvert Tusinde fra 1 til 100000, tilligemed tilsvarende Værdier af $\theta(x)$ for de første 100 Multipla henholdsvis af 100 og af 1000, og

Tab. V. Antallet af Primtal i hvert af de første 90 Hundredetusinder og tilsvarende Værdier af $\theta(x)$ for de første 90 Multipla af 10^5.

Disse Tavler angive Primtalmængder efter Optælling i Faktortavlerne. Den første er dannet ved Addition af de under Overskriften «Diff.» anførte Tal, som tildels ere tagne efter Gauss'[1]) Optælling, rettet af Meissel, og stemme med de af Glaisher i Faktortavlen for 6te Million angivne. Tallene i Tab. V ere paa lignende Maade dannede af en af Glaisher i «Report of British Association» for 1881 meddelt Tavle og senere sammenholdte med den af samme Forfatter meddelte Tabel i den nævnte Faktortavle. Det maa her ved Sammenligningen erindres, at Glaisher altid regner 1 med blandt Primtallene, hvorfor hans Tal skulle være en Enhed større end vore. Efter samme Forfatters Beregning meddeles den følgende Række Differenser $P(x) - \theta(x)$.

---

[1]) Tafel der Frequenz der Primzahlen. Gauss' Werke B. II.

Tab. VI. Sammenligning mellem Værdierne af θ og P for Tal op til e^{15}.

Hensigten med denne Tavle er angivet Side 250, hvor der tillige er givet Oplysning om, hvorledes de her optrædende Værdier af $\theta(e^x)$ ere fundne. Man ser, at selv i den første Del af Tavlen, hvor man skulde være tilbøjelig til at vente forholdsvis store Differenser, er $\theta - P$ dog altid meget nær ved 1, saasnart e^x overstiger 2 à 3 Enheder. Vi have endvidere dannet saavel Differensen $\theta - P - 1$ som dens Kvadrat og Middelafvigelsen, beregnet af hver 10 paa hinanden følgende Værdier i Tavlen, for derved at faa en Forestilling om, hvorledes denne Middelafvigelse varierer.

Tab. VII indeholder navnlig Værdierne af Funktionen $\psi(x)$ for Tallene fra 1 til 2000. Da Funktionen $\psi(x)$ ved disse Undersøgelser spiller en saa fremtrædende Rolle, forekom det mig ønskeligt at anstille en Sammenligning mellem denne Funktion og x, dels for at se, hvilken Værdi man rettest burde tillægge Konstanten k i Formlen $\psi(x) = x - k$, dels for at undersøge Størrelsen af Afvigelserne. I dette Øjemed dannedes Tabel VII, idet de naturlige Logarithmer af de dividerede Primtalpotenser med 8 Decimaler toges af Vega's Logarithmetabel (Udgaven af 1797) og adderedes, hvorved fremgik de under $\psi(n)$ opførte Tal. Da Vega for Tal > 1000 kun anfører Primtallenes Logarithmer (op til 10000), var en Fortsættelse af Tavlen længere end til $x = 1000$ ikke strengt nødvendig, da det fornødne Materiale til en videregaaende Sammenligning kan faas ved umiddelbar Addition i selve Logarithmetavlen. Da det dog var ønskeligt at se, hvorledes $\psi(x)$ forholdt sig i Nærheden af det store Primtalinterval imellem 1300 og 1400, har jeg fortsat Tavlen op til $x = 2000$. Det vil ses, at $\psi(x)$ slutter sig gjennemgaaende meget nøje til $x - 1$, men jeg har ikke anset det for nødvendigt at anstille nogen detailleret Sammenligning, hvilket for øvrigt nu er en let Sag. Tavlen indeholder endvidere dels Angivelse af ethvert af de forekommende Primtals Nummer i Rækken, dels for Tallene op til 300 de sammensatte Tals Primfaktorer samt Faktorerne $\mu(x)$, endvidere Værdier af Summerne $\Sigma \frac{1}{x} \mu(x)$, endelig ligeledes for de laveste Tals Vedkommende Værdier af $\sum_2^n E \frac{n}{x}$ tilligemed Antallet af de Divisorer i n, som ere større end 1.

I det hele taget er denne Tabel kun tilføjet, fordi den selv i den nuværende Skikkelse giver nogen Oplysning, for selve Afhandlingen spiller den kun en underordnet Rolle og kan i Betydning neppe stilles ved Siden af de andre, selv om det altid har sin store Interesse, at man sættes i Stand til at se, hvorledes de forskjellige numeriske Funktioner forholde sig i den første Del af Talrækken, en Undersøgelse, som kun kan gjøres ved en Tabel som den foreliggende, og saavidt mig bekjendt foreligger en saadan ikke noget andet Sted.

§ 11. Slutning.

Naar vi til Slutning kaste et Tilbageblik over de i det foregaaende fundne Resultater, saa lader det sig ikke nægte, at det vundne Udbytte ikke synes at staa i et passende Forhold til det store Apparat, der er sat i Bevægelse. Vi have nemlig ikke naaet noget «stringent Bevis for, at en af Faktortavlerne uafhængig Funktion $f(x)$ slutter sig saaledes til $\theta(x)$, at $\operatorname{Lim} \frac{\theta(x) - f(x)}{f(x)} = 0$». Alle de Midler, vi have anvendt, have kun kunnet føre til Paavisning af, at dette sandsynligvis gjælder om den Riemann'ske Funktion, som vi have betegnet ved $P(x) + 1$, og at navnlig dennes Afvigelse fra $\theta(x)$ altid ligger indenfor Grænser af Ordenen $\sqrt{x}$. Om end mange Tegn tyde paa, at der maa endnu andre og mere indgaaende Undersøgelser til, inden et saadant Bevis kan gives, saa er det dog ikke usandsynligt, at vi med Hensyn til dette specielle Problem vilde være naaede videre ved alene at fæste Opmærksomheden paa de asymptotiske Værdier af de optrædende Funktioner. Men vi have med velberaad Hu ikke stillet os paa dette Standpunkt, fordi det i Virkeligheden er af større Vigtighed at kjende Tilnærmelsesformler, som kunne bruges for endelige Værdier af Argumenterne, og saadanne med det samme ville give de asymptotiske Tilnærmelsesformler.

Men noget er der alligevel opnaaet ved vore Undersøgelser, og tilmed tro vi, at dette er noget væsentligt. Hvad først Riemann's mærkelige Formel angaar, da have vi ikke blot ført Beviset for selve det Riemann'ske Integrals Fremkomst tilbage til forholdsvis simple Forudsætninger, som tilstede en dybere Indsigt i dets egentlige Natur, men ogsaa ved den Kommentar, der er givet til selve Behandlingen af dette Integral, fjernet alle der forekommende Vanskeligheder og bragt Klarhed tilveje med Hensyn til Uoverensstemmelsen mellem Riemann og Genocchi, om hvilken denne sidste selv udtrykker sig meget beskedent. Alle Vanskeligheder ved Riemann's Udvikling ere derved førte tilbage til Bestemmelsen af Udviklingen for $ls(r)$, et Problem, som kan behandles uden Hensyn til Læren om Primtallene. Tilmed have vi med Hensyn til Rødderne α kunnet give visse Vink, som forhaabentlig ville kunne komme fremtidige Undersøgelser til Gode. Af mere praktisk Betydning er dog den særlig smukke Form, i hvilken vi have bragt Funktionen $P(x)$, en Form, som har den store Fordel at kunne bruges til en let numerisk Beregning.

Fremdeles tillægge vi det nogen Betydning, at vi have fremdraget en Del spredte og lidet kjendte taltheoretiske Undersøgelser og ved at bringe disse i Forbindelse med den af Tchebycheff indførte Funktion $\psi(x)$ vist, at ogsaa disse lede til at betragte, ikke Funktionen $\theta(x)$, men $\vartheta(x)$ som den, der i disse Undersøgelser maa spille Hovedrollen.

Vi have derved naaet ved Betragtninger fra selve Tallæren at paavise den Rolle, som Integrallogarithmen maa spille ved Bestemmelsen af Primtalmængden, og selv om

Begrundelsen ikke er ganske tilfredsstillende, er den dog tilstrækkelig fyldestgjørende, til at man ad denne Vej vilde være bleven ledet til at opstille $Li(x)$ som Tilnærmelsesformel for $\vartheta(x)$, selv om ikke Riemann's Formel var fremkommen tidligere. Tillige synes der at være en Mulighed for ved en videre Udvikling af denne Art Undersøgelser at naa til en sikker Paavisning af Fejlgrænsens Afhængighed af $\sqrt{x}$, men dertil vil dog rimeligvis først fordres en mere indgaaende Undersøgelse af de Divisionsrester, som fremkomme, naar et Tal divideres med alle foregaaende Tal i Talrækken. Hvad der nemlig i det foregaaende stadig har mødt os som en væsentlig Hindring for at indsnevre Grænserne, er blandt andet netop den Omstændighed, at man for Differenser af Formen $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$ ikke, selv om man har en Sum af saadanne, kan faa snævrere Grænser end 0 og 1. At der i denne Retning virkelig vil være noget at udrette, derom vidner blandt andet den i det foregaaende oftere omtalte Afhandling af Berger. Ogsaa en nøjere Drøftelse af de Problemer, som staa i Forbindelse med Rækker, som indeholde Faktorer $\mu(x)$, synes ved disse Undersøgelser at være meget ønskelig, ogsaa igjennem den vilde man muligvis naa til at udfylde Hullerne i den nærværende Fremstilling.

Hvilket Værd der kan tillægges denne, tilkommer det ikke Forfatteren at bedømme. Dog formener han, at der ved den her givne Paavisning af den indre Sammenhæng mellem de vigtigste hidtil anstillede Undersøgelser paa dette Gebet og navnlig af, at disse alle bestemt pege hen paa det selvsamme Resultat, er gjort et Arbejde, af hvis Udførelse paa en eller anden Maade et videre Fremskridt maa afhænge. Kun den, der er i Besiddelse af en Riemann's Geni, tør haabe paa et Felt, hvor saa mange store Mathematikere intet have kunnet udrette, at gjøre noget stort Fremskridt uden et forud gaaende grundigt Studium dels af Forgængernes Arbejder, dels af Videnskabens nuværende Hjælpemidler. Til at lette det dermed forbundne Arbejde tro vi, at nærværende Fremstilling maatte kunne bidrage noget. Men Arbejdet vil alligevel være stort, thi enhver, som har givet sig af med Tallenes Theori, vil vistnok sande Rigtigheden af den Sentens, som Degen efter Ovid satte som Motto paa sin «Canon Pellianus», og som vi ogsaa benytte som Motto for denne Afhandling:

«Est data lex numeris magnorum horrenda laborum».

Tillæg.

Om Beregning af Funktionen $Li(e^x)$.

Beregning af Fundamentalværdier af Integrallogarithmen er saavel af Bretschneider[1]) som af Glaisher[2]) udført ved direkte Beregning af de enkelte Led i Rækken

$$Li(e^x) = lx + C + \frac{x}{[1].1} + \frac{x^2}{[2].2} + \frac{x^3}{[3].3} + \ldots \tag{1}$$

Denne Fremgangsmaade er ret praktisk, saa længe x kun tillægges smaa Værdier, men bliver, efterhaanden som x voxer, uoverkommelig. Bretschneider har derfor ogsaa kun fortsat sin egentlige Tavle op til $x = 7{\cdot}5$, medens Glaisher standser ved $x = 5$ og for højere Værdier kun angiver $Li(e^x)$ for hele x op til $x = 15$ inkl. samt for $x = 20$ (med 11 à 12 Decimaler). I Faktortavlen til 6te Million angiver han yderligere Værdien af Lie^{16}. — Hvorledes afdøde Professor Oppermann, som ogsaa har beskjæftiget sig med Beregning af Integrallogarithmen, idet han dog indskrænkede sig til at søge $Li(e^x)$ for hele x indtil 20, og Stenberg[3]) have regnet, er først senere bleven mig fuldt bekjendt (se nedenfor). Derimod har Bessel[4]) benyttet en af ham angiven Rækkeudvikling.

Den af mig anvendte Fremgangsmaade bestaar i en sukcessiv Beregning af Integraler af Formen

$$I(a, x) = \int_a^{a+x} \frac{e^x}{x}\,dx = e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x}\,dx. \tag{2}$$

Naar nemlig her x antages mindre end a, saa kan Faktoren $\frac{1}{a+x}$ udvikles i Række, hvorved faas

$$e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x}\,dx = \frac{e^a}{a}\left[\int_0^x e^x dx - \int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \ldots\right]. \tag{3}$$

---

[1]) Schlömilch's Zeitschrift Vol. VI, p. 127—139.

[2]) Philosophical Transactions Vol. CLX, p. 367—388.

[3]) Tabulæ Logarithmi integralis, Malmogiæ 1861—1867—1871.

[4]) Abhandlungen Vol. II, p. 331.

Da $\frac{x}{a}$ er en ægte Brøk, vil denne Række konvergere, og naar man for x sætter en lille Størrelse, som er mindre end 1, medens a er et Tal, som er større end f. Ex. 7, saa kan man ved passende Valg af x bringe Rækken til at konvergere saa hurtig, som man ønsker.

Nu kunde man her behandle hvert af disse Integraler for sig og derved erholde en Række efter Potenser af x, hvilket f. Ex. Glaisher har gjort, men dette vilde være en Omvej. Det maa nemlig erindres, at det slet ikke kommer an paa at finde en Udvikling, der skal bruges til analytiske Undersøgelser, men at det meget snarere kommer an paa at fremstille en Række sukcessive ensartede Regneoperationer, hvis fortsatte Anvendelse kunne tjene til Beregning af den forelagte Rækkes enkelte Led uden Hensyn til, hvorledes disses analytiske Form monne være. Og denne Opgave er let at løse. Da man nemlig ved Beregningen af de enkelte Led faar Integraler af Formen $\int e^x x^n dx$, og ved delvis Integration haves

$$\int_0^x e^x x^n dx = \frac{e^x x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^x e^x x^{n+1} dx ,$$

eller omvendt

$$\int_0^x e^x x^{n+1} dx = e^x x^{n+1} - (n+1) \int_0^x e^x x^n dx , \tag{4}$$

saa ses, at hvert Led i Rækken (3) maa kunne findes, ved en rekurrent Beregning, af det nærmest foregaaende. Vi behøve ikke at bekymre os om, at dette derved optræder multipliceret med en Faktor $(n+1)$, da Rækkens Konvergens er sikker, og Fejlens Indflydelse neutraliseres ved den paafølgende Division med en Potens af a.

Idet vi altsaa ved A_n betegne Integralet $\int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^n dx$, hvor n er et helt Tal, saa haves først

$$I(a, x) = \frac{e^a}{a} (A_0 - A_1 + A_2 \ldots) , \tag{5}$$

samt almindelig

$$A_{n+1} = \frac{e^x x^{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{n+1}{a} A_n . \tag{6}$$

Da man har

$$A_0 = \int_0^x e^x dx = e^x - 1 ,$$

saa blive de første Led i Rækken (3): N_0, $-N_1$, $N_2 \ldots$ bestemte ved

$$N_0 = \frac{e^{a+x} - e^a}{a} , \quad N_1 = \frac{e^{a+x}\left(\frac{x}{a}\right) - 1.N_0}{a} , \quad N_2 = \frac{e^{a+x}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2.N_1}{a} \text{ o. s. v.} \tag{7}$$

Sætter man her a lig et helt Tal og $x = 1$, saa faas, naar man i Forvejen har beregnet en Tavle over Potenser af e^x og ved Division med a deraf danner Værdier af $e^{a+x} : a^n$, et forholdsvis let Middel til at bestemme Værdierne af Integralerne $\int_a^{a+1} \frac{e^x}{x} dx$. Paa denne Maade er Beregningen af Integrallogarithmen til e^x for $x = 16, 17, 18, 19$ og 20 udført for i Forbindelse med de af Glaisher angivne Værdier for hele x at kunne benyttes til Kontrol ved Beregningen af de mellemliggende Værdier i Tab. II.

Disse ere fundne ved at bemærke, at et Integral af Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx$$

ved Udvikling paa lignende Maade som ovenfor giver en Række af Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx = \frac{e^a}{a} \left[\int_{-x}^{+x} e^x dx - \int_{-x}^{+x} e^x \left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_{-x}^{+x} e^x \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \ldots \right] = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 \ldots, \quad (8)$$

hvor det vil vise sig, at Leddene med negative Fortegn blive af forholdsvis ringere Betydning end i foregaaende Tilfælde, saaledes at den numeriske Værdi af et negativt Led nærmer sig stærkt til den af det følgende positive.

For øvrigt fører delvis Integration her til ganske lignende Resultater som i foregaaende Tilfælde, kun med den Ændring, at man erholder

$$\left.\begin{aligned} N_0 &= \frac{e^{a+x} - e^{a-x}}{a}, \quad N_1 = \frac{(e^{a+x} + e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right) - 1.N_0}{a}, \quad N_2 = \frac{(e^{a+x} - e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2.N_1}{a}, \\ N_3 &= \frac{(e^{a+x} + e^{a-x})\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3.N_2}{a}, \quad \text{o. s. v.} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Da man kunde sætte Udtrykket for Integralet under Formen

$$\int_{-x}^{+x} \frac{e^{a+x}}{a+x} dx = \frac{e^a}{a} \int_{-x}^{+x} e^x dx - \frac{e^a}{a^2} \int_{-x}^{+x} e^x x\, dx + \frac{e^a}{a^3} \int_{-x}^{+x} e^x x^2 dx + \ldots \quad (10)$$

saa vilde man ogsaa, hvis man skal beregne en længere Række af Integraler svarende til samme x, kunne have Fordel af engang for alle at bestemme de numeriske Værdier af de Integraler, der optræde som Koefficienter til $\frac{e^a}{a^m}$, hvorefter en logarithmisk Beregning af det paagjældende Led er let, saafremt 7-cifrede Tavler give tilstrækkelig Nøjagtighed.

Det vil herefter være klart, hvorledes dette kunde tjene til paa en forholdsvis let Maade at beregne den i Tab. II meddelte Tavle. Først beregnedes nemlig Værdierne af e^x for Intervaller af $\frac{2}{10}$, og ved derefter i Formlen (8) at antage $x = \frac{1}{10}$ fandtes ved ligefrem Anvendelse af (9) Værdierne af N_0, N_1, N_2. De følgende Led bestemtes logarithmisk ved

Hjælp af de engang for alle beregnede Værdier af Integraler af Formen $\int_{-0\cdot1}^{+0\cdot1} e^x x^m dx$ for $m = 3, 4, 5$ o. s. v. Det var til Opnaaelsen af den Nøjagtighed, der ønskedes, ikke nødvendigt at medtage flere end 7 à 8 Led, da den anvendte Rækkeudvikling er meget stærkt konvergerende. For $a = 12\cdot5$ fik man f. Ex.

$$\begin{aligned} N_0 &= 4300\cdot55582\ 39903\ 5097 \\ -N_1 &= -1\cdot14605\ 10705\ 4886 \\ N_2 &= 9186\ 74014\ 4756 \\ -N_3 &= -4\ 40167\ 3 \\ N_4 &= 35297\ 20 \\ -N_5 &= -20\ 13 \\ N_6 &= 1\ 61 \end{aligned}$$

altsaa $$\int_{12\cdot4}^{12\cdot6} \frac{e^x}{x} dx = 4299\cdot50159\ 98323\ 9.$$

Af disse Integraler fremgik derefter ved Addition de sukcessive Værdier af $Li(e^x)$, og en fortrinlig Prøve paa Regningens Rigtighed havdes ved Sammenligning med de allerede beregnede Værdier for hele x. Vi fik herved tillige en Bekræftelse paa Rigtigheden af de af Glaisher beregnede Værdier, for saa vidt som disse kunde kontrolleres, altsaa med Undtagelse af det sidste Par Cifre.

Det vilde, hvis der fra Begyndelsen af havde været lagt an derpaa, kun have været en forholdsvis ringe Forøgelse af Arbejdet at beregne nogle flere Decimaler, idet der dertil navnlig kun vilde behøves nogle flere rigtige Cifre i Potenserne af e. Men som allerede bemærket var det oprindelig kun Hensigten at erholde 12 à 14 rigtige Cifre, og Meningen var derefter ved Beregning af Logarithmerne til disse og paafølgende Interpolation at danne en Tavle, ikke over selve $Li(e^x)$, men over dens Logarithmer. Thi, som det vil ses ved Sammenligning med Tab. III, vil en saadan Tavle paa Grund af den Lethed, hvormed der kan interpoleres i den, være saa bekvem, at den hidtil saa gjenstridige Funktion $Li(x)$ derved vilde være draget ind under den Række Funktioner, som kunde betragtes som fuldstændig bekjendte for alle Værdier op til den Grænse, som Tavlen angav.

Imidlertid blev ved nærmere Overvejelse denne Tanke opgivet, dels fordi det til Opnaaelsen af det specielle Formaal, hvortil den skulde tjene, befandtes hensigtsmæssigere at konstruere den Tavle, der er meddelt i Tab. III, dels fordi en Fundamentaltavle som den omtalte som Argument rettest burde indeholde ikke naturlige, men Briggiske Logarithmer.

I den Form, hvori Tavlen her foreligger, vil den i hvert Tilfælde kunne tjene til Fundament for en saadan Tavle, da Overgangen til andre Værdier end de Argumenter, der findes i Tavlen, forholdsvis let kan gjøres, enten ved Hjælp af de her angivne eller ved andre bekjendte Formler.

Senere Anm. Efter Fuldendelsen af det foreliggende Arbejde er jeg bleven bekjendt med to andre værdifulde Bidrag til Beregning af Integrallogarithmen. Det ene er den ovenfor nævnte Tavle af Stenberg, af hvilket Værk jeg tidligere kun kjendte anden Del, der gaar til $Li(10^{3\cdot5})$, medens det senere er lykkedes mig at erhverve et fuldstændigt Exemplar af Tavlen. Det viste sig da, at Forfatteren i en Pars III, udkommen 1871, har fortsat Tavlen fra $Li(10^{3\cdot5})$ indtil $Li(10^{10})$. Argumenterne ere de Briggiske Logarithmer med Interval 0·01. Værdierne ere beregnede med 14 Cifre, og der er tilføjet Differenser for at lette Interpolationen, medens Forfatteren dog ikke har været opmærksom paa Hensigtsmæssigheden af et tabulere log $Li(x)$ i Stedet for selve $Li(x)$, hvorved Tavlens Omfang vilde have kunnet indskrænkes betydeligt. Men i hvert Fald fortjener Arbejdet den største Anerkjendelse, og det maa kun beklages, at Tavlen synes at være en Sjældenhed. Hverken Glaisher eller afdøde Professor Oppermann, som maatte anses for at have særligt Kjendskab til, hvad der var udrettet paa dette Omraade, have omtalt denne sidste Del af Tavlen, og det Exemplar, hvoraf jeg er kommen i Besiddelse, har maattet forskaffes ad antikvarisk Vej.

I Indledningen til 3dje Del af sin Tavle gjør Stenberg Rede for, hvorledes denne Del er beregnet, og udvikler blandt andet de selvsamme Formler, som ere anførte ovenfor, tilligemed forskjellige andre lignende, som han har benyttet til Beregning af de Fundamentalværdier, som ligge til Grund for hans Tavle.

Det andet Bidrag indeholdes i afdøde Professor Oppermann's Papirer. Det er bekjendt, at denne Mathematiker beskjæftigede sig med Beregning af Integrallogarithmer, men om den Methode, han benyttede, har han ikke givet nogen Meddelelse. Af hans mundtlige Udsagn fremgik kun, at han anlagde sin Regning saaledes, at den med det samme kunde give Værdierne af de sukcessive Differentialkoefficienter. Heller ikke i hans Papirer indeholdes nogen sammenhængende Meddelelse om dette Punkt, men derimod findes de originale Beregninger, som han har foretaget, og af disse er det ikke vanskeligt at se, hvorledes Regningen er udført. Fremgangsmaaden, som i Virkeligheden er særdeles elegant, kan udtrykkes ved Formlerne

$$\left.\begin{aligned} Li(e^{\alpha+\xi}) - Li(e^{\alpha}) &= \frac{e^{\alpha}\xi}{\alpha}\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\xi + \frac{1}{3}A_2\xi^2 + \frac{1}{4}A_3\xi^3 + \ldots\right) \\ Li(e^{\alpha}) - Li(e^{\alpha-\xi}) &= \frac{e^{\alpha}\xi}{\alpha}\left(A_0 - \frac{1}{2}A_1\xi + \frac{1}{3}A_2\xi^2 - \frac{1}{4}A_3\xi^3 + \ldots\right), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

hvor

$$A_0 = 1\,, \qquad A_1 = 1 - \frac{A_0}{\alpha}\,, \qquad A_2 = \frac{1}{1.2} - \frac{A_1}{\alpha}\,, \qquad A_3 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{A_2}{\alpha}\,, \text{ o. s. v.} \quad (12)$$

Disse Formler tilstede, naar først Potenserne af e ere beregnede, en rekurrent Beregning af de enkelte Led og give derefter Værdierne af begge Integraler

$$\int_{a-\xi}^{a} \frac{e^x}{x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{a}^{a+\xi} \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Fordelen ved denne Methode bestaar i, at den giver en Kontrol paa Regningens Rigtighed, idet hvert enkelt af disse Integraler, naar Intervallet ξ overalt er det samme, bliver beregnet to Gange uden nogen synderlig Forøgelse i Arbejdet. Ved denne Fremgangsmaade har Oppermann fundet Differenserne af $Li(e^x)$ for hele x fra $x = 8$ til $x = 20$, og Regningerne forelaa i en saadan Form, at der kun behøvedes en Sammenstilling af Resultaterne for, ved at gaa ud fra de af Bretschneider angivne Værdier, at faa de tilsvarende Værdier af $Li(e^x)$.

Værdierne af e^x vare dels tagne efter Schulze[1]), dels fundne ved logarithmisk Beregning, saaledes at de tilsvarende Differenser af Integrallogarithmen vare bestemte med mindst 21 rigtige Decimaler, med Undtagelse af de tre sidste, hvor Oppermann kun havde faaet 12 rigtige Decimaler. For at komplettere Resultaterne har jeg selv foretaget Beregningen for de sidstes Vedkommende og anfører nedenfor alle de saaledes fundne Værdier af $Li(e^x)$ fra $x = 10$ til $x = 20$, idet $Li(e^{10})$ er anført efter Bretschneider. For saa vidt Regningen kunde sammenlignes med de af ham angivne Værdier for lavere x, fandtes disse rigtige. — Ligeledes er der tilføjet Værdierne af e^x, som for $x > 13$ ere beregnede af mig ved som Udgangspunkt at tage de af Oppermann med mange Cifre angivne Værdier af e^{10}, e^{11}, e^{12}, e^{13}, e^{15}, og som Kontrol den ligeledes af ham beregnede Værdi af e^{20}.

I Forbindelse med de af Bretschneider beregnede Værdier danne altsaa disse en Tabel over Fundamentalværdier af $Li(e^x)$ med 20 Decimaler op til e^{20}.

x	e^x	$Li\,(e^x)$
10	22026·465794 806716 516957 900645	2492·228976 241877 759138 44
11	59874·141715 197818 455326 485792	6071·406374 098611 507964 88
12	162754·791419 003920 808005 204898	14959·532666 397528 852292 46
13	442413·392008 920503 326102 775949	37197·688490 689035 604391 64
14	1202604·284164 776777 749236 770768	93192·513633 965371 298824 52
15	3269017·372472 110639 301855 046092	234955·852490 768303 578245 74
16	8886110·520507 872636 763023 740781	595560·998670 837001 850161 00
17	24154952·753575 298214 775435 180386	1516637·894042 516884 432797 43
18	65659969·137330 511138 786503 259060	3877904·330597 443502 996466 07
19	178482300·963187 260844 910033 788723	9950907·251046 844760 026002 53
20	485165195·409790 277969 106830 541541	25615652·664056 588820 481120 80

[1]) Schulze: Sammlung logar. trig. Tafeln. Berlin 1778. I, S. 188.

Tab. I. **Værdier af reciproke Potenssummer og deres Logarithmer.**

r	$s_r = \sum_1^\infty n^{-r}$	log nat. s_r	$\log_{10} s_r$	$\sum_2^\infty p^{-r}$	r
1	0·57721 56649 015329 $+ l\,\infty$			$-$0·31571 84520 73890 $+ ll\,\infty$	1
2	1·64493 40668 482264	0·49770 03024 70745	0·21614 84950 04624	0·45224 74200 41065	2
3	1·20205 69031 595943	0·18403 41753 91491	0·07992 50268 54140	0·17096 26392 99444	3
4	1·08232 32337 111382	0·07910 98730 67386	0·03435 69813 37211	0·07699 31397 64247	4
5	1·03692 77551 433700	0·03626 92596 49228	0·01574 84992 67003	0·03575 50164 83924	5
6	1·01734 30619 844491	0·01719 43876 02658	0·00746 74276 55540	0·01707 00868 50637	6
7	1·00834 92773 819227	0·00831 46149 69275	0·00361 09914 00306	0·00828 38328 56134	7
8	1·00407 73561 979443	0·00406 90663 07413	0·00176 71730 43808	0·00406 14053 66518	8
9	1·00200 83928 260822	0·00200 63787 01528	0·00087 13591 98682	0·00200 44675 74962	9
10	1·00099 45751 278180	0·00099 40808 65669	0·00043 17238 34526	0·00099 36035 74437	10
11	1·00049 41886 041194	0·00049 40665 33147	0·00021 45703 69039	0·00049 39472 69104	11
12	1·00024 60865 533080	0·00024 60562 78979	0·00010 68608 84198	0·00024 60264 70035	12
13	1·00012 27133 475785	0·00012 27058 18911	0·00005 32904 60051	0·00012 26973 67528	13
14	1·00006 12481 350587	0·00006 12462 59468	0·00002 65989 12524	0·00006 12443 96725	14
15	1·00003 05882 363070	0·00003 05877 68496	0·00001 32840 99072	0·00003 05873 02823	15
16	1·00001 52822 594086	0·00001 52821 42636	0·00000 66369 50219	0·00001 52820 26219	16
17	1·00000 76371 976379	0·00000 76371 68475	0·00000 33167 80126	0·00000 76371 39371	17
18	1·00000 38172 932650	0·00000 38172 85979	0·00000 16578 26237	0·00000 38172 78703	18
19	1·00000 19082 127166	0·00000 19082 10896	0·00000 08287 25462	0·00000 19082 09077	19
20	1·00000 09539 620339	0·00000 09539 61579	0·00000 04143 00249	0·00000 09539 61124	20
21	1·00000 04769 329868	0·00000 04769 32873	0·00000 02071 29315	0·00000 04769 32759	21
22	1·00000 02384 505027	0·00000 02384 50474	0·00000 01035 57725	0·00000 02384 50446	22
23	1·00000 01192 199260	0·00000 01192 19919	0·00000 00517 76553	0·00000 01192 19912	23
24	1·00000 00596 081891	0·00000 00596 08187	0·00000 00258 87507	0·00000 00596 08185	24
25	1·00000 00298 035035	0·00000 00298 03503	0·00000 00129 43497	0·00000 00298 03503	25
26	1·00000 00149 015548	0·00000 00149 01555	0·00000 00064 71663	0·00000 00149 01555	26
27	1·00000 00074 507118	0·00000 00074 50712	0·00000 00032 35803	0·00000 00074 50712	27
28	1·00000 00037 253340	0·00000 00037 25334	0·00000 00016 17892	0·00000 00037 25334	28
29	1·00000 00018 626597	0·00000 00018 62660	0·00000 00008 08943	0·00000 00018 62660	29
30	1·00000 00009 313274	0·00000 00009 31327	0.00000 00004 04470	0·00000 00009 31327	30
31	1·00000 00004 656629	0·00000 00004 65663	0·00000 00002 02235	0·00000 00004 65663	31
32	1·00000 00002 328312	0·00000 00002 32831	0·00000 00001 01117	0·00000 00002 32831	32
33	1·00000 00001 164155	0·00000 00001 16416	0·00000 00000 50559	0·00000 00001 16416	33
34	1·00000 00000 582077	0·00000 00000 58208	0·00000 00000 25279	0·00000 00000 58208	34
35	1·00000 00000 291038	0·00000 00000 29104	0·00000 00000 12640	0·00000 00000 29104	35

Tab. II. **Værdier af e^x og $Li(e^x)$ fra $x = 5$ til $x = 20$.**

x	e^x	$Li(e^x)$ med Diff.	x
5·0	148·41315 91025 76603	40·18527 53558	5·0
		6·43957 51500	
5·2	181·2722	46·62485 05058	5·2
		7·56862 52952	
5·4	221·4064	54·19347 58010	5·4
		8·90831 01733	
5·6	270·4264	63·10178 59743	5·6
		10·49900 13764	
5·8	330·2995	73·60078 73507	5·8
		12·38897 47917	
6·0	403·42879 34927 35123	85·98976 21424	6·0
		14·63597 97982	
6·2	492·7491	100·62574 19406	6·2
		17·30912 37596	
6·4	601·8451	117·93486 57002	6·4
		20·49113 57080	
6·6	735·0952	138·42600 14082	6·6
		24·28108 61632	
6·8	897·8474	162·70708 75714	6·8
		28·79765 57641	
7·0	1096·63315 84284 58599	191·50474 33355	7·0
		34·18306 43656	
7·2	1339·43076 43944 17830	225·68780 77011	7·2
		40·60779 51225	
7·4	1635·98442 99959 26540	266·29560 28236	7·4
		48·27627 56745	
7·6	1998·19589 51041 17959	314·57187 84981	7·6
		57·43371 18197	
7·8	2440·60197 76244 99077	372·00559 03178	7·8
		68·37430 92170	
8·0	2980·95798 70417 28275	440·37989 95348	8·0
		81·45116 70866	
8·2	3640·95030 73323 54722	521·83106 66214	8·2
		97·08818 63407	
8·4	4447·06674 76998 56086	618·91925 29621	8·4
		115·79440 51176	
8·6	5431·65959 13629 80322	734·71365 80797	8·6
		138·18125 98486	
8·8	6634·24400 62778 85159	872·89491 79283	8·8
		164·98337 27888	
9·0	8103·08392 75753 84008	1037·87829 07171	9·0
		197·08359 10581	
9·2	9897·12905 87439 15887	1234·96188 17752	9·2
		235·54315 21150	
9·4	12088·38073 02169 84398	1470·50503 38902	9·4
		281·63803 15825	
9·6	14764·78156 55772 72616	1752·14306 54727	9·6
		336·90274 79587	
9·8	18033·74492 78285 11246	2089·04581 34314	9·8
		403·18316 28105	
10·0	22026·46579 48067 16517	2492·22897 62419	10·0

Tab. II. Fortsættelse.

x	e^x	$Li(e^x)$ med Diff.	x
10·0	22026·46579 48067 16517	2492·22897 62419	10·0
		482·70013 40763	
10·2	26903·18607 42975 610 0	2974·92911 03182	10·2
		578·12626 55450	
10·4	32859·62567 44433 127 6	3553·05537 58632	10·4
		692·67846 13398	
10·6	40134·83743 08757 931 1	4245·73383 72030	10·6
		830·22955 70955	
10·8	49020·80113 63817 183 0	5075·96339 42985	10·8
		995·44297 98001	
11·0	59874·14171 51978 18455	6071·40637 40986	11·0
		1193·93521 05557	
11·2	73130·44183 34154 973 1	7265·34158 46543	11·2
		1432·47181 85356	
11·4	89321·72336 08055 557 0	8697·81340 31899	11·4
		1719·20403 61833	
11·6	1 09097·79927 65075 804 3	10417·01743 93732	11·6
		2063·95429 87441	
11·8	1 33252·35294 55309 397 4	12480·97173 81173	11·8
		2478·56092 82802	
12·0	1 62754·79141 90039 20808	14959·53266 63975	12·0
		2977·29426 71874	
12·2	1 98789·15114 29545 304 0	17936·82693 35849	12·2
		3577·35913 61378	
12·4	2 42801·61749 83235 410 2	21514·18606 97227	12·4
		4299·50159 98324	
12·6	2 96558·56529 82029 281 3	25813·68766 95551	12·6
		5168·74178 41202	
12·8	3 62217·44961 12478 850 2	30982·42945 36753	12·8
		6215·25903 70137	
13·0	4 42413·39200 89205 03326	37197·68849 06890	13·0
		7475·46122 98075	
13·2	5 40364·93724 66919 429	44673·14972 04965	13·2
		8993·27665 38509	
13·4	6 60003·22476 61566 277	53666·42637 43474	13·4
		10821·71502 68773	
13·6	8 06129·75912 39902 17 0	64488·14140 12247	13·6
		13024·75387 48385	
13·8	9 84609·11122 90349 847	77512·89527 60632	13·8
		15679·61835 79022	
14·0	12 02604·28416 47767 7775	93192·51363 39654	14·0
		18879·53689 49677	
14·2	14 68864·18965 40950	112072·05052 89332	14·2
		22737·07223 34554	
14·4	17 94074·77260 62144	134809·12276 23886	14·4
		27388·14854 46999	
14·6	21 91287·87560 68098	162197·27130 70885	14·6
		32996·92046 85554	
14·8	26 76445·05518 90967	195194·19177 56399	14·8
		39761·66071 51299	
15·0	32 69017·37247 21106	234955·85249 0768	15·0

Tab. II. Fortsættelse.

x	e^x	$Li(e^x)$	x
15·0	32 69017·37247 21106	234955·85249 077	15·0
		47921·87998 51 6	
15·2	39 92786·83521 0947 1	282877·73247 59 3	15·2
		57766·93796 06 1	
15·4	48 76800·85327 2266 3	340644·67043 65 4	15·4
		69646·45860 02 9	
15·6	59 56538·01318 4615 8	410291·12903 68 3	15·6
		83982·92895 99 2	
15·8	72 75331·95838 9587 8	494274·05799 67 5	15·8
		101286·94067 40 9	
16·0	88 86110·52050 78726	595560·99867 084	16·0
		122175·63004 05 1	
16·2	108 53519·89906 4418 0	717736·62871 13 5	16·2
		147394·98990 56 9	
16·4	132 56519·14046 3568 3	865131·61861 70 4	16·4
		177846·86860 34 7	
16·6	161 91549·04176 5286 2	1042978·48722 05 1	16·6
		214621·64329 08 6	
16·8	197 76402·65849 7775 5	1257600·13051 13 7	16·8
		259037·76353 11 5	
17·0	241 54952·75357 52982	1516637·89404 252	17·0
		312689·61360 86 9	
17·2	295 02925·91644 5458 4	1829327·50765 12 1	17·2
		377505·44818 36 0	
17·4	360 34955·08814 1639 1	2206832·95583 48 1	17·4
		455817·52685 48 8	
17·6	440 13193·53483 4043 9	2662650·48268 96 9	17·6
		550447·02275 70 1	
17·8	537 57835·97888 3656 2	3213097·50544 67 0	17·8
		664806·82515 07 4	
18·0	656 59969·13733 05111	3877904·33059 744	18·0
		803026·01631 89 9	
18·2	801 97267·40504 7113 4	4680930·34691 64 3	18·2
		970100·60347 55 1	
18·4	979 53163·60543 3230 4	5651030·95039 19 4	18·4
		1172076·05659 93 8	
18·6	1196 40264·19819 0513 4	6823107·00699 13 2	18·6
		1416268·37920 75 8	
18·8	1461 28948·67868 1312 7	8239375·38619 89 0	18·8
		1711531·86484 79 4	
19·0	1784 82300·96318 72608	9950907·25104 684	19·0
		2068583·42063 06 6	
19·2	2179 98774·67921 0457 3	12019490·67167 75 0	19.2
		2500395·43482 03 1	
19·4	2662 64304·66872 5045 3	14519886·10649 78 1	19·4
		3022671·70651 30 5	
19·6	3252 15956·12198 0556 3	17542557·81301 08 6	19·6
		3654424·03649 95 9	
19·8	3972 19665·80508 3821 7	21196981·84951 04 5	19·8
		4418670·81454 61 4	
20·0	4851 65195·40979 02780	25615652·66405 659	20·0

Tab. III. Værdier af Funktionen $P(e^x)$ med tilhørende Logarithmer m. m.

x	$P(e^x)$	log $P(e^x)$	Δ'	Δ''	x	$P(e^x)$	log $P(e^x)$	Δ	Δ''
0·0	0·0000 0				5·0	34·0967 0	1·532712		39
0·1	0·0629 2	8·79883			5·1		1·568428	35716	42
0·2	0·1303 3	9·11505			5·2	40·1963 3	1·604186	35758	46
0·3	0·2025 7	9·30657			5·3		1·639990	35804	48
0·4	0·2800 2	9·44719			5·4	47·4069 5	1·675842	35852	52
0·5	0·3630 5	9·55997			5·5	51·4927 0	1·711746	35904	56
0·6	0·4521 5	9·65528			5·6	55·9378 2	1·747706	35960	55
0·7	0·5477 9	9·73861			5·7		1·783721	36015	57
0·8	0·6504 5	9·81322			5·8	66·0378 7	1·819793	36072	61
0·9	0·7607 0	9·88121			5·9		1·855926	36133	62
1·0	0·8791 8	9·94408			6·0	78·0048 3	1·892121	36195	63
1·1	1·0065 1	0·00281			6·1		1·928379	36258	64
1·2	1·1434 1	0·05820			6·2	92·1936 6	1·964701	36322	65
1·3	1·2906 5	0·11081	5028		6·3		2·001088	36387	64
1·4	1·4490 8	0·16109	4831	−197	6·4	109·0283 0	2·037539	36451	67
1·5	1·6195 6	0·20940	4663	−168	6·5	118·592 2	2·074057	36518	66
1·6	1·8031 4	0·25603	4518	−145	6·6	129·0152 3	2·110641	36584	67
1·7	2·0008 3	0·30121	4393	−125	6·7		2·147292	36651	67
1·8	2·2138 2	0·34514	4285	−108	6·8	152·7601 2	2·184010	36718	67
1·9	2·4433 7	0·38799	4189	− 96	6·9		2·220795	36785	66
2·0	2·6908 4	0·42988	4107	− 82	7·0	180·9866 1	2·257646	36851	68
2·1		0·47095	4034	− 73	7·1		2·294565	36919	67
2·2	3·2456 0	0·51129	3970	− 64	7·2	214·5608 8	2·331551	36986	65
2·3		0·55099	3913	− 57	7·3		2·368602	37051	67
2·4	3·8915 5	0·59012	3864	− 49	7·4	254·5189 4	2·405720	37118	66
2·5		0·62876	3820	− 44	7·5		2·442904	37184	64
2·6	4·6446 9	0·66696	3781	− 39	7·6	302·1011 9	2·480152	37248	66
2·7		0·70477	3746	− 35	7·7		2·517466	37314	64
2·8	5·5236 4	0·74223	3717	− 29	7·8	358·7927 5	2·554844	37378	63
2·9		0·77940	3690	− 27	7·9		2·5922851	374411	633
3·0	6·5508 4	0·81630	3667	− 23	8·0	426·3728 2	2·6297895	375044	625
3·1		0·85297	3647	− 20	8·1		2·6673564	375669	617
3·2	7·7525 4	0·88944	3630	− 17	8·2	506·9731 8	2·7049850	376286	612
3·3	8·4283 9	0·92574	3615	− 15	8·3		2·7426748	376898	603
3·4	9·1598 9	0·96189	3603	− 12	8·4	603·1494 6	2·7804249	377501	597
3·5	9·9521 5	0·99792	35910	− 120	8·5		2·8182347	378098	590
3·6	10·8101 1	1·033830	35819	− 91	8·6	717·9654 0	2·8561035	378688	582
3·7		1·069649	35749	− 70	8·7		2·8940305	379270	575
3·8	12·7467 2	1·105398	35688	− 61	8·8	855·0963 8	2·9320150	379845	567
3·9		1·141086	35642	− 46	8·9		2·9700562	380412	559
4·0	15·0219 9	1·176728	35606	− 36	9·0	1018·951 0	3·0081533	380971	552
4·1		1·212334	35579	− 27	9·1		3·0463056	381523	544
4·2	17·6975 6	1·247913	35567	− 12	9·2	1214·821 1	3·0845123	382067	537
4·3		1·283480	35562	− 5	9·3		3·1227727	382604	529
4·4	20·8469 3	1·319042	35565	+ 3	9·4	1449·058 8	3·1610860	383133	520
4·5	22·626 0	1·354607	35575	+ 10	9·5		3·1994513	383653	515
4·6	24·5573 7	1·390182	35592	+ 17	9·6	1729·291 5	3·2378681	384168	506
4·7		1·425774	35616	+ 24	9·7		3·2763355	384674	499
4·8	28·9327 9	1·461390	35645	+ 29	9·8	2064·680 2	3·3148528	385173	490
4·9		1·497035	35677	+ 32	9·9		3·3534191	385663	484
5·0	34·0967 0	1·532712		+ 39	10·0	2466·231 6	3·3920338	386147	477

Tab. III. Fortsættelse.

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ'	Δ''	$Li(e^x)-P(e^x)$	$\log(Li(e^x)-P(e^x))$	Δ'	Δ''
					25·166 2		14112	
10·0	2466·231 6	3·3920338	386624	477		1·414929	14184	72
10·1		3·4306962	387093	469		1·429113	14258	74
10·2	2947·172 2	3·4694055	387555	462	27·756 9	1·443371	14332	74
10·3		3·5081610	388010	455		1·457703	14405	73
10·4	3523·399 7	3·5469620	388457	447		1·472108	14478	73
10·5		3·5858077	388897	440	30·661 0	1·486586	14550	72
10·6	4214·028 2	3·6246974	389332	435		1·501136	14623	73
10·7		3·6636306	389760	428		1·515759	14694	71
10·8	5042·043 6	3·7026066	390180	420	33·919 8	1·530453	14765	71
10·9		3·7416246	390595	415		1·545218	14837	72
11·0	6035·094 0	3·7806841	391002	407		1·560055	14908	71
11·1		3·8197843	391403	401	37·580 5	1·574963	14978	70
11·2	7226·442 3	3·8589246	391798	395		1·589941	15048	70
11·3		3·8981044	392187	389		1·604989	15117	69
11·4	8656·116 3	3·9373231	392570	383	41·697 1	1·620106	15187	70
11·5		3·9765801	392947	377		1·635293	15256	69
11·6	10372·292 5	4·0158748	393319	372		1·650549	15325	69
11·7		4·0552067	393683	364	46·331 2	1·665874	15392	67
11·8	12432·968 9	4·0945750	394042	359		1·681266	15459	67
11·9		4·1339792	394396	354		1·696725	15525	66
12·0	14907·980 2	4·1734188	394745	349	51·552 5	1·712250	15591	66
12·1		4·2128933	395089	344		1·727841	15656	65
12·2	17881·428 5	4·2524022	395427	338		1·743497	15721	65
12·3		4·2919449	395759	332	57·440 5	1·759218	15786	65
12·4	21454·619 3	4·3315208	396087	328		1·775004	15850	64
12·5		4·3711295	396410	323		1·790854	15913	63
12·6	25749·601 2	4·4107705	396728	318	64·086 5	1·806767	15974	61
12·7		4·4504433	397041	313		1·822741	16036	62
12·8	30913·441 0	4·4901474	397349	308		1·838777	16097	61
12·9		4·5298823	397653	304	71·593 4	1·854873	16157	60
13·0	37123·381 5	4·5696476	397952	299		1·871030	16218	61
13·1		4·6094428	398246	294		1·887248	16277	59
13·2	44593·069 6	4·6492674	398536	290	80·080 1	1·903525	16335	58
13·3		4·6891210	398823	287		1·919860	16392	57
13·4	53580·078 4	4·7290033	399105	282		1·936252	16449	57
13·5		4·7689138	399382	277	89·681 1	1·952701	16505	56
13·6	64394·986 4	4·8088520	399656	274		1·969206	16561	56
13·7		4·8488176	399926	270		1·985767	16615	54
13·8	77412·345 2	4·8888102	400192	266	100·550 1	2·002382	16669	54
13·9		4·9288294	4004531	2611		2·019051	16723	54
14·0	93083·928	4·96887471	4007114	2583		2·035774	16777	54
14·1		5·00894585	4009660	2546	112·862 9	2·052551	16829	52
14·2	111954·729	5·04904245	4012168	2508		2·069380	16880	51
14·3		5·08916413	4014641	2473		2·086260	16930	50
14·4	134682·302	5·12931054	4017079	2438	126·820 7	2·103190	16980	50
14·5		5·16948133	4019483	2404		2·120170	17030	50
14·6	162060·120	5·20967616	4021854	2371		2·137200	17079	49
14·7		5·24989470	4024191	2337	142·652 3	2·154279	17127	48
14·8	195045·802	5·29013661	4026497	2306		2·171406	17174	47
14·9		5·33040158	4028770	2273		2·188580	17220	46
15·0	234795·232	5·37068928		2242	160·620 2	2·205800		46

Tab. III. Fortsættelse.

x	$P(e^x)$	$\log P(e^x)$	Δ'	Δ''	$Li(e^x)-P(e^x)$	$\log(Li(e^x)-P(e^x))$	Δ'	Δ''
15·0	234795·232	5·37068928	4031012	2242	160·6202	2·205800	17266	46
15·1		5·41099940	4033225	2213		2·223066	17312	46
15·2	282703·800	5·45133165	4035407	2182		2·240378	17356	44
15·3		5·49168572	4037559	2152	181·0230	2·257734	17401	45
15·4	340456·247	5·53206131	4039683	2124		2·275135	17444	43
15·5		5·57245814	4041778	2095		2·292579	17487	43
15·6	410086·924	5·61287592	4043846	2068	204·2049	2·310066	17530	43
15·7		5·65331438	4045886	2040		2·327596	17571	41
15·8	494052·663	5·69377324	4047900	2014		2·345167	17611	40
15·9		5·73425224	40498873	19873	230·5568	2·362778	17652	41
16·0	595320·878	5·774751113	40518484	19611		2·380430	17692	40
16·1		5·815269597	40537843	19359		2·398122	17730	38
16·2	717476·102	5·855807440	40556953	19110	260·5267	2·415852	17769	39
16·3		5·896364393	40575819	18866		2·433621	17808	39
16·4	864848·851	5·936940212	40594445	18626		2·451429	17845	37
16·5		5·977534657	40612835	18390	294·6283	2·469274	17882	37
16·6	1042671·475	6·018147492	40630993	18158		2·487156	17919	37
16·7		6·058778485	40648922	17929		2·505075	17954	35
16·8	1257266·682	6·099427407	40666628	17706	333·4484	2·523029	17990	36
16·9		6·140094035	40684116	17488		2·541019	18024	34
17·0	1516275·615	6·180778151	40701386	17270		2·559043	18057	33
17·1		6·221479537	40718445	17059	377·6588	2·577100	18091	34
17·2	1828933·784	6·262197982	40735295	16850		2·595191	18125	34
17·3		6·302933277	40751941	16646		2·613316	18158	33
17·4	2206404·926	6·343685218	40768385	16444	428·0299	2·631474	18190	32
17·5		6·384453603	40784632	16247		2·649664	18222	32
17·6	2662185·019	6·425238235	40800684	16052		2·667886	18252	30
17·7		6·466038919	40816545	15861	485·4427	2·686138	18283	31
17·8	3212591·190	6·506855464	40832218	15673		2·704421	18313	30
17·9		6·547687682	40847707	15489		2·722734	18344	31
18·0	3877353·424	6·588535389	40863014	15307	550·9069	2·741078	18373	29
18·1		6·629398403	40878143	15129		2·759451	18402	29
18·2	4680330·758	6·670276546	40893095	14952		2·777853	18430	28
18·3		6·711169641	40907877	14782	625·5795	2·796283	18458	28
18·4	5650378·209	6·752077518	40922488	14611		2·814741	18486	28
18·5		6·793000006	40936932	14444		2·833227	18512	26
18·6	6822396·221	6·833936938	40951212	14280	710·7865	2·851739	18539	27
18·7		6·874888150	40965331	14119		2·870278	18566	27
18·8	8238601·202	6·915853481	40979291	13960		2·888844	18593	27
18·9		6·956832772	40993094	13803	808·0476	2·907437	18618	25
19·0	9950063·809	6·997825866	41006744	13650		2·926055	18642	24
19·1		7·038832610	41020244	13500		2·944697	18668	26
19·2	12018571·567	7·079852854	41033594	13350	919·1047	2·963365	18692	24
19·3		7·120886448	41046797	13203		2·982057	18716	24
19·4	14518884·326	7·161933245	41059857	13060		3·000773	18740	24
19·5		7·202993102	41072776	12919	1045·9561	3·019513	18764	24
19·6	17541465·676	7·244065878	41085554	12778		3·038277	18787	23
19·7		7·285151432	41098196	12642		3·057064	18809	22
19·8	21195790·957	7·326249628	41110702	12506	1190·8930	3·075873	18831	22
19·9		7·367360330	41123074	12372		3·094704	18854	23
20·0	25614353·817	7·408483404				3·113558	18875	21
					1356·5425	3·132433		

Tab. IV. **Antallet af Primtal i hvert Hundrede fra 1 til 10000 og i hvert Tusinde fra 1 til 100000, tilligemed tilsvarende Værdier af θ.**

x	Diff.	$\theta(100x)$	Diff.	$\theta(1000x)$	x	Diff.	$\theta(100x)$	Diff.	$\theta(1000x)$
0		0		0	50		669		5133
	25		168			12		89	
1		25		168	51		681		5222
	21		135			11		97	
2		46		303	52		692		5319
	16		127			10		89	
3		62		430	53		702		5408
	16		120			10		92	
4		78		550	54		712		5500
	17		119			13		90	
5		95		669	55		725		5590
	14		114			13		93	
6		109		783	56		738		5683
	16		117			12		99	
7		125		900	57		750		5782
	14		107			10		91	
8		139		1007	58		760		5873
	15		110			16		90	
9		154		1117	59		776		5963
	14		112			7		94	
10		168		1229	60		783		6057
	16		106			12		88	
11		184		1335	61		795		6145
	12		103			11		87	
12		196		1438	62		806		6232
	15		109			13		88	
13		211		1547	63		819		6320
	11		105			15		93	
14		222		1652	64		834		6413
	17		102			8		80	
15		239		1754	65		842		6493
	12		108			11		98	
16		251		1862	66		853		6591
	15		98			10		84	
17		266		1960	67		863		6675
	12		104			12		99	
18		278		2064	68		875		6774
	12		94			12		80	
19		290		2158	69		887		6854
	13		104			13		81	
20		303		2262	70		900		6935
	14		98			9		98	
21		317		2360	71		909		7033
	10		104			10		95	
22		327		2464	72		919		7128
	15		100			11		90	
23		342		2564	73		930		7218
	15		104			9		83	
24		357		2668	74		939		7301
	10		94			11		92	
25		367		2762	75		950		7393
	11		98			15		91	
26		378		2860	76		965		7484
	15		101			12		83	
27		393		2961	77		977		7567
	14		94			10		95	
28		407		3055	78		987		7662
	12		98			10		84	
29		419		3153	79		997		7746
	11		92			10		91	
30		430		3245	80		1007		7837
	12		95			11		88	
31		442		3340	81		1018		7925
	10		92			10		92	
32		452		3432	82		1028		8017
	11		106			14		89	
33		463		3538	83		1042		8106
	15		100			9		84	
34		478		3638	84		1051		8190
	11		94			8		87	
35		489		3732	85		1059		8277
	14		92			12		85	
36		503		3824	86		1071		8362
	13		99			13		88	
37		516		3923	87		1084		8450
	12		94			11		93	
38		528		4017	88		1095		8543
	11		90			13		76	
39		539		4107	89		1108		8619
	11		96			9		94	
40		550		4203	90		1117		8713
	15		88			11		89	
41		565		4291	91		1128		8802
	9		101			12		85	
42		574		4392	92		1140		8887
	16		102			11		97	
43		590		4494	93		1151		8984
	9		85			11		86	
44		599		4579	94		1162		9070
	11		96			15		87	
45		610		4675	95		1177		9157
	12		86			7		95	
46		622		4761	96		1184		9252
	12		90			13		84	
47		634		4851	97		1197		9336
	12		95			11		82	
48		646		4946	98		1208		9418
	8		89			12		87	
49		654		5035	99		1220		9505
	15		98			9		87	
50		669		5133	100		1229		9592

Tab. V. **Antallet af Primtal i hvert af de første 90 Hundredetusinder, tilligemed tilsvarende Værdier af θ.**

x	Diff.	$\theta(10^5.x)$	$P-\theta$	x	Diff.	$\theta(10^5.x)$	$P-\theta$
0		0		50		348514	
	9592				6458		
1		9592	− 6	51		354972	− 47
	8392				6436		
2		17984	− 3	52		361408	− 14
	8013				6493		
3		25997	+26	53		367901	− 46
	7863				6462		
4		33860	− 9	54		374363	− 55
	7678				6438		
5		41538	− 9	55		380801	− 47
	7560				6402		
6		49098	− 8	56		387203	− 11
	7445				6404		
7		56543	+13	57		393607	+ 16
	7408				6387		
8		63951	− 7	58		399994	+ 52
	7323				6436		
9		71274	− 9	59		406430	+ 32
	7224				6420		
10		78498	+29	60		412850	+ 22
	7216				6397		
11		85714	+22	61		419247	+ 27
	7225				6402		
12		92939	−41	62		425649	+ 21
	7081				6425		
13		100020	− 2	63		432074	− 15
	7103				6337		
14		107123	−24	64		438411	+ 31
	7028				6347		
15		114151	− 6	65		444758	+ 60
	6973				6402		
16		121124	+34	66		451160	+ 29
	7015				6338		
17		128139	+ 1	67		457498	+ 55
	6932				6375		
18		135071	+23	68		463873	+ 38
	6957				6411		
19		142028	− 7	69		470284	− 21
	6903				6365		
20		148931	− 9	70		476649	− 40
	6874				6369		
21		155805	− 4	71		483018	− 69
	6857				6306		
22		162662	− 6	72		489324	− 40
	6849				6348		
23		169511	−20	73		495672	− 59
	6791				6299		
24		176302	+ 4	74		501971	− 34
	6770				6301		
25		183072	+29	75		508272	− 16
	6809				6305		
26		189881	− 4	76		514577	− 8
	6765				6347		
27		196646	−10	77		520924	− 47
	6716				6245		
28		203362	+17	78		527169	+ 10
	6746				6364		
29		210108	− 3	79		533533	− 56
	6708				6274		
30		216816	− 1	80		539807	− 37
	6676				6250		
31		223492	+19	81		546057	0
	6717				6301		
32		230209	−17	82		552358	− 18
	6691				6283		
33		236900	−41	83		558641	− 23
	6639				6285		
34		243539	−26	84		564926	− 35
	6611				6245		
35		250150	+ 4	85		571171	− 11
	6575				6326		
36		256725	+58	86		577497	− 73
	6671				6281		
37		263396	+ 3	87		583778	− 95
	6590				6299		
38		269986	+17	88		590077	−139
	6624				6220		
39		276610	−14	89		596297	−108
	6535				6270		
40		283145	+33	90		602567	−132
	6628						
41		289773	−24				
	6540						
42		296313	− 3	100		664579	+ 87
	6510						
43		302823	+37	1000		5761460	+ 90
	6511						
44		309334	+67				
	6613						
45		315947	−16				
	6493						
46		322440	+13				
	6523						
47		328963	+ 2				
	6475						
48		335438	+30				
	6554						
49		341992	−30				
	6522						
50		348514	−66				

Tab. VI. Sammenligning mellem Værdierne af θ og P for Tal op til e^{15}.

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
0·1	1·1	0	0·1	−1·1	1·21	
0·2	1·2	0	0·1	−1·1	1·21	
0·3	1·3	0	0·2	−1·2	1·44	
0·4	1·5	0	0·3	−1·3	1·69	
0·5	1·6	0	0·4	−1·4	1·96	± 1·1
0·6	1·8	0	0·5	−1·5	2·25	
0·7	$2·0_1$	1	0·5	−0·5	·25	
0·8	2·2	1	0·7	−0·7	·49	
0·9	2·5	1	0·8	−0·8	·64	
1·0	2·7	1	0·9	−0·9	·81	
1·1	$3·0_{04}$	2	1·0	0·0	·00	
1.2	3·3	2	1·1	−0·1	·01	
1·3	3·7	2	1·3	−0·3	·09	
1·4	4·1	2	1·4	−0·4	·16	
1·5	4·5	2	1·6	−0·6	·36	± 0·4
1·6	$4·9_5$	2	1·8	−0·8	·64	
1·7	5·5	3	2·0	0·0	·00	
1·8	6·0	3	2·2	−0·2	·04	
1·9	6·7	3	2·4	−0·4	·16	
2·0	7·4	4	2·7	−0·3	·09	
2·1	8·2	4	3·0	0·0	·00	
2·2	9·0	4	3·2	−0·2	·04	
2·3	10·0	4	3·6	−0·6	·36	
2·4	$11·0_2$	5	3·9	0·1	·01	
2·5	12·2	5	4·2	−0·2	·04	± 0·3
2·6	13·5	6	4·6	0·4	·16	
2·7	14·9	6	5·1	−0·1	·01	
2·8	16·4	6	5·5	−0·5	·25	
2·9	18·2	7	6·0	0·0	·00	
3·0	20·1	8	6·6	0·4	·16	
3·1	22·2	8	7·1	−0·1	·01	
3·2	24·5	9	7·8	0·2	·04	
3·3	27·1	9	8·4	−0·4	·16	
3·4	30·0	10	9·2	−0·2	·04	
3·5	33·1	11	10·0	0·0	·00	± 0·4
3·6	36·6	11	10·8	−0·8	·64	
3·7	40·4	12	11·7	−0·7	·49	
3·8	44·7	14	12·7	0·3	·09	
3·9	49·4	15	13·8	0·2	·04	
4·0	54·6	16	15·0	0·0	·00	
4·1	60·3	17	16·3	−0·3	·09	
4·2	66·7	18	17·7	−0·7	·49	
4·3	73·7	21	19·2	0·8	·64	
4·4	81·5	22	20·8	0·2	·04	
4·5	90·0	24	22·6	0·4	·16	± 0·7
4·6	99·5	25	24·6	−0·6	·36	
4·7	110·0	29	26·7	1·3	1·69	
4·8	121·5	30	28·9	0·1	·01	
4·9	134·3	32	31·4	−0·4	·16	
5·0	148·4	34	34·1	−1·1	1·21	

Tab. VI. Fortsættelse.

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
5·1	164·0	38	37·0	0·0	·00	
5·2	181·3	42	40·2	0·8	·64	
5·3	200·3	46	43·7	1·3	1·69	
5·4	221·4	47	47·4	—1·4	1·96	
5·5	244·7	53	51·5	0·5	·25	
5·6	270·4	57	55·9	0·1	·01	± 0·8
5·7	298·9	62	60·8	0·2	·04	
5·8	330·3	66	66·0	—1·0	1·00	
5·9	365·0	72	71·8	—0·8	·64	
6·0	403·4	79	78·0	0·0	·00	
6·1	445·9	86	84·8	0·2	·04	
6·2	492·7	94	92·2	0·8	·64	
6·3	544·6	100	100·2	—1·2	1·44	
6·4	601·8	110	109·0	0·0	·00	
6·5	665·1	121	118·6	1·4	1·96	
6·6	735·1	130	129·0	0·0	·00	± 0·7
6·7	812·4	141	140·4	—0·4	·16	
6·8	897·8	154	152·8	0·2	·04	
6·9	992·3	167	166·3	—0·3	·09	
7·0	1096·6	183	181·0	1·0	1·00	
7·1	1212·0	197	197·0	—1·0	1·00	
7·2	1339·4	217	214·6	1·4	1·96	
7·3	1480·3	233	233·7	—1·7	2·89	
7·4	1636·0	258	254·5	2·5	6·25	
7·5	1808·0	279	277·3	0·7	·49	± 1·4
7·6	1998·2	302	302·1	—1·1	1·21	
7·7	2208·3	329	329·2	—1·2	1·44	
7·8	2440·6	361	358·8	1·2	1·44	
7·9	2697·3	392	391·1	—0·1	·01	
8·0	2981·0	429	426·4	1·6	2·56	
8·1	3294·5	462	464·9	—3·9	15·21	
8·2	3640·9	509	507·0	1·0	1·00	
8·3	4023·9	556	552·9	2·1	4·41	
8·4	4447·1	604	603·1	—0·1	·01	
8·5	4914·8	656	658·0	—3·0	9·00	± 1·9
8·6	5431·7	717	718·0	—2·0	4·00	
8·7	6002·9	783	783·5	—1·5	2·25	
8·8	6634·2	855	855·1	—1·1	1·21	
8·9	7332·0	934	933·4	—0·4	·16	
9·0	8103·1	1019	1019·0	—1·0	1·00	
9·1	8955·3	1113	1112·5	—0·5	·25	
9·2	9897·1	1220	1214·8	4·2	17·64	
9·3	10938·0	1328	1326·7	0·3	·09	
9·4	12088·4	1446	1449·1	—4·1	16·81	
9·5	13359·7	1585	1582·9	1·1	1·21	± 2·5
9·6	14764·8	1729	1729·3	—1·3	1·69	
9·7	16317·6	1892	1889·4	1·6	2·56	
9·8	18033·7	2065	2064·7	—0·7	·49	
9·9	19930·4	2253	2256·4	—4·4	19·36	
10·0	22026·5	2466	2466·2	—1·2	1·44	

Tab. VI. Fortsættelse.

x	e^x	$\theta(e^x)$	$P(e^x)$	$D = \theta - P - 1$	D^2	$\sqrt{\frac{1}{10}\Sigma D^2}$
10·1	24343·0	2703	2695·9	6·1	37·21	
10·2	26903·2	2952	2947·2	3·8	14·44	
10·3	29732·6	3223	3222·3	− 0·3	·09	
10·4	32859·6	3523	3523·4	− 1·4	1·96	
10·5	36315·5	3854	3853·1	− 0·1	·01	
10·6	40134·8	4216	4214·0	1·0	1·00	± 4·8
10·7	44355·9	4612	4609·2	2·8	7·84	
10·8	49020·8	5038	5042·0	− 5·0	25·00	
10·9	54176·4	5515	5516·0	− 2·0	4·00	
11·0	59874·1	6048	6035·1	+11·9	141·61	
11·1	66171·2	6605	6603·7	0·3	·09	
11·2	73130·4	7230	7226·4	2·6	6·76	
11·3	80821·6	7911	7908·7	1·3	1·69	
11·4	89321·7	8650	8656·1	− 7·1	50·41	
11·5	98715·8	9476	9475·1	− 0·1	·01	± 4·3
11·6	109097·8	10372	10372·3	− 1·3	1·69	
11·7	120571·7	11346	11355·5	−10·5	110·25	
11·8	133252·4	12434	12433·0	0·0	·00	
11·9	147266·6	13613	13613·8	− 1·8	3·24	
12·0	162754·8	14912	14908·0	3·0	9·00	
12·1	179871·9	16327	16326·5	− 0·5	·25	
12·2	198789·2	17885	17881·4	2·6	6·76	
12·3	219696·0	19585	19586·0	− 2·0	4·00	
12·4	242801·6	21455	21454·6	− 0·6	·36	
12·5	268337·3	23511	23503·3	6·7	44·89	± 8·5
12·6	296558·6	25733	25749·6	−17·6	309·76	
12·7	327747·9	28228	28212·6	14·4	207·36	
12·8	362217·4	30922	30913·4	7·6	57·76	
12·9	400312·2	33885	33875·2	8·8	77·44	
13·0	442413·4	37128	37123·4	3·6	12·96	
13·1	488942·4	40684	40685·8	− 2·8	7·84	
13·2	540364·9	44598	44593·1	3·9	15·21	
13·3	597195·6	48890	48878·8	10·2	104·04	
13·4	660003·2	53565	53580·1	−16·1	259·21	
13·5	729416·4	58742	58737·3	3·7	13·69	±17·2
13·6	806129·8	64411	64395·0	15·0	225·00	
13·7	890911·2	70615	70602·1	11·9	141·61	
13·8	984609·1	77395	77412·3	−18·3	334·89	
13·9	1088161·4	84858	84884·7	−27·7	767·29	
14·0	1202604·3	93118	93083·9	33·1	1095·61	
14·1	1329083·3	102083	102081·2	0·8	·64	
14·2	1468864·2	111957	111954·7	1·3	1·69	
14·3	1623346·0	122773	122790·3	−18·3	334·89	
14·4	1794074·8	134651	134682·3	−32·3	1043·29	
14·5	1982759·3	147727	147734·3	− 8·3	68·89	±25·4
14·6	2191287·9	162089	162060·1	27·9	778·41	
14·7	2421747·6	177773	177784·8	−12·8	163·84	
14·8	2676445·1	195041	195045·8	− 5·8	33·64	
14·9	2957929·2	213971	213994·0	−24·0	576·00	
15·0	3269017·4	234855	234795·2	58·8	3457·44	

Tab. VII. **Værdier af Funktionen $\psi(n)$ og andre numeriske Funktioner.**

n	Faktorer	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
1	—	0	1	1·0000 0000	0	0	0·0000 0000	1
2	—	1	−1	0·5000 0000	1	1	0·6931 4718	2
3	—	2	−1	·1666 6667	1	2	1·7917 5947	3
4	2^2		0		2	4	2·4849 0665	4
5	—	3	−1	— ·0333 3333	1	5	4·0943 4456	5
6	2 . 3		1	·1333 3333	3	8		6
7	—	4	−1	— ·0095 2381	1	9	6·0402 5471	7
8	2^3		0		3	12	6·7334 0189	8
9	3^2		0		2	14	7·8320 1418	9
10	2 . 5		1	·0904 7619	3	17		10
11	—	5	−1	— ·0004 3290	1	18	10·2299 0945	11
12	2^2 . 3		0		5	23		12
13	—	6	−1	— ·0773 5598	1	24	12·7948 5881	13
14	2 . 7		1	— ·0059 2741	3	27		14
15	3 . 5		1	·0607 3926	3	30		15
16	2^4		0		4	34	13·4880 0599	16
17	—	7	−1	·0019 1573	1	35	16·3212 1933	17
18	2 . 3^2		0		5	40		18
19	—	8	−1	— ·0507 1585	1	41	19·2656 5831	19
20	2^2 . 5		0		5	46		20
21	3 . 7		1	— ·0030 9680	3	49		21
22	2 . 11		1	·0423 7575	3	52		22
23	—	9	−1	— ·0011 2052	1	53	22·4011 5253	23
24	2^3 . 3		0		7	60		24
25	5^2		0		2	62	24·0105 9044	25
26	2 . 13		1	·0373 4102	3	65		26
27	3^3		0		3	68	25·1092 0273	27
28	2^2 . 7		0		5	73		28
29	—	10	−1	·0028 5826	1	74	28·4764 9856	29
30	2 . 3 . 5		−1	— ·0304 7507	7	81		30
31	—	11	−1	— ·0627 3314	1	82	31·9104 8576	31
32	2^5		0		5	87	32·6036 3294	32
33	3 . 11		1	— ·0324 3011	3	90		33
34	2 . 17		1	— ·0030 1834	3	93		34
35	5 . 7		1	·0255 5309	3	96		35
36	2^2 . 3^2		0		8	104		36
37	—	12	−1	— ·0014 7394	1	105	36·2145 5085	37
38	2 . 19		1	·0248 4185	3	108		38
39	3 . 13		1	·0504 8288	3	111		39
40	2^3 . 5		0		7	118		40
41	—	13	−1	·0260 9263	1	119	39·9281 2292	41
42	2 . 3 . 7		−1	·0022 8311	7	126		42
43	—	14	−1	— ·0209 7271	1	127	43·6893 2304	43
44	2^2 . 11		0		5	132		44
45	3^2 . 5		0		5	137		45
46	2 . 23		1	·0007 6643	3	140		46
47	—	15	−1	— ·0205 1018	1	141	47·5394 7064	47
48	2^4 . 3		0		9	150		48
49	7^2		0		2	152	49·4853 8079	49
50	2 . 5^2		0		5	157		50

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
51	3 . 17		1	−0·0009 0233	3	160		51
52	2^2 . 13		0		5	165		52
53	—	16	−1	— ·0197 7026	1	166	53·4556 7270	53
54	2 . 3^3		0		7	173		54
55	5 . 11		1	— ·0015 8844	3	176		55
56	2^3 . 7		0		7	183		56
57	3 . 19		1	·0159 5542	3	186		57
58	2 . 29		1	·0331 9680	3	189		58
59	—	17	−1	·0162 4765	1	190	57·5332 1014	59
60	2^2 . 3 . 5		0		11	201		60
61	—	18	−1	— ·0001 4580	1	202	61·6440 8400	61
62	2 . 31		1	·0159 8324	3	205		62
63	3^2 . 7		0		5	210		63
64	2^6		0		6	216	62·3372 3118	64
65	5 . 13		1	·0313 6785	3	219		65
66	2 . 3 . 11		−1	·0162 1634	7	226		66
67	—	19	−1	·0012 9096	1	227	66·5419 2380	67
68	2^2 . 17		0		5	232		68
69	3 . 23		1	·0157 8372	3	235		69
70	2 . 5 . 7		−1	·0014 9800	7	242		70
71	—	20	−1	— ·0125 8650	1	243	70·8046 0368	71
72	2^3 . 3^2		0		11	254		72
73	—	21	−1	— ·0262 8513	1	255	75·0950 6312	73
74	2 . 37		1	— ·0127 7162	3	258		74
75	3 . 5^2		0		5	263		75
76	2^2 . 19		0		5	268		76
77	7 . 11		1	·0002 1539	3	271		77
78	2 . 3 . 13		−1	— ·0126 0512	7	278		78
79	—	22	−1	— ·0252 6335	1	279	79·4645 1097	79
80	2^4 . 5		0		9	288		80
81	3^4		0		4	292	80·5631 2326	81
82	2 . 41		1	— ·0130 6823	3	295		82
83	—	23	−1	— ·0251 1642	1	296	84·9819 6387	83
84	2^2 . 3 . 7		0		11	307		84
85	5 . 17		1	— ·0133 5171	3	310		85
83	2 . 43		1	— ·0017 2381	3	313		86
87	3 . 29		1	0097 7045	3	316		87
88	2^3 . 11		0		7	323		88
89	—	24	−1	— ·0014 6551	1	324	89·4706 0024	89
90	2 . 3^2 . 5		0		11	335		90
91	7 . 13		1	·0095 2350	3	338		91
92	2^2 . 23		0		5	343		92
93	3 . 31		1	·0202 7619	3	346		93
94	2 . 47		1	·0309 1449	3	349		94
95	5 . 19		1	·0414 4081	3	352		95
96	2^5 . 3		0		11	363		96
97	—	25	−1	·0311 3153	1	364	94·0453 1122	97
98	2 . 7^2		0		5	369		98
99	3^2 . 11		0		5	374		99
100	2^2 . 5^2		0		8	382		100

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
101	—	26	−1	0·0212 3054	1	383	98·6604 3174	101
102	2 . 3 . 17		−1	·0114 2662	7	390		102
103	—	27	−1	·0017 1788	1	391	103·2951 6073	103
104	2^3 . 13		0		7	398		104
105	3 . 5 . 7		−1	— ·0078 0583	7	405		105
106	2 . 53		1	·0016 2803	3	408		106
107	—	28	−1	— ·0077 1777	1	409	107·9679 8956	107
108	2^2 . 3^3		0		11	420		108
109	—	29	−1	— ·0167 9208	1	421	112·6593 3744	109
110	2 . 5 . 11		−1	— ·0259 8299	7	428		110
111	3 . 37		1	— ·0169 7398	3	431		111
112	2^4 . 7		0		9	440		112
113	—	30	−1	— ·0258 2354	1	441	117·3867 2526	113
114	2 . 3 . 19		−1	— ·0345 9546	7	448		114
115	5 . 23		1	— ·0258 9981	3	451		115
116	2^2 . 29		0		5	456		116
117	3^2 . 13		0		5	461		117
118	2 . 59		1	— ·0174 2524	3	464		118
119	7 . 17		1	— ·0090 2288	3	467		119
120	2^3 . 3 . 5		0		15	482		120
121	11^2		0		2	484	119·7846 2053	121
122	2 . 61		1	— ·0008 2516	3	487		122
123	3 . 41		1	·0073 0493	3	490		123
124	2^2 . 31		0		5	495		124
125	5^3		0		3	498	121·3940 5844	125
126	2 . 3^2 . 7		0		11	509		126
127	—	31	−1	— ·0005 6909	1	510	126·2382 4553	127
128	2^7		0		7	517	126·9313 9271	128
129	3 . 43		1	·0071 8285	3	520		129
130	2 . 5 . 13		−1	— ·0005 0946	7	527		130
131	—	32	−1	— ·0081 4305	1	528	131·8065 9003	131
132	2^2 . 3 . 11		0		11	539		132
133	7 . 19		1	— ·0006 2425	3	542		133
134	2 . 67		1	·0068 3844	3	545		134
135	3^2 . 15		0		7	552		135
136	2^3 . 17		0		7	559		136
137	—	33	−1	— ·0004 6083	1	560	136·7265 7096	137
138	2 . 3 . 23		−1	— ·0077 0721	7	567		138
139	—	34	−1	— ·0149 0146	1	568	141·6610 4489	139
140	2^2 . 5 . 7		0		11	579		140
141	3 . 47		1	— ·0078 0926	3	582		141
142	2 . 71		1	— ·0007 6700	3	585		142
143	11 . 13		1	·0062 2600	3	558		143
144	$2^4 \cdot 3^2$		0		14	602		144
145	5 . 29		1	·0131 2256	3	605		145
146	2 . 73		1	·0199 7187	3	608		146
147	3 . 7^2		0		5	613		147
148	2^2 . 37		0		5	618		148
149	—	35	−1	·0132 6046	1	619	146·6649 9120	149
150	2 . 3 . 5^2		0		11	630		150

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
151	—	36	−1	0·0066 3795	1	631	151·6822 7104	151
152	$2^3 . 19$		0		7	638		152
153	$3^2 . 17$		0		5	643		153
154	$2 . 7 . 11$		−1	·0001 4444	7	650		154
155	$5 . 31$		1	·0065 9605	3	653		155
156	$2^2 . 3 . 13$		0		11	664		156
157	—	37	−1	·0002 2663	1	665	156·7385 1685	157
158	$2 . 79$		1	·0065 5574	3	668		158
159	$3 . 53$		1	·0128 4505	3	671		159
160	$2^5 . 5$		0		11	682		160
161	$7 . 23$		1	·0190 5623	3	685		161
162	$2 . 3^4$		0		9	694		162
163	—	38	−1	·0129 2126	1	695	161·8322 6705	163
164	$2^2 . 41$		0		5	700		164
165	$3 . 5 . 11$		−1	·0068 6065	7	707		165
166	$2 . 83$		1	·0128 8475	3	710		166
167	—	39	−1	·0068 9672	1	711	166·9502 6086	167
168	$2^3 . 3 . 7$		0		15	726		168
169	13^2		0		2	728	169·5152 1022	169
170	$2 . 5 . 17$		−1	·0010 1437	7	735		170
171	$3^2 . 19$		0		5	740		171
172	$2^2 . 43$		0		5	745		172
173	—	40	−1	− ·0047 6598	1	746	174·6685 0181	173
174	$2 . 3 . 29$		−1	− ·0105 1310	7	753		174
175	$5^2 . 7$		0		5	758		175
176	$2^4 . 11$		0		9	767		176
177	$3 . 59$		1	− ·0048 6338	3	770		177
178	$2 . 79$		1	·0007 5459	3	773		178
179	—	41	−1	− ·0048 3200	1	774	179·8558 8762	179
180	$2^2 . 3^2 . 5$		0		17	791		180
181	—	42	−1	− ·0103 5686	1	792	185·0543 8465	181
182	$2 . 7 . 13$		−1	− ·0158 5137	7	799		182
183	$3 . 61$		1	− ·0103 8688	3	802		193
184	$2^3 . 23$		0		7	809		184
185	$5 . 37$		1	− ·0049 8148	3	812		185
186	$2 . 3 . 31$		−1	− ·0103 5782	7	819		186
187	$11 . 17$		1	− ·0050 1023	3	822		187
188	$2^2 . 47$		0		5	827		188
189	$3^3 . 7$		0		7	834		189
190	$2 . 5 . 19$		−1	− ·0102 7338	7	841		190
191	—	43	−1	− ·0155 0899	1	842	190·3066 5808	191
192	$2^6 . 3$		0		13	855		192
193	—	44	−1	− ·0206 9034	1	856	195·5693 4827	193
194	$2 . 97$		1	− ·0155 3570	3	859		194
195	$3 . 5 . 13$		−1	− ·0206 6390	7	866		195
196	$2^2 . 7^2$		0		8	874		196
197	—	45	−1	− ·0257 4004	1	875	200·8525 5200	197
198	$2 . 3^2 . 11$		0		11	886		198
199	—	46	−1	− ·0307 6517	1	887	206·1458 5682	199
200	$2^3 . 5^2$		0		11	898		200

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_2^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
201	3 . 67		1	—0·0257 9005	3	901		201
202	2 . 101		1	— ·0208 3955	3	904		202
203	7 . 29		1	— ·0159 1344	3	907		203
204	2^2 . 3 . 17		0		11	918		204
205	5 . 41		1	— ·0110 3539	3	921		205
206	2 . 103		1	— ·0061 8103	3	924		206
207	3^2 . 23		0		5	929		207
208	2^4 . 13		0		9	938		208
209	11 . 19		1	— ·0013 9634	3	941		209
210	2 . 3 . 5 . 7		1	·0033 6557	15	956		210
211	—	47	—1	— ·0013 7377	1	957	211·4977 1495	211
212	2^2 . 53		0		5	962		212
213	3 . 71		1	·0033 2107	3	965		213
214	2 . 107		1	·0079 9397	3	968		214
215	5 . 43		1	·0126 4513	3	971		215
216	2^3 . 3^3		0		15	986		216
217	7 . 31		1	·0172 5342	3	989		217
218	2 . 109		1	·0218 4058	3	992		218
219	3 . 73		1	·0264 0679	3	995		219
220	2^2 . 5 . 11		0		11	1006		220
221	13 . 17		1	·0309 3168	3	1009		221
222	2 . 3 . 37		—1	·0264 2717	7	1016		222
223	—	48	—1	·0219 4287	1	1017	216·9048 8672	223
224	2^5 . 7		0		11	1028		224
225	3^2 . 5^2		0		8	1036		225
226	2 . 113		1	·0263 6765	3	1039		226
227	—	49	—1	·0219 6236	1	1040	222·3298 3674	227
228	2^2 . 3 . 19		0		11	1051		228
229	—	50	—1	·0175 9555	1	1052	227·7635 5874	229
230	2 . 5 . 23		—1	·0132 4772	7	1059		230
231	3 . 7 . 11		—1	·0089 1872	7	1066		231
232	2^3 . 29		0		7	1073		232
233	—	51	—1	·0046 2687	1	1074	233·2145 9719	233
234	2 . 3^2 . 13		0		11	1085		234
235	5 . 47		1	·0088 8219	3	1088		235
236	2^2 . 59		0		5	1093		236
237	3 . 79		1	·0131 0160	3	1096		237
238	2 . 7 . 17		—1	·0088 9992	7	1103		238
239	—	52	—1	·0047 1582	1	1104	238·6910 6074	239
240	2^4 . 3 . 5		0		19	1123		240
241	—	53	—1	·0005 6644	1	1124	244·1758 5767	241
242	2 . 11^2		0		5	1129		242
243	3^4		0		5	1134	245·2744 6996	243
244	2^2 . 61		0		5	1139		244
245	5 . 7^2		0		5	1144		255
246	2 . 3 . 41		—1	— ·0034 9860	7	1151		246
247	13 . 19		1	·0005 4998	3	1154		247
248	2^3 . 31		0		7	1161		248
249	3 . 83		1	·0045 6605	3	1164		249
250	2 . 5^3		0		7	1171		250

Tab. VII. Fortsættelse.

n	Faktorer.	$\theta(n)$	$\mu(n)$	$\sum_1^n \frac{\mu(x)}{x}$	Divisorer.	$\sum_1^n E\frac{n}{x}$	$\psi(n)$	n
251	—	54	−1	0·0005 8198	1	1172	250·7999 2290	251
252	$2^2 . 3^2 . 7$		0		17	1189		252
253	11 . 23		1	·0045 3455	3	1192		253
254	2 . 127		1	·0084 7156	3	1195		254
255	3 . 5 . 17		−1	·0045 4999	7	1202		255
256	2^8		0		8	1210	251·4930 7008	256
257	—	55	−1	·0006 5894	1	1211	257·0421 4616	257
258	2 . 3 . 43		−1	− ·0032 1703	7	1218		258
259	7 . 37		1	·0006 4398	3	1221		259
260	$2^2 . 5 . 13$		0		11	1232		260
261	$3^2 . 29$		0		5	1237		261
262	2 . 131		1	·0044 6077	3	1240		262
263	—	56	−1	·0006 5849	1	1241	262·6143 0019	263
264	$2^3 . 3 . 11$		0		15	1256		264
265	5 . 53		1	·0044 3207	3	1259		265
266	2 . 7 . 19		−1	·0006 7268	7	1266		266
267	3 . 89		1	·0044 1799	3	1269		267
268	$2^2 . 67$		0		5	1274		268
269	—	57	−1	·0007 0052	1	1275	268·2090 1157	269
270	$2 . 3^3 . 5$		0		15	1290		270
271	—	58	−1	− ·0029 8952	1	1291	273·8111 3039	271
272	$2^4 . 17$		0		9	1300		272
273	3 . 7 . 13		−1	− ·0066 5252	7	1307		273
274	2 . 137		1	− ·0030 0288	3	1310		274
275	$5^2 . 11$		0		5	1315		275
276	$2^2 . 3 . 23$		0		11	1326		276
277	—	59	−1	− ·0066 1299	1	1327	279·4351 4790	277
278	2 . 139		1	− ·0030 1587	3	1330		278
279	$3^2 . 31$		0		5	1335		279
280	$2^3 . 5 . 7$		0		15	1350		280
281	—	60	−1	− ·0065 7459	1	1351	285·0735 0257	281
282	2 . 3 . 47		−1	− ·0101 2069	7	1358		282
283	—	61	−1	− ·0136 5425	1	1359	290·7189 4947	283
284	$2^2 . 71$		0		5	1364		284
285	3 . 5 . 19		−1	− ·0171 6303	7	1371		285
286	2 . 11 . 13		−1	− ·0206 5953	7	1378		286
287	7 . 41		1	− ·0171 7521	3	1381		287
288	$2^5 . 3^2$		0		17	1398		288
289	17^2		0		2	1400	293·5521 6281	289
290	2 . 5 . 29		−1	− ·0206 2349	7	1407		290
291	3 . 97		1	− ·0171 8706	3	1410		291
292	$2^2 . 73$		0		5	1415		292
293	—	62	−1	− ·0206 0003	1	1416	299·2323 3542	293
294	$2 . 3 . 7^2$		0		11	1427		294
295	5 . 59		1	− ·0172 1020	3	1430		295
296	$2^3 . 37$		0		7	1437		296
297	$3^3 . 11$		0		7	1444		297
298	2 . 149		1	− ·0138 5449	3	1447		298
299	13 . 23		1	− ·0105 1001	3	1450		299
300	$2^2 . 3 . 5^2$		0		17	1467		300

Tab. VII. Fortsættelse.

n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$
307	63	304·9591 8317	599	109	593·9074 3341	911	156	910·8559 0371
311	64	310·6989 7608	601	110	600·3060 2834	919	157	917·6791 8983
313	65	316·4451 7927	607	111	606·7145 5713	929	158	924·5132 9857
317	66	322·2040 8104	613	112	613·1329 2207	937	159	931·3559 8185
331	67	328·0061 9942	617	113	619·5577 9109	941	160	938·2029 2499
337	68	333·8262 8235	619	114	625·9858 9636	947	161	945·0562 2408
343	—	335·7721 9250	625	—	627·5953 3427	953	162	951·9158 3898
347	69	341·6215 1728	631	115	634·0426 4013	961	—	955·3498 2618
349	70	347·4765 8920	641	116	640·5056 6959	967	163	962·2240 2468
353	71	353·3430 5726	643	117	646·9718 1431	971	164	969·1023 5115
359	72	359·2263 7965	647	118	653·4441 6060	977	165	975·9868 3780
361	—	362·1708 1863	653	119	659·9257 3773	983	166	982·8774 4692
367	73	368·0761 8048	659	120	666·4164 6126	991	167	989·7761 6145
373	74	373·9977 5890	661	121	672·9102 1510	997	168	996·6809 1222
379	75	379·9352 9511	673	122	679·4219 6043	1009	169	1003·5976 2724
383	76	385·8833 3010	677	123	685·9396 3170	1013	170	1010·5182 9874
389	77	391·8469 0944	683	124	692·4661 2656	1019	171	1017·4448 7577
397	78	397·8308 4572	691	125	699·0042 6638	1021	172	1024·3734 1359
401	79	403·8248 0715	701	126	705·5567 7427	1024	—	1025·0665 6077
409	80	409·8385 2231	709	127	712·1206 2980	1031	173	1032·0048 4525
419	81	415·8763 9323	719	128	718·6984 9116	1033	174	1038·9450 6772
421	82	421·9190 2606	727	129	725·2874 1764	1039	175	1045·8910 8171
431	83	427·9851 3415	729	—	726·3860 2993	1049	176	1052·8466 7432
433	84	434·0558 7188	733	130	732·9831 7563	1051	177	1059·8041 7169
439	85	440·1403 7129	739	131	739·5884 7355	1061	178	1066·7711 3883
443	86	446·2339 4106	743	132	746·1991 6959	1063	179	1073·7399 8921
449	87	452·3409 6395	751	133	752·8205 7524	1069	180	1080·7144 6812
457	88	458·4656 4734	757	134	759·4499 3849	1087	181	1087·7056 4501
461	89	464·5990 4538	761	135	766·0845 7185	1091	182	1094·7004 9500
463	90	470·7367 7243	769	136	772·7296 6282	1093	183	1101·6971 7649
467	91	476·8831 0169	773	137	779·3799 4187	1097	184	1108·6975 1095
479	92	483·0548 0229	787	138	786·0481 7012	1103	185	1115·7032 9997
487	93	489·2430 6641	797	139	792·7290 2480	1109	186	1122·7145 1396
491	94	495·4395 1054	809	140	799·4248 2372	1117	187	1129·7329 1576
499	95	501·6521 1664	811	141	806·1230 9177	1123	188	1136·7566 7471
503	96	507·8727 0681	821	142	812·8336 1488	1129	189	1143·7857 6227
509	97	514·1051 5483	823	143	819·5465 7108	1151	190	1150·8341 4868
512	—	514·7983 0201	827	144	826·2643 7578	1153	191	1157·8842 7120
521	98	521·0540 5205	829	145	832·9845 9594	1163	192	1164·9430 2935
523	99	527·3136 3351	839	146	839·7168 0665	1171	193	1172·0086 4271
529	—	530·4491 2773	841	—	843·0841 0248	1181	194	1179·0827 5953
541	100	536·7425 4701	853	147	849·8328 6203	1187	195	1186·1619 4392
547	101	543·0469 9581	857	148	856·5862 9995	1193	196	1193·2461 7034
557	102	549·3695 6105	859	149	863·3420 6887	1201	197	1200·3370 8016
563	103	555·7028 4068	863	150	870·1024 8356	1213	198	1207·4379 3207
569	104	562·0467 2111	877	151	876·8789 9055	1217	199	1214·5420 7616
571	105	568·3941 1032	881	152	883·6600 4818	1223	200	1221·6511 3830
577	106	574·7519 5259	883	153	890·4433 7338	1229	201	1228·7650 9441
587	107	581·1269 7741	887	154	897·2312 1836	1231	202	1235·8806 7654
593	108	587·5121 7181	907	155	904·0413 6081	1237	203	1243·0011 2091

Tab. VII. Fortsættelse.

n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$	n	$\theta(n)$	$\psi(n)$
1249	204	1250·1312 1942	1489	237	1494·6581 6293	1741	271	1749·5337 0398
1259	205	1257·2692 9245	1493	238	1501·9667 0573	1747	272	1756·9993 5929
1277	206	1264·4215 6131	1499	239	1509·2792 5923	1753	273	1764·4684 4317
1279	207	1271·5753 9511	1511	240	1516·5997 8619	1759	274	1771·9409 4391
1283	208	1278·7323 5147	1523	241	1523·9282 2354	1777	275	1779·4236 2574
1289	209	1285·8939 7347	1531	242	1531·2618 9994	1783	276	1786·9096 7836
1291	210	1293·0571 4586	1543	243	1538·6033 8379	1787	277	1794·3979 7188
1297	211	1300·2249 5504	1549	244	1545·9487 4863	1789	278	1801·8873 8396
1301	212	1307·3958 4352	1553	245	1553 2966 9245	1801	279	1809·3834 8131
1303	213	1314·5682 6810	1559	246	1560·6484 9232	1811	280	1816·8851 1577
1307	214	1321·7437 5781	1567	247	1568·0054 1056	1823	281	1824·3933 5454
1319	215	1328·9283 8696	1571	248	1575·3648 7820	1831	282	1831·9059 7208
1321	216	1336·1145 3126	1579	249	1582·7294 2521	1847	283	1839·4272 9006
1327	217	1343·3052 0729	1583	250	1590·0965 0227	1849	—	1843·1884 9018
1331	—	1345·7031 0256	1597	251	1597·4723 8442	1861	284	1850·7173 5944
1361	218	1352·9190 7756	1601	252	1604·8507 6813	1867	285	1858·2494 4758
1367	219	1360·1394 5140	1607	253	1612·2328 9250	1871	286	1865·7836 7591
1369	—	1363·7503 6931	1609	254	1619·6162 6065	1873	287	1873·3189 7261
1373	220	1370·9751 2272	1613	255	1627·0021 1173	1877	288	1880·8564 0265
1381	221	1378·2056 8587	1619	256	1634·3916 7568	1879	289	1888·3948 9765
1399	222	1385·4491 9884	1621	257	1641·7824 7420	1889	290	1895·9387 0052
1409	223	1392·6998 3435	1627	258	1649·1769 6731	1901	291	1903·4888 3586
1423	224	1399·9603 5695	1637	259	1656·5775 8789	1907	292	1911·0421 2247
1427	225	1407·2236 8657	1657	260	1663·9903 5191	1913	293	1918·5985 5044
1429	226	1414·4884 1675	1663	261	1671·4067 3039	1931	294	1926·1643 4372
1433	227	1421·7559 4218	1667	262	1678·8255 1127	1933	295	1933·7311 7220
1439	228	1429·0276 4589	1669	263	1686·2454 9119	1949	296	1941·3062 4390
1447	229	1436·3048 9362	1681	—	1689·9590 6326	1951	297	1948·8823 4124
1451	230	1443·5849 0187	1693	264	1697·3933 2064	1973	298	1956·4696 5175
1453	231	1450·8662 8753	1697	265	1704·8299 3791	1979	299	1964·0599 9870
1459	232	1458·1517 9408	1699	266	1712·2677 3303	1987	300	1971·6543 7994
1471	233	1465·4454 9180	1709	267	1719·7113 9671	1993	301	1979·2517 7626
1481	234	1472·7459 6461	1721	268	1727·1620 5751	1997	302	1986·8511 7759
1483	235	1480·0477 8695	1723	269	1734·6138 7975	1999	303	1994·4515 7992
1487	236	1487·3523 0290	1733	270	1742·0714 8904			

Recherches sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

Par

J. P. Gram.

Introduction. Etablir, sous une forme analytique, la loi de la distribution des nombres premiers dans la suite naturelle des nombres, est un problème qui, malgré les efforts que les plus grands géomètres ont faits pour le résoudre, attend toujours encore sa solution. Le présent travail n'a pas la prétention d'en donner une; mon but principal, en l'entreprenant, a été de réunir sous un point de vue commun les différentes méthodes qu'on a essayées jusqu'ici, de les pousser aussi loin que possible et, par là, de signaler les difficultés que rencontre, pour le moment, la solution du problème, comme aussi d'indiquer quels sont les meilleurs moyens à employer pour y arriver et les résultats qu'il est permis d'en attendre.

Je commence, dans l'introduction, par donner un aperçu général des moyens dont on dispose pour représenter une fonction discontinue comme celle dont il s'agit ici. La fonction de x qui exprime la totalité des nombres premiers jusqu'à x inclusivement est désignée par $\theta(x)$. Comme caractère général, elle se distingue par un nombre infini de discontinuités dont la position n'est pas connue a priori. Le problème exige que cette fonction soit mise sous une forme telle que sa valeur, pour une valeur donnée de x, puisse être calculée exactement ou, en tout cas, avec une approximation assignable. De là découlent toutes les difficultés qu'il présente. Car parvînt-on, entre certaines limites, à représenter exactement la fonction par des séries trigonométriques finies, cela ne pourrait se faire qu'en y introduisant les nombres premiers eux-mêmes, qui précisément sont à regarder comme inconnus, et il est à supposer qu'il en serait de même si l'on essayait d'employer dans le même but des intégrales définies. Si l'on veut éviter que les nombres premiers entrent explicitement dans la formule, la discontinuité n'y sera plus apparente, et c'est pourquoi, si $\theta(x)$ est exprimée par une intégrale définie, celle-ci ne pourra être transformée que si on la traite avec la plus grande précaution. M. Riemann n'en a pas moins réussi, en représentant $\theta(x)$ par une intégrale définie, à donner une formule exacte de la distribution des nombres premiers; mais cette formule ne permet d'effectuer aucun calcul numérique exact, bien qu'elle se laisse séparer en deux autres, dont une, qui est calculable, est la meilleure formule d'approximation qu'on connaisse jusqu'ici. L'écart entre cette formule d'approximation et la véritable valeur de $\theta(x)$ est en effet représenté par une série périodique infinie dont on ne saurait déterminer la convergence, et qui, en tout cas, varie si fortement qu'on peut dire avec certitude qu'il est impossible de la calculer terme par terme.

On rencontrerait la même difficulté en essayant directement d'exprimer $\theta(x)$ à l'aide d'un des développements en séries infinies qui peuvent être employés pour représenter des fonctions arbitraires. En effet le nombre des discontinuités étant infini, une pareille série serait sans doute très peu convergente, et c'est seulement dans le cas où l'on connaîtrait à l'avance la forme de la fonction à employer qu'il serait possible, par un choix convenable de la forme du développement, de trouver une série dans laquelle un petit nombre de termes donneraient une formule d'approximation dont l'écart d'avec $\theta(x)$ pourrait être apprécié avec certitude.

A côté des moyens ci-dessus mentionnés pour exprimer des fonctions discontinues sous une forme continue, la théorie même des nombres nous fournit dans les quotients incomplets une forme de fonction dont l'emploi est tout indiqué. A l'aide de ces quotients, on peut, en se servant des nombres premiers jusqu'à $\sqrt{x}$, trouver la totalité des nombres premiers compris entre $\sqrt{x}$ et x. Mais, en général, ils ne donnent pas sous une forme analytique des formules d'approximation dont on puisse se servir. Toutefois, comme M. Dirichlet et plus tard MM. Berger, géomètre suédois, et Césaro, géomètre belge, ont, par ce moyen, réussi à donner des formules d'approximation pour la valeur moyenne de certaines fonctions symétriques des diviseurs d'un nombre, il y a lieu de rechercher si l'on pourrait faire quelque chose d'analogue pour les nombres premiers. Cela ne semble cependant être guère possible directement, bien qu'il y ait une connexion visible entre les résultats qu'on peut obtenir par cette voie et la formule de Riemann.

Les nombres premiers eux-mêmes devant être considérés comme inconnus, il faudra, pour traiter le problème à fond, partir de formules où certaines fonctions connues se trouvent combinées avec des fonctions de nombres premiers, et qui renferment ainsi des définitions implicites de ces derniers. Comme le théorême de Wilson ne semble, sous ce rapport, être susceptible d'aucune application, il ne reste que deux de ces formules, dont l'une (2) [1]) est due à Euler et l'autre (131) à M. Tchebycheff.

C'est donc autour de ces formules, comme points principaux, que se groupent les recherches suivantes.

---

§ 1. Fonctions symétriques de tous les nombres premiers. Dans ce qui suit, nous désignons un nombre premier en général par p et une suite de nombres premiers par a, b, c ... et nous ne rangeons pas le nombre 1 parmi les nombres premiers.

Nous désignons en outre par $s(r)$ ou s_r la somme $\sum_1^\infty n^{-r} = 1^{-r} + 2^{-r} + 3^{-r} + \ldots$

On a ainsi, d'après Euler, la formule:

$$\Pi(1-p^{-r}) = \frac{1}{s(r)}\ , \tag{2}$$

qui sera applicable en tant que mod. $r > 1$. Les formules (3) et (4) qui s'en déduisent sont dans le même cas, et on peut de la même manière déterminer les valeurs de la fonction correspondante $\Pi(1+p^{-r})$. Cette fonction est infinie pour $r = 1$, d'où il suit que

---

[1]) Les numéros des formules sont les mêmes que dans le mémoire danois.

$\Pi(1-p^{-1}) = 0$, tandis qu'il est incertain si la série qu'on obtient en effectuant la multiplication et en ordonnant les termes suivant les valeurs croissantes des dénominateurs est convergente ou non.

Euler a aussi trouvé plusieurs relations analogues, dont l'une, qui a été démontrée par Mertens, peut servir à prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers de chacune des formes $4n+1$ et $4n-1$.

Le reste du paragraphe est consacré à des développements concernant la fonction $s(r)$, parmi lesquels nous mentionnerons l'expression trouvée par M. Riemann (15), en nous référant pour les détails à son mémoire original (Monatsber. der Berl. Akad. 1859).

---

§ 2. Quelques séries spéciales. Facteurs de Möbius. Si, dans le produit $\Pi(1-p^{-r})$, on effectue la multiplication et ordonne les termes suivant les valeurs croissantes des dénominateurs, on obtient une série qui peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{1}{s(r)} = \sum_1^\infty \mu(x).x^{-r} = 1 - 2^{-r} - 3^{-r} - 5^{-r} + 6^{-r} - 7^{-r} + 10^{-r} + \ldots$$

$\mu(x)$ désignant un facteur qui est égal à 1 lorsque x est un produit d'un nombre pair de différents facteurs premiers, à -1 lorsque ce nombre est impair et à 0 lorsque x renferme un facteur divisible par un carré. D'après Möbius, qui, le premier, a fait de ces facteurs l'objet d'une recherche méthodique, nous les appelons facteurs de Möbius. Leur propriété la plus importante est celle qui est exprimée dans la formule (22), à savoir que la somme de tous les μ qui correspondent à tous les diviseurs d'un nombre entier arbitraire est égale à zéro. De là l'emploi qu'on a fait de ces facteurs pour résoudre des systèmes particuliers d'équations. A-t-on en effet, entre deux systèmes de fonctions X_r et Y_r, des relations de la forme:

$$Y_1 = \Sigma X_r\,, \quad Y_2 = \Sigma X_{2r}\,, \quad Y_3 = \Sigma X_{3r} \ldots \tag{23}$$

on trouve: $X_1 = \Sigma\mu(r)\,Y(r)\,, \quad X_2 = \Sigma\mu(2r)\,Y(2r)\,, \quad X_3 = \Sigma\mu(3r)\,Y(3r) \ldots$ (24)

naturellement dans l'hypothèse que les séries dont il s'agit, si on les prolonge à l'infini, sont convergentes.

Dans ce qui suit, sont, d'après Möbius, développés plusieurs exemples parmi lesquels nous citerons les importantes formules (28) et (33):

$$\sum_1^\infty \mu(x)\frac{1}{x} = 0\,; \qquad \sum_1^\infty \mu(x)\frac{lx}{x} = -1\,,$$

qui néanmoins ne peuvent être regardées comme complètement démontrées, comme on ne peut juger de la convergence des séries dont il s'agit. On voit cependant plus loin (48) que la première, en tout cas, ne peut être divergente, mais est égale à $\frac{1}{n} \pm$ une fraction.

Parmi les autres applications des facteurs de Möbius, nous citerons encore la formule:

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{38}$$

qui, par inversion, donne:

$$f(x) = F(x) - \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) - \ldots \tag{39}$$

Si $F(x)$ est une fonction qui puisse être développée en une série convergente suivant les puissances croissantes de lx, il en sera de même de $f(x)$, de sorte qu'à:

$$F(x) = alx + b(lx)^2 + c(lx)^3 + \ldots \tag{40}$$

correspond:

$$f(x) = \frac{a}{s_2} lx + \frac{b}{s_3} (lx)^2 + \frac{c}{s_4} (lx)^3 + \ldots \tag{41}$$

---

§ 3. Détermination de $\theta(x)$ par des intégrales définies. Formule de Riemann. Si l'on désigne par $\pi(x)$ une fonction égale à 1 lorsque x est un nombre premier et à 0 lorsque x est un nombre composé, la formule (3) pourra s'écrire:

$$ls(r) = -\sum_1^\infty \pi(x) l(1 - x^{-r}), \tag{49}$$

ou si $\tilde{\omega}(x)$ désigne une fonction qui est égale à 1 pour $x = p$, à $\frac{1}{2}$ pour $x = p^2$ et, en général, à $\frac{1}{n}$ pour $x = p^n$, mais à 0 lorsque $x = 1$ ou est composé de différents facteurs premiers:

$$ls(r) = \sum_1^\infty \tilde{\omega}(x) x^{-r}. \tag{50}$$

Ces équations renferment donc des définitions des fonctions $\pi(x)$ et $\tilde{\omega}(x)$, lesquelles permettent de les déterminer. C'est ce qu'a fait **M. Riemann** à l'aide d'intégrales définies. En remplaçant d'abord x^{-r} par $r\int_x^\infty z^{-r-1} dz$, l'équation (50) devient:

$$\frac{1}{r} ls(r) = \int_1^\infty f(z) z^{-r-1} dz. \tag{52}$$

Cette fonction $f(z)$ a une importance particulière. Si l'on désigne par $\vartheta(x)$ la fonction:

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{53}$$

somme que nous appellerons «Totalité des puissances des nombres premiers divisées par leurs exposants», parce qu'elle donne, jusqu'à x inclusivement, la totalité des nombres premiers, plus la moitié de leurs carrés, plus le tiers de leurs cubes, etc., on aura:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\vartheta(x-0) + \vartheta(x+0)).$$

En se servant des intégrales de **Fourier**, **M. Riemann** détermine $f(x)$ par la formule (54), mais on peut par une autre voie arriver plus directement au même résultat.

En transformant l'intégrale de **Laplace** (55), on trouve en effet l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+zi} \frac{x^{k+zi}}{p^{n(k+zi)}} dz,$$

où la constante k est une grandeur positive et qui, pour $x > 1$, représente une fonction discontinue dont la valeur est 0 pour $p^n > x$, $\frac{1}{2n}$ pour $p^n = x$ et $\frac{1}{n}$ pour $p^n < x$. Si maintenant on remplace successivement dans cette intégrale p par tous les nombres premiers et n

par tous les nombres entiers et fait ensuite la somme, on arrive, en supposant $k > 1$, à représenter $f(x)$ sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{k+zi}}{k+zi} l.s(k+zi)\,dz. \tag{57}$$

Dans ce qui suit, on a, pour abréger, posé $k+zi = r$.

En employant la même notation, on trouve que l'intégrale de Laplace est un cas particulier de la suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r-\beta}\,dz = \begin{cases} 2\pi x^\beta & \text{pour } x > 1, \\ 0 & \text{pour } x < 1, \end{cases} \tag{58}$$

la partie réelle de r étant plus grande que la partie réelle de la constante β.

Les formules (59) et (60) représentent des formes semblables. On en déduit facilement différentes fonctions analogues à $f(x)$, en remplaçant x par $\frac{x}{n}$ et en prenant la somme des intégrales correspondant à diverses valeurs de n. Les équations (61)—(66) en fournissent des exemples. Soit par ce procédé, soit par l'intégration partielle de (57), comme l'a fait M. Riemann, on obtient la formule:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \left(\frac{1}{r} ls(r)\right) dz = -2\pi l x . f(x), \tag{67}$$

qui est celle qu'il est préférable d'employer pour représenter l'expression finale de $f(x)$.

Dans ce qui suit, est exposée la méthode qu'a suivie M. Riemann pour transformer cette intégrale en y introduisant l'expression trouvée par lui pour $\log s(r)$. Nous avons donné ce développement tout au long, parce que M. Genocchi est arrivé à un résultat qui diffère un peu de celui de Riemann, et que le développement lui-même est très concis chez ce dernier.

Riemann se sert pour $ls(r)$ de la formule suivante:

$$ls(r) = \frac{r}{2} l\pi - l(r-1) - l\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) + \Sigma_\alpha l\left(1 + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right) + l\xi(0). \tag{69}$$

Les grandeurs α sont les racines de l'équation transcendante:

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} tlx\right) dx = 0,$$

et sont sans doute toutes réelles, la partie imaginaire étant au moins comprise entre les limites $\pm \frac{1}{2} i$; elles se présentent en outre deux à deux avec des signes contraires. Nous nous référons, quant à ce point, au mémoire original de M. Riemann, en remarquant que, bien qu'il ne puisse régner aucun doute sur l'exactitude de son développement, il ne semble cependant pas possible d'arriver par la voie qu'il indique à la connaissance exacte des racines α.

En transformant le terme qui renferme Σ_α, on trouve que cette somme peut être remplacée par:

$$\Sigma_\alpha \left(l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) - l\xi(0) + l2.$$

Cette transformation montre que le terme constant dans la formule de M. Riemann, $\xi(0)$, disparaît complètement et est remplacé par $l2$, comme l'indique M. Genocchi.

Il reste à introduire dans l'intégrale les termes de la formule de $ls(r)$ et à intégrer terme par terme. Pour faciliter l'intégration, on se sert de l'intégrale $B(x)$ (73), qui a pour valeur:

$$2\pi lx \int \frac{x^\beta}{\beta} d\beta.$$

Relativement à la détermination des limites de l'intégration, il faut remarquer que cette formule suppose que la partie réelle de $r-\beta$ doit être positive. Cela est facile à obtenir, en ce qui concerne les termes qui proviennent de la fonction Γ, en intégrant de $\beta = -\infty$ à $\beta = -2n$, et tous les termes qui y correspondent seront donc compris dans l'expression:

$$f_3 = \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\,xlx},$$

qui, pour $x > 2$, est toujours $< \frac{1}{7}$.

Le terme qui provient de $l(r-1)$ mérite une attention particulière. Il faut ici déterminer la fonction correspondante $B(x)$ en posant:

$$B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r D_r \frac{1}{r}\, l\left(\frac{r}{\beta} - 1\right) dz = 2\pi lx \int_g^1 \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta,$$

et avoir soin de choisir la limite inférieure et le contour le long duquel on fait l'intégration de manière que la partie réelle de $r-\beta$ soit toujours positive, et qu'en intégrant le long du même contour on ait:

$$\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)}\, d\beta = l(r-1).$$

On peut y arriver en prenant pour limite inférieure $-\infty$ et pour intégrale la moyenne entre deux intégrales pour lesquelles on intégrera le long d'un contour différent, de manière que l'intégrale singulière provenant du pôle $\beta = 0$ disparaisse. On trouve alors:

$$\frac{B(x)}{2\pi lx} = \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta + \int_{+\rho}^{1} \frac{x^\beta}{\beta}\, d\beta, \quad (\text{pour } \rho = 0)$$

expression qui est identique avec le logarithme intégral $Li(x)$ défini par la série (75). Le symbole $[n]$ désigne ici comme plus loin le produit $1.2 \ldots n$. On traite de la même manière les termes qui entrent dans la somme Σ_α et obtient ensuite le résultat final sous la forme:

$$f(x) = Li(x) - \Sigma_\alpha\left(Li(x^{\frac{1}{2}+ai}) + Li(x^{\frac{1}{2}-ai})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{xlx} - l2\,, \qquad (77)$$

qui ne diffère de celle de Riemann que par la constante, laquelle, au lieu de $l\xi(0)$, est $l2$ comme chez Genocchi.

La formule de Riemann, et c'est en quoi consiste sa valeur scientifique, donne pour $f(x)$ une expression explicite qui représente cette fonction sous une forme telle, qu'on peut en séparer $Li(x)$ comme une partie continue, tandis que le terme Σ_α a un caractère essentiellement périodique. Mais pour juger de l'influence de ce terme, il faudrait avoir une connaissance plus exacte des racines α, de manière, au moins, à pouvoir indiquer les limites entre lesquelles cette série est comprise. Tant que cette condition ne sera pas remplie, on devra se contenter de montrer l'exactitude de la formule en la comparant avec les quantités des nombres premiers énumérés, ce qui permet de constater que les écarts sont insignifiants dans les limites de ces énumérations. Le rôle prédominant du terme $Li(x)$ est dû à la circonstance que $s(r) = \infty$ pour $r = 1$ et, notamment, que $s(r) = \frac{\rho}{r-1}$, où ρ est une fonction qui converge vers l'unité en même temps que r, ainsi qu'il résulte des recherches de MM. Dirichlet et Tchebycheff. En effet, la substitution de $\frac{1}{r-1}$ à $s(r)$ dans les formules (63) et (64) donnera des formules d'approximation très satisfaisantes. Quant à calculer exactement $\vartheta(x)$ par la formule de Riemann, cela doit être regardé comme impossible même en supposant connues les racines α; tout ce qu'on peut espérer, c'est, dans le cas le plus favorable, de déterminer les limites des écarts d'avec le terme $Li(x)$, limites qui semblent devoir dépendre de $\sqrt{x}$.

Après avoir trouvé une expression pour $\vartheta(x)$, on peut déterminer $\theta(x)$ par inversion de la formule (55) à l'aide des facteurs de Möbius. Cette opération peut se faire pour chaque terme dans (77), après quoi on obtiendra la formule correspondante pour

$$\tfrac{1}{2}(\theta(x+0) + \theta(x-0)).$$

En considérant dans $f(x)$ d'abord le terme $Li(x)$, on a:

$$Li(x) = C + lx + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{[2]\,2} + \frac{(lx)^3}{[3]\,3} + \dots$$

La partie de cette série qui contient les puissances croissantes de lx donne par inversion, d'après (41), la série correspondante:

$$P(x) = \frac{lx}{[1]\,.\,1s_2} + \frac{(lx)^2}{[2]\,.\,2s_3} + \frac{(lx)^3}{[3]\,.\,3s_4} + \dots \tag{86}$$

et, dans la supposition que les formules (28) et (33) sont exactes, on obtient d'une manière analogue:

$$\Sigma \frac{\mu(m)}{m}\left(C + l\frac{lx}{m}\right) = 1,$$

de sorte que:

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) \dots = 1 + P(x).$$

Le terme $-l2$ dans (77) disparaît par l'inversion, tandis qu'on ne peut déterminer l'influence des deux autres termes. Mais il est permis de supposer qu'ils n'ont pas grande importance, et c'est pourquoi nous adoptons comme résultat définitif de ces recherches l'expression:

$$\theta(x) = P(x) + 1$$

pour formule d'approximation de $\theta(x)$ ou plus exactement de $\frac{1}{2}(\theta(x+0) + \theta(x-0))$.

Mais bien qu'on ne puisse guère mettre en doute la valeur de cette formule, elle ne saurait cependant être regardée comme démontrée tant qu'on ne sera pas parvenu

à éclaircir complètement la nature de la série qui renferme les logarithmes intégrals imaginaires, et, en particulier, à déterminer les racines α qui y figurent. Il est vraisemblable qu'elles dépendent d'une manière simple des nombres premiers ou peut-être plutôt de leurs logarithmes.

---

§ 4. Quotients incomplets. Théorêmes de Berger et de Cesáro. Nous avons cherché, dans ce paragraphe, les résultats qu'on peut obtenir par l'emploi des quotients incomplets, que nous désignons, d'après Legendre, par le symbole $E\frac{n}{x}$, où n et x sont généralement supposés être des nombres entiers.

La proposition principale sur laquelle sont basées ces recherches s'obtient en ramenant la série générale:

$$F\left(E\frac{n}{1}\right) + F\left(E\frac{n}{2}\right) + F\left(E\frac{n}{3}\right) + \ldots F\left(E\frac{n}{a}\right)$$

à la forme:

$$A_0 F(q) + A_1 F(q+1) + \ldots A_n F(n).$$

Les transformations qui en résultent ont pour expressions les formules générales (91)—(96), dans les dernières desquelles q désigne $E\sqrt{n}$ et $f(x) = F(x) - F(x-1)$. Un cas particulier de (96) est la formule de Dirichlet:

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = 2\sum_1^q E\frac{n}{x} - q^2 , \qquad (103)$$

qui permet de déterminer approximativement le nombre des diviseurs dans les nombres de 1 à n, comme on a d'après (104):

$$\sum_1^n E\frac{n}{x} = nln + n(2C-1) \pm \rho\sqrt{n} , \quad (\rho < 3)$$

où C est la constante d'Euler. Une telle formule a été employée par M. Dirichlet et, récemment, par MM. Berger et Cesáro pour la détermination de fonctions symétriques des diviseurs des nombres; quelques-uns des résultats de M. Berger sont reproduits dans (107).

Les formules (97)—(99) représentent une généralisation des formules correspondantes (90), (93) et (96); z y désigne une variable qui parcourt une série de «nombres particuliers» choisis arbitrairement de 1 à n, et $\Phi(n)$, le nombre de ceux qui sont $\leqq n$.

Différents exemples de l'emploi de ces formules sont donnés tant par M. Berger que par M. Cesáro.

---

§ 5. Applications aux nombres premiers. Ce paragraphe renferme une série d'exemples de la détermination de la totalité des nombres premiers à l'aide des quotients incomplets.

Le plus simple est la formule bien connue (109) pour la détermination, jusqu'à x inclusivement, de la quantité des nombres qui ne sont pas divisibles par les nombres premiers a, b, c... formule qu'on peut employer pour calculer $\theta(x) - \theta(x^{\frac{1}{2}})$. Dans ce qui suit, on se sert en effet du cas spécial de (100) exprimé dans la formule:

$$\sum_1^n \Phi\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_1^n \frac{n}{z} , \qquad (110)$$

laquelle fournit les moyens d'exprimer les différentes sommes $\Sigma E\frac{n}{p}$, $\Sigma E\frac{n}{p^2}$, $\Sigma E\frac{n}{ab}$, etc. à l'aide des quantités des nombres premiers, et conduit aux relations identiques:

$$\theta(n)+\theta\left(\frac{n}{2}\right)+\theta\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=\Sigma E\frac{n}{p}\,; \tag{111}$$

$$\mathfrak{P}(n)+\mathfrak{P}\left(\frac{n}{2}\right)+\mathfrak{P}\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=\Sigma E\frac{n}{p}+\Sigma E\frac{n}{p^2}+\Sigma E\frac{n}{p^3}+\ldots; \tag{115}$$

$$\vartheta(n)+\vartheta\left(\frac{n}{2}\right)+\vartheta\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=\Sigma E\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\Sigma E\frac{n}{p^2}+\frac{1}{3}\Sigma E\frac{n}{p^3}+\ldots \tag{116}$$

Le symbole $\mathfrak{P}(n)$ désigne ici le nombre des puissances des nombres premiers jusqu'à n avec un exposant entier.

Ces formules peuvent ensuite servir à déterminer $\theta(n)$, $\mathfrak{P}(n)$ et $\vartheta(n)$ à l'aide des facteurs de Möbius. Par l'inversion de la formule de $\theta(n)$, M. Bougaïeff a ainsi obtenu la formule (119); plus simple est cependant la suivante:

$$\mathfrak{P}(n)=\Sigma E\frac{n}{a}-2\Sigma E\frac{n}{ab}+3\Sigma E\frac{n}{abc}\ldots \tag{125}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme (126).

Au lieu de représenter cette formule par l'inversion directe de (115), nous l'avons rattachée à la formule (118), qui donne la fonction symétrique $\Sigma f(d_z)$ formée de tous les diviseurs des nombres de 1 à n qui appartiennent à une série de «nombres particuliers» z. Elle nous apprend, par ex., que $\Sigma E\frac{n}{p}$ désigne la totalité des diviseurs des nombres de 1 à n qui sont premiers, $\Sigma E\frac{n}{ab}$, le nombre de ceux qui sont un produit de deux nombres premiers, etc., d'où une vérification facile de l'exactitude de (125) et des formules analogues.

Nous considérons ensuite les formules qui déterminent la fonction $\psi(n)$ de Tchebycheff. On montre d'abord que:

$$\sum_1^n lx=\Sigma lp\left(E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+E\frac{n}{p^3}+\ldots\right), \tag{129}$$

et en transformant cette expression par l'introduction de la somme des logarithmes des nombres premiers jusqu'à n inclusivement, somme qui est désignée par $F(n)$, on obtient les deux équations:

$$T(n)=\sum_1^n lx=\psi(n)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=\sum_1^n\psi\left(\frac{n}{x}\right) \tag{131}$$

et

$$\psi(n)=F(n)+F(n^{\frac{1}{2}})+F(n^{\frac{1}{3}})+\ldots, \tag{130}$$

ou aussi

$$\psi(n)=\Sigma lp\,.\,E\frac{ln}{lp}\,. \tag{132}$$

Les deux formules (130) et (131) sont celles que M. Tchebycheff a le premier données dans son célèbre «Mémoire sur les nombres premiers»; elles permettent, par un double emploi des facteurs de Möbius, de déterminer l'importante fonction $\psi(n)$.

$T(n)$ peut aussi être exprimé de plusieurs autres manières par $\psi(n)$; en prenant la différence entre $T(n)$ et $T(n-1)$, on déduit de ces transformations les formules:

$$ln = \sum_1^n \tilde{\omega}\left(\frac{n}{x}\right) l\,\frac{n}{x} = \Sigma \tilde{\omega}(d)\, ld\,, \qquad (134) \text{ et } (136)$$

où $\tilde{\omega}(x)$ désigne, comme auparavant, une fonction qui est égale à $\frac{1}{m}$ lorsque $x = p^m$ et nulle dans tous les autres cas, et d tous les diviseurs de n.

Ces équations, qui sont évidentes, peuvent, de même que la formule $T(n) = \sum_1^n E\frac{n}{x}\tilde{\omega}(x)\,lx$, être considérées comme de simples définitions de la fonction $\tilde{\omega}(x)$, et s'il était possible de déterminer $\tilde{\omega}(x)$ exactement ou approximativement, on obtiendrait par sommation des formules d'approximation correspondantes tant pour $\vartheta(n) = \sum_1^n \tilde{\omega}(x)$ que pour $\psi(n) = \sum_1^n \tilde{\omega}(x)\,lx$. Nous sommes donc conduit ici, comme par la formule de Riemann, à considérer la fonction $\vartheta(n)$ comme admettant, au point de vue analytique, une définition plus simple que $\theta(n)$ elle-même.

Le reste du paragraphe est consacré à différentes formules qui donnent de curieuses identités entre les quantités des nombres premiers. Elles sont des conséquences des formules générales développées plus haut, mais on ne saurait guère en faire d'autres applications et, notamment, elles ne se prêtent pas plus que les relations qui précèdent á l'établissement direct de formules d'approximation analytiques.

---

§ 6. Détermination approchée de la fonction $\tilde{\omega}(x)$. En nous basant sur les définitions précédentes de $\tilde{\omega}(x)$, nous avons cherché, dans ce paragraphe, à déterminer la valeur moyenne de cette fonction ou plutôt de $\tilde{\omega}(x)\,lx$, qui y est désignée par $\tau(x)$. Nous considérons d'abord les formules (145), dont la première, $ln = \sum_1^n \tau\left(\frac{n}{x}\right)$, peut seulement servir à la détermination de $\tau(x)$ par l'emploi des facteurs de Möbius. Mais une comparaison de deux formules :

$$ln = \sum_1^n \left(E\frac{n}{x} - E\frac{n-1}{x}\right)\tau(x) \quad \text{et} \quad ln = \sum_1^n \frac{1}{x}\,t(x),$$

dont la dernière définit une fonction $t(x)$ qui doit se rapprocher de la valeur moyenne de $\tau(x)$, semble indiquer que celle-ci converge vers l'unité lorsque n croît indéfiniment. La troisième expression : $ln = \Sigma\tau(d)$,

où la somme Σ comprend tous les diviseurs du nombre n, donne le même résultat. En remplaçant $\tau(x)$ par une fonction $t(x)$ déterminée de manière que sa valeur moyenne, prise par rapport à tous les diviseurs dans un nombre voisin de n, soit ln, on trouve à l'aide des formules (107) qu'elle est déterminée par:

$$t(n) = 1 - \frac{k}{n}, \qquad (147)$$

où k est une constante. Cette valeur peut donc être considérée comme la valeur moyenne de tous les τ qui correspondent aux diviseurs des nombres dans le voisinage de n.

On peut aussi considérer directement la formule $T(n) = \sum_2^n E\frac{n}{x}\tau(x)$, en formant la valeur moyenne de tous les τ correspondant aux valeurs de x depuis 2 jusqu'à n, avec

les poids $E\frac{n}{x}$. Cette valeur moyenne est alors donnée par les formules:

$$\tau_1(n) = \frac{T(n)}{\sum_2^n E\frac{n}{x}} = 1 - \frac{2C-1}{ln} - \frac{2C-2}{(ln)^2} + R, \qquad (148) \text{ et } (149)$$

et converge également vers la limite 1 lorsque n croît.

Il n'est pas sans intérêt de former la valeur moyenne de tous les τ compris dans la différence $T(n) - 2T\left(E\frac{n}{2}\right)$, où tous les coefficients sont nuls ou égaux à 1, comme on le voit par l'exemple (152). Cette valeur moyenne devient:

$$\tau_2(n) = 1 \pm \frac{\rho}{l2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2l2}\,\frac{ln}{n} + \ldots \qquad (156)$$

et se rapproche plus de 1 que les autres valeurs moyennes.

Les résultats obtenus indiquent bien que la valeur moyenne d'une série de $\tau(x)$ successifs doit se rapprocher de la limite 1, mais ils n'en donnent pas une démonstration satisfaisante, comme on n'a pas réussi à trouver, pour une somme de la forme $\sum_1^n \tau(x)$, une expression suffisamment exacte qui pût servir à former une valeur moyenne de la fonction $\tau(x)$ où tous les poids fussent égaux. La formule qui satisfait le mieux à cette condition est l'expression (156) pour $\tau_2(n)$. Il n'y entre en effet que des poids qui sont tous nuls ou égaux à 1, et, chose à remarquer, tous les $\tau(x)$ qui correspondent à des valeurs de x comprises entre $\frac{n}{2}$ et n ont pour poids l'unité.

Mais ces valeurs moyennes ont cependant quelque importance, en ce sens qu'elles confirment que la partie continue de la formule de Riemann donne une bonne approximation de la totalité des puissances des nombres premiers divisées par leurs exposants.

---

§ 7 La fonction $\psi(x)$. Comme $\psi(n) = \sum_2^n \tau(x)$, on doit s'attendre, d'après ce qui précède, à ce que cette fonction ne s'écarte pas beaucoup de $n-1$, et cette expression mise dans la formule:

$$T(n) = \sum_1^n \psi\left(\frac{n}{x}\right),$$

donnera aussi une bonne approximation de la vraie valeur de $T(n)$. La détermination directe de $\psi(n)$ par cette formule s'obtient par inversion à l'aide des facteurs de Möbius, comme le fait voir la formule (160). C'est par cette voie que M. Tchebycheff a trouvé les véritables limites de $\psi(n)$ indiquées dans (166). Mais ces limites sont certainement beaucoup trop larges. Nous avons essayé d'employer d'autres formes de $\psi(n)$ obtenues par inversion, mais sans résultat satisfaisant, bien que la formule:

$$\psi(n) = -\sum_1^n \mu(x)\, E\frac{n}{x} \cdot lx \qquad (170)$$

présente quelque intérêt comme étant très voisine de la formule (33) de Möbius.

Par contre, la méthode de Riemann peut donner pour $\psi(n)$, ou plutôt pour $\frac{1}{2}(\psi(n-0)+\psi(n+0))$, une expression qui mérite d'être remarquée. On l'obtient en traitant l'intégrale:

$$2\pi\psi(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{r} D_r ls(r)\, dz \tag{171}$$

de la même manière que celle de Riemann. En effet, en introduisant dans cette intégrale l'expression qu'il a donnée pour $ls(r)$, et en intégrant terme par terme, on trouve:

$$\psi(x) = (x-1) - l(1-x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}} \Sigma_\alpha \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha lx + \alpha\sin\alpha lx}{\frac{1}{4}+\alpha^2} + \lambda, \tag{178}$$

où λ est une constante dont la valeur est voisine de 0. Cette formule est analogue à celle de Riemann pour $\vartheta(x)$ et présente, quant aux termes périodiques, les mêmes manques provenant des racines α; mais elle est beaucoup plus simple, et comme $\vartheta(x)$ peut être déterminée par $\psi(x)$ avec une approximation assignable, il sera sans aucun doute plus pratique de s'attacher principalement à trouver cette dernière fonction.

En raison de l'analogie de cette série périodique avec la série périodique (181), j'ai déduit de celle-ci une série (183) complètement analogue à Σ_α, et dont la somme peut être exprimée à l'aide de nombres premiers et de quotients incomplets. Quoique cette série n'ait pas été ramenée à la fonction $\psi(x)$, il semble cependant qu'une telle transformation pourrait être opérée en remplaçant les différences $\frac{lx}{lp} - E\frac{lx}{lp}$ par des séries trigonométriques infinies, de sorte qu'il serait possible, par cette voie indirecte, de déterminer les racines α, qui peut-être sont des fonctions simples des nombres premiers eux-mêmes.

Un pareil résultat serait un progrès, en ce sens qu'on passerait ainsi directement d'identités purement numériques à la formule de Riemann, et arriverait par suite à mieux pénétrer le caractère de cette dernière, mais les difficultés relatives à la détermination des limites absolues des erreurs n'en seraient pas notablement diminuées.

Qu'il soit possible de passer directement d'une de ces espèces de formules à l'autre, c'est ce qu'on peut constater en considérant, entre autres, la formule suivante, qui est un supplément de (167):

$$\psi(x) = \theta(g)lx - \frac{1}{2}\overset{(g)}{\Sigma} lp + \frac{1}{\pi}\overset{(g)}{\Sigma} lp \frac{\sin\frac{2m\pi lx}{lp}}{m}, \tag{184}$$

où g désigne une limite arbitraire $\geqq x$, et où la somme Σ s'étend à tous les m de 1 à ∞ et à tous les $p \leqq g$. On trouve cette formule en décomposant dans la fonction:

$$\frac{1}{\sigma(r)} = \prod_1^g (1-p^{-r}),$$

où le produit Π est pris pour tous les nombres premiers $\leqq g$, chaque facteur en facteurs linéaires par rapport à r, et en introduisant ensuite l'expression ainsi obtenue dans l'intégrale de $\psi(x)$. En effet, on obtiendra de cette manière le même résultat qu'avec $ls(r)$ lui-même, qui contient tous les nombres premiers. Une formule correspondante pour $\vartheta(x)$ est donnée dans (83) ou (84). Enfin, on peut, au moyen de (185), transformer directement (184) en une expression connue:

$$\psi(x) = \overset{(g)}{\Sigma} lp\, E\frac{lx}{lp} \qquad \text{(voir 132).}$$

Dans une note ajoutée à la fin de ce paragraphe, on fait remarquer que les termes dominants dans les formules de $\psi(x)$ et de $\vartheta(x)$ proviennent du terme $-l(r-1)$ dans la formule de $ls(r)$, et qu'il en est de même des formules (63) et (64), où le degré d'approximation est en outre facile à calculer.

On fait également observer que la marche suivie par M. Tchebycheff dans son premier mémoire «Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée», conduit à une détermination de $\lim \psi(n)$, pour $n = \infty$, qui s'accorde avec ce qui précède, car les considérations qu'il fait valoir montrent, avec un léger changement, que $\sum_2^\infty (1-\tau(x))x^{-r}(lx)^m$, pour $m = 0, 1, 2 \ldots$, continue à être une grandeur finie, lorsque r converge vers 1. Nous nous sommes contenté de cette indication parce qu'il nous semble que M. Tchebycheff n'a pas suffisamment justifié le point de départ de ces formules; ce qu'il s'agit surtout ici de montrer, s'est que son résultat, la formule d'approximation $Li(x)$ pour $\theta(x)$, n'est pas en opposition avec la formule de Riemann; tout au contraire, il serait précisément arrivé à établir la même formule pour $\vartheta(x)$ si, au lieu de $-\Sigma l(1-p^{-r})$, il ne s'était pas seulement borné à employer le terme Σp^{-r}.

---

§ 8. Formules d'approximation pour $\vartheta(n)$ et $\theta(n)$. Lorsque la valeur moyenne de $\tau(n)$ est égale à 1, la valeur moyenne correspondante de $\psi(n)$ sera $n-1$ et celle de $\vartheta(n)$, $\sum_2^n \frac{1}{lx}$. Dans tous les cas, on peut poser $\tau(x) = t(x) + f(x)$, où $t(x)$ désigne la valeur moyenne de $\tau(x)$ $\left(\text{par conséquent } 1 \text{ ou, si l'on veut, } 1 - \frac{k}{x}\right)$, et, en même temps, on aura $\psi(n) = \sum_2^n t(x) + F(n)$, où $F(n) = \sum_2^n f(x)$, de même que $\vartheta(n) = \sum_2^n \frac{t(x)}{lx} + R(n)$, où l'erreur $R(n) = \sum_2^n \frac{f(x)}{lx}$, comme il est facile de le montrer, est du même ordre que l'erreur dans l'expression approchée de $\psi(n)$. En introduisant dans $\psi(n)$ les limites de M. Tchebycheff, qui donnent $F(n) = \lambda . n$, on voit que, pour l'écart entre $\vartheta(n)$ et $Li(n)$, les limites sont proportionnelles à la fonction $\vartheta(n)$ elle-même, et il résulte également de (191) que $\theta(n)$ pourra, avec une approximation analogue, être déterminée comme $P(x)+1$. Nous n'avons pas réussi à établir pour les écarts des limites absolues plus étroites que celles qui découlent des limites de Tchebycheff pour $\psi(n)$, mais il n'est guère douteux qu'il ne soit possible de trouver des limites de la forme $\pm\lambda\sqrt{n}$, où λ est une constante.

Par contre, il est facile de calculer la somme des carrés des écarts entre $\tau(x)$ et 1 comme entre $\tilde{\omega}(x)$ et $\frac{1}{lx}$. On trouve respectivement :

$$S = \sum_2^n (\tau(x)-1)^2 < 1\cdot 2\,(ln-1)n$$

et

$$M^2 = \sum_2^n \left(\frac{\tau(x)-1}{lx}\right)^2 < \frac{1\cdot 2\,n}{ln}, \qquad (189)$$

ou, d'une autre manière, l'expression (190). Ces deux dernières formules, qui ne donnent certainement que des approximations grossières, indiquent qu'une grandeur proportionnelle à $\sqrt{\vartheta(n)}$ doit donner une limite supérieure pour l'écart moyen entre $\vartheta(n)$ et $Li(n)$.

Ainsi qu'il résulte des comparaisons que M. Glaisher a entreprises entre les différentes formules et les quantités des nombres premiers véritablement énumérés, la formule de Riemann, en tant qu'elle a pu être vérifiée, est très supérieure aux autres, et il ne doit guère être possible d'obtenir de bien meilleurs résultats en employant des formules continues qui ne donnent pas des courbes avec des points d'inflexion. Cependant il pourrait valoir la peine d'essayer pour $\theta(n)$ d'employer une formule d'approximation de la forme:

$$\theta(n) = \frac{n(1+\lambda'_n)}{ln},$$

où λ' est une fonction $f(n)$, une forme qui se rattache étroitement à la formule $\psi(n) = n-1$.

Mais il faut, d'après ce qui précède, regarder comme certain qu'on commet une erreur systématique de l'ordre $\vartheta(n^{\frac{1}{2}})$ en employant le logarithme intégral comme formule d'approximation pour $\theta(n)$ au lieu de $\vartheta(n)$.

---

§ 9. Intervalle entre deux nombres premiers consécutifs. La limite supérieure de cet intervalle pourra facilement être déterminée quand on aura trouvé les limites absolues d'une fonction arbitraire $F(n)$ qui varie seulement lorsque n passe par un nombre premier. En effet, en supposant que ces limites sont des fonctions de n exprimées par $A(n)$ et $B(n)$, de sorte que:

$$A(n) < F(n) < B(n) \tag{194}$$

pour tous les n plus grands qu'un nombre donné, et en désignant par p un nombre premier et par $p+a+1$ le suivant, on trouvera la limite supérieure de a en résolvant une des équations:

$$A(p) = B(p+a) \quad \text{ou} \quad A(p+a) = B(p). \tag{195}$$

En employant la même méthode pour déterminer l'intervalle entre deux nombres consécutifs qui sont des puissances de nombres premiers dans le voisinage du nombre n, on trouvera facilement, à l'aide des limites de M. Tchebycheff pour $\psi(n)$, que:

$$a < \frac{1}{5}n + 3\sqrt{n}\,; \tag{198}$$

mais on peut regarder comme certain que cette limite est beaucoup trop élevée. D'autre part, si l'on pouvait montrer que les limites de $\psi(n)$ dépendent de $\sqrt{n}$ comme on l'a supposé dans (199), la limite de l'intervalle serait aussi déterminée d'une manière tout à fait analogue.

Pour mieux voir comment l'intervalle varie en réalité, j'ai réuni dans le tableau p. 255 les intervalles relativement les plus grands entre les puissances des nombres premiers dans la première partie de la suite des nombres, ainsi que quelques-uns des intervalles les plus considérables au-dessus de 100, et les ai comparés soit avec $\sqrt{n}$, soit avec ln et $(ln)^2$. Il semble résulter de cette comparaison que l'intervalle croît moins fortement que $\sqrt{n}$ mais plutôt comme $(ln)^2$. On pourrait sans doute en représenter la limite par une série très convergente de la forme:

$$a = \alpha + \beta ln + \gamma(ln)^2 + \delta(ln)^3 + \ldots,$$

où les coefficients sont d'une nature telle, que le troisième terme est le terme dominant dans la partie de la suite des nombres pour laquelle on a des tables de diviseurs.

---

§ 10. Explication des tables. Nous expliquerons brièvement dans ce qui suit le contenu des tables qui accompagnent ce mémoire. Sauf remarque du contraire, elles ont été calculées par l'auteur, l'importante table II dans l'automne de 1882, avant qu'il eût l'occasion de se servir de la comparaison établie par M. Glaisher entre la totalité des nombres premiers et la formule de Riemann.

Table I. Valeurs des sommes des puissances réciproques des nombres et leurs logarithmes.

Les 1e, 2e et 4e colonnes de cette table sont reproduites d'après Merrifield, tandis que, dans la 3e colonne, les logarithmes vulgaires des sommes $s(r)$ des puissances ont été calculés par l'auteur lui-même et contrôlés par comparaison avec les logarithmes naturels.

Table II. Valeurs de e^x et de $Li(e^x)$ depuis $x = 5$ jusqu'à $x = 20$, avec un intervalle de 0·2.

Ces valeurs, à l'exception des logarithmes intégrals de $x = 5$ à $x = 7$, qui sont donnés d'après Bretschneider (avec une augmentation du dernier chiffre là où il a ajouté deux points), ont été calculées par l'auteur suivant la méthode qu'on trouvera indiquée plus loin dans le supplément. Comme il s'était d'abord seulement proposé d'obtenir environ 12 chiffres exacts, les dites valeurs se présentent avec un nombre de décimales un peu différent. Relativement à l'exactitude, nous remarquerons que, notamment dans la dernière partie de la table, il peut régner quelque incertitude sur le dernier chiffre. Comme moyen de contrôle, on a indiqué les différences entre les valeurs elles-mêmes.

Table III. Valeurs de la fonction $P(e^x)$ de $x = 0$ à $x = 20$ avec un intervalle de 0·1, avec les logarithmes correspondants, etc.

Dans cette table, log $P(e^x)$ doit être regardé comme la partie principale, tandis que les valeurs de la fonction $P(e^x)$ ne figurent que pour le contrôle. Elle a été calculée comme il suit. Dans la première partie de la table, les valeurs de:

$$P(e^x) = \frac{x}{[1].1s_2} + \frac{x^2}{[2].2s_3} + \frac{x^3}{[3].3s_4} + \dots$$

ont été trouvées directement par le calcul logarithmique des différents termes de la série; mais ce calcul étant bientôt devenu trop compliqué à cause du grand nombre des termes, j'ai déterminé de la même manière la série correspondante:

$$Q(e^x) = \frac{s_2 - 1}{s_2} \cdot \frac{x}{[1].1} + \frac{s_3 - 1}{s_3} \cdot \frac{x^2}{[2].2} + \frac{s_4 - 1}{s_4} \cdot \frac{x^3}{[3].3} + \dots \tag{201}$$

après quoi j'ai trouvé:

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - Q(e^x). \tag{202}$$

Pour les plus hautes valeurs de x, je me suis servi de la série $R(e^x)$ déterminée par (203), laquelle a donné:

$$P(e^x) = Li(e^x) - C - lx - \frac{1}{2} P(e^{\frac{x}{2}}) - R(e^x), \tag{204}$$

$P(e^{\frac{x}{2}})$ étant pris dans la partie déjà terminée de la table.

Dans le calcul de $Q(e^x)$ et de $R(e^x)$, on a seulement employé des logarithmes avec 5 ou 6 décimales, et pour en vérifier l'exactitude, on a soumis à des preuves par différences les logarithmes à 5 décimales de ces fonctions, comme les logarithmes de toutes les fonctions qui figurent ici varient de façon que les différences décroissent avec une très grande rapidité. Par suite de cette circonstance, on a jugé plus pratique

de construire une table de log $P(e^x)$ qu'une table de $P(e^x)$, parce qu'il en est résulté cet avantage qu'un grand nombre des logarithmes cherchés ont pu être déterminés par interpolation. En effet, les valeurs indiquées dans la table pour les fonctions ont seules été calculées directement, et leurs logarithmes ont servi à trouver les autres par interpolation. Pour $x > 8{\cdot}4$, on a d'abord calculé les nombres placés sous la rubrique $Li(e^x) - P(e^x)$, et, avec leurs logarithmes, on a déterminé les autres par trisection de l'intervalle suivant la méthode de Briggs. Les logarithmes ainsi trouvés ont de nouveau été employés dans la construction de la table de $P(e^x)$ pour $x > 10$. Relativement à l'exactitude qui a été obtenue, le dernier ou quelquefois les deux derniers chiffres des valeurs fondamentales de $P(e^x)$ ne peuvent être regardés comme certains, tandis que, dans les logarithmes, il ne règne en général de l'incertitude que sur le dernier chiffre, de sorte que la table donnera toujours une approximation suffisante pour l'usage auquel elle est destinée.

Table IV. Totalité des nombres premiers dans chaque centaine de 1 à 10000, avec les valeurs correspondantes de $\theta(x)$ pour les 100 premiers multiples respectivement de 100 et de 1000, et

Table V. Totalité des nombres premiers dans chacun des 90 premières centaines de mille, avec les valeurs correspondantes de $\theta(x)$ pour les 90 premiers multiples de 10^5.

Ces tables donnent les résultats des énumérations faites dans les tables des diviseurs, telles qu'elles résultent de la comparaison établie par M. Glaisher dans son introduction à la table des diviseurs pour le 6e million, et elles sont par suite entachées des erreurs qui ont pu se glisser dans les dites tables. Oppermann en a ainsi relevé une en constatant que 1330001 est un nombre premier, tandis que Burckhardt le donne comme composé. Il n'a pas été tenu compte ici de cette correction. Rappelons enfin que nous n'avons pas compté 1 parmi les nombres premiers comme M. Glaisher le fait.

Table VI. Comparaison entre les valeurs de $\theta(e^x)$ et de $P(e^x)$ pour $x < 15$.

Cette table est une supplément à la comparaison établie par M. Glaisher, et a surtout de l'importance pour les nombres inférieurs. Elle a été originairement construite pour rechercher si la distribution, en apparence périodique, des grands écarts qu'on trouve dans le diagramme publié par ce géomètre dans sa table pour le 6e million, existe réellement. Cela ne semble pas cependant être le cas. La table renferme en outre, dans la dernière colonne, l'écart moyen entre θ et $P+1$ calculé pour chaque groupe de 10 écarts consécutifs.

Table VII. Valeurs de $\psi(x)$ pour tous les nombres de 1 à 2000.

Ces valeurs ne sont cependant indiquées que pour les valeurs de x qui font varier $\psi(x)$. Elles ont été obtenues par la sommation des logarithmes naturels des tables de Vega, et contrôlées soit par le calcul de $T(2000)$ soit par comparaison avec les logarithmes vulgaires correspondants. La table contient en outre, jusqu'à 300, les valeurs de diverses autres fonctions numériques, dont l'importance pour ces recherches est évidente. Les valeurs de la série $\Sigma \frac{1}{x} \mu(x)$ sont formées à l'aide des «Tables of squares, cubes, etc.» de M. Barlow, London 1860, où l'on a pris les valeurs réciproques de x.

§ 11. Conclusion. Si, en terminant, nous jetons un coup d'œil en arrière sur les résultats qu'ont donnés les recherches qui précèdent, nous ne saurions nier qu'ils ne semblent guère être en rapport avec le grand appareil qui a été mis en œuvre. Nous n'avons en effet établi par aucune preuve rigoureuse qu'une fonction $f(x)$, indépendante des tables des diviseurs, est liée à $\theta(x)$ de manière que $\operatorname{Lim} \frac{\theta(x) - f(x)}{f(x)} = 0$. Tous les moyens que nous avons employés ont seulement abouti à montrer que tel est probablement le cas de la fonction de Riemann que nous avons désignée par $P(x)+1$, et notamment que son écart d'avec $\theta(x)$ est toujours compris dans des limites de l'ordre $\sqrt{x}$. Bien que beaucoup de signes indiquent que d'autres recherches plus approfondies seront encore nécessaires pour établir une pareille preuve, il n'est cependant pas invraisemblable que, relativement à ce problème spécial, nous nous serions approché plus près du but en fixant exclusivement notre attention sur les valeurs asymptotiques des fonctions dont il s'agit. Mais c'est à dessein que nous ne nous sommes pas placé à ce point de vue, parce que, en réalité, il importe davantage de connaître des formules d'approximation qui puissent être employées pour des valeurs finies des arguments, et que de telles formules donneront en même temps les formules d'approximation asymptotiques.

Mais nous avons pourtant obtenu quelque chose par nos recherches, et nous croyons en outre que c'est quelque chose d'essentiel. En premier lieu, pour ce qui regarde la remarquable formule de Riemann, non seulement nous avons ramené la preuve de l'origine de son intégrale à des données relativement simples qui permettent d'en pénétrer plus profondément la nature, mais, par le commentaire dont le traitement même de cette intégrale a été l'objet, nous avons aussi écarté toutes les difficultés qu'elle présente et éclairci le désaccord existant entre les formules de Riemann et de Genocchi, désaccord sur lequel ce dernier s'exprime lui-même très modestement. Toutes les difficultés du développement de Riemann sont ramenées par là à la détermination du développement de $ls(r)$, problème qui peut être traité indépendamment de la théorie des nombres premiers. En outre, relativement aux racines α, nous avons donné quelques indications qui ne seront pas sans utilité pour des recherches futures. D'une importance plus pratique est cependant la forme élégante que nous avons donnée à la fonction $P(x)$, forme qui a le grand avantage de pouvoir se prêter à un calcul numérique facile.

De plus, et ce n'est pas sans importance, nous avons reproduit un certain nombre de recherches éparses et peu connues sur la théorie des nombres et, en les mettant en relation avec la fonction $\psi(x)$ de M. Tchebycheff, montré qu'elles conduisent aussi à considérer non pas la fonction $\theta(x)$, mais $\vartheta(x)$, comme celle qui doit jouer le premier rôle dans ces recherches.

Nous sommes arrivé ainsi, par des considérations tirées de la théorie même des nombres, à indiquer le rôle que le logarithme intégral doit jouer dans la détermination de la totalité des nombres premiers, et, bien que la démonstration ne soit pas complètement satisfaisante, elle l'est cependant assez pour que, par cette voie, on eût pu être conduit à faire de $Li(x)$ une formule d'approximation de $\vartheta(x)$, même si la formule de Riemann n'avait pas déjà été connue. Il semble en même temps qu'en poussant plus loin ce genre de recherches, il serait possible d'obtenir une preuve certaine que la limite de l'erreur dépend

de $\sqrt{x}$, mais cela exigerait sans doute préalablement une étude plus approfondie des restes qu'on trouve en divisant un nombre par tous ceux qui le précèdent dans la suite naturelle des nombres. En effet, la difficulté que nous avons toujours rencontrée pour resserrer les limites dont il s'agit provient, entre autres, précisément de la circonstance que, pour des différences de la forme $\frac{n}{x} - E\frac{n}{x}$, on ne peut, même lorsqu'on en a une somme, obtenir des limites plus étroites que 0 et 1. Qu'il y ait vraiment quelque chose à faire dans cette voie, c'est ce qui ressort, en particulier, du mémoire souvent cité de M. Berger. Une discussion plus approfondie des problèmes qui se rattachent à des séries renfermant des facteurs $\mu(x)$, semble également devoir être très désirable pour l'avancement de ces recherches, car on arriverait peut-être aussi par là à combler les lacunes que présente notre travail.

Enfin, nous considérons comme le résultat le plus important de nos recherches d'avoir montré que tous les travaux antérieurs indiquent le logarithme intégral $Li(x)$ comme formule d'approximation de $\vartheta(x)$, et que $\psi(x)$ peut être représentée approximativement par une expression de la forme $x - \text{const.}$ Plusieurs circonstances indiquent que la solution complète du problème qui nous occupe n'excède pas les ressources de l'analyse moderne, et nous espérons que ce travail pourra contribuer à orienter les investigateurs futurs dans les différents points de vue sous lesquels il peut être considéré, et à en faciliter ainsi indirectement la solution.

Supplément: Sur le calcul de la fonction $Li(e^x)$.

Pour déterminer les valeurs de $Li(e^x)$ données dans la table II, j'ai calculé les différences entre deux valeurs de $Li(e^x)$ correspondant à des intervalles égaux. En effet, comme

$$\int_a^{a+x} \frac{e^x}{x}\,dx = e^a \int_0^x \frac{e^x}{a+x}\,dx = \frac{e^a}{a}\left[\int_0^x e^x dx - \int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \ldots\right],$$

il s'agira seulement de calculer successivement des intégrales de la forme:

$$N_n = \frac{e^a}{a}\int_0^x e^x \left(\frac{x}{a}\right)^n dx,$$

où n est un nombre entier et $x < a$. Si l'on pose $N_n = \frac{e^a}{a} A_n$, on trouvera sans difficulté par intégration partielle une formule récurrente à l'aide de laquelle les N consécutifs pourront être facilement déterminés, et on obtiendra le même résultat en calculant une fois pour toutes les intégrales $\int_0^x e^x x^n dx$ correspondant à des valeurs déterminées de x. En prenant pour a un nombre entier et $x = 1$, cette manière de procéder a donné, après détermination préalable des puissances en question de e, un moyen relativement simple pour calculer $Li(e^{a+1}) - Li(e^a)$ pour $a = 16$ à 20, et ces valeurs, conjointement avec celles calculées auparavant par MM. Bretschneider et Glaisher, ont ensuite pu servir à contrôler le calcul plus détaillé qu'exigent les intervalles plus petits.

Pour ce calcul, on a employé les formules (8)—(10) en prenant successivement pour a les arguments qui figurent dans la table II avec l'intervalle 0·2, x restant toujours égal à 0·1. Les premières valeurs de N ont ensuite été calculées par des multiplications et des divisions directes, tandis que, pour trouver celles de N_3 et des N suivants, on a jugé plus simple de calculer par logarithmes les termes dont il s'agit à l'aide des intégrales $\int_{-0\cdot1}^{+0\cdot1} e^x x^n dx$ déterminées une fois pour toutes. De cette manière, on a trouvé une série très rapidement convergente pour la détermination des différences successives de la table, et, par celles-ci, toutes les valeurs de $Li(e^x)$, dont le dernier chiffre, dans la table, est augmenté d'une unité lorsque le chiffre suivant est égal à 5 ou plus grand que 5.

Si, pour intervalle, j'ai choisi 0·2 et non 0·1, la raison en est, d'une part, que le calcul en est facilité et, de l'autre, que mon intention à l'origine était seulement de calculer une table des logarithmes de $Li(e^x)$ avec 10—12 décimales. En réalité, une pareille table pourrait être construite par interpolation à l'aide des logarithmes des valeurs contenues dans la table II, et serait la forme la plus commode d'une table de logarithmes intégrals des grandes valeurs de n, surtout si les arguments étaient les logarithmes vulgaires. Mais j'y ai renoncé parce que, pour ces recherches spéciales, il était préférable de construire une table de log $P(e^x)$.

C'est seulement après avoir terminé ce travail que j'ai eu connaissance de la 3e partie des tables à 14 chiffres de M. Stenberg. Dans une introduction, l'auteur développe une série de formules qui, dans leurs parties essentielles, sont identiques à celles qui ont été développées plus haut.

J'ai également plus tard eu communication de quelques calculs inédits de $Li(e^x)$ pour des valeurs entières de x jusqu'à $x = 20$, dus à feu M. le professeur Oppermann. Ils ont été effectués à l'aide des formules (11) et (12) et fournissent par suite un moyen de contrôle, puisque, pour chaque valeur entière de a, on détermine en même temps les deux intégrales :

$$\int_{a-\xi}^{a} \frac{e^x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{a}^{a+\xi} \frac{e^x}{x} dx ,$$

l'intervalle ξ étant partout le même et ici égal à 1.

On trouvera dans le tableau, p. 268, le résultat de ce calcul. Les valeurs de e^x ont été calculées en partie par Oppermann, en partie, pour ce qui concerne les dernières, par l'auteur, qui, en même temps, a entrepris le calcul des trois dernières valeurs de $Li(e^x)$, pour lesquelles Oppermann n'avait pas obtenu plus de 12 décimales exactes. M. Bretschneider ayant, avec la même exactitude, déterminé les valeurs correspondantes de $Li(e^x)$ pour les valeurs inférieures de x, on possède ainsi les valeurs fondamentales de cette fonction calculées avec 20 décimales jusqu'à $x = 20$.

Errata.

(Les formules sont comptées pour des lignes.)

Page 193—11, ligne 14, au lieu de: $\sum_1^n x^{-r} = C -$ etc., lisez: $\sum_1^n x^{-r} = s_r -$ etc.

» 195—13, formule (29), » » » : $z^{-\frac{1}{6}}$, » : $z^{\frac{1}{6}}$

» 199—17, ligne 22, » » » : $\int_0^\infty h(x) x^{-r} d lx$, » : $\int_0^\infty h(x) x^{-s} d lx$

» 202—20, formule (65), » » » : $\mu(x)$, » : $\mu(n)$

» 204—22, » (72), le dernier membre sous le signe Σ_α doit être $l\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2} - \alpha i}\right)$.

» 206—24, ligne 17, au lieu de: $\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)} dz$, lisez: $\int_g^1 \frac{-r}{\beta(r-\beta)} d\beta$

» 215—33, » 22, » » » : Césaro, » : Cesáro

» 221—39, formule (111), » » » : $\theta(x)$, » : $\theta(n)$

» 223—41, » (118), » » » : $\frac{1}{p\left(p - \frac{1}{p}\right)}$, » : $\frac{1}{p\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$; le numéro (118) doit être effacé.

» » », ligne 5—11, la lettre x doit être remplacée par n; dans la formule (120), le numérateur et le dénominateur du dernier membre sont en outre intervertis.

» 224—42, ligne 28, au lieu de: $\sum_2^n A_p lp$, lisez: $\sum_2^\infty A_p lp$

» 225—43, » 18, » » » : $\Sigma l(x)$, » : Σlx

» 231—49, » 25, » » » : eller af $\tilde{\omega}(n)$, » : eller Middelværdien af $\tilde{\omega}(n)$

» 236—54, formule (163), » » » : $T(E)$, » : $T(Ex)$

» 256—74, ligne 26, » » » : $\sum_1^\infty (s(r) - 1)$, » : $\sum_2^\infty (s(r) - 1)$

» 286—104, en-tête, » » » : $\sum_1^n E\frac{n}{x}$, » : $\sum_2^n E\frac{n}{x}$

Bestemmelse

af

Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 7.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1885.

Paa Foranledning af den til Fastsættelsen af de elektriske Maalenheder i Oktober 1882 sammentraadte internationale Konference har der af Regeringen været bevilget mig en Sum af 5000 Kr. til Udførelsen af nærværende Undersøgelse, hvorved langt større Midler bleve satte til min Raadighed end dem, jeg ved mine tidligere til samme Maal sigtende Undersøgelser[1]) havde været i Besiddelse af. Officersskolens kemiske Laboratoriums Lokaler vare velvilligt stillede til min Disposition, ligesom en væsentlig Bistand har været mig ydet paa mangfoldige Maader af Laboratoriets Forstander Dr. H. Topsøe, som navnlig ogsaa har udført en stor Del af Maalingerne.

Til Bestemmelse af de absolute Grundenheder: Tid, Længde og Masse vare følgende Apparater anskaffede:

1. et Pendulkronometer, hvis Gang bestemtes ved Sammenligning med det astronomiske Observatoriums daglige Tidssignal,
2. en i Centimeter inddelt Normalmeter og et Kathetometer, begge fra Société Genevoise, den første med angiven Korrektion ($0{,}0237^{mm}$, rigtig ved $-1°{,}25$ C.), som var bestemt ved Sammenligning med en af det internationale Bureau i Paris verificeret Meter,
3. Normalvægtlodder fra Westphal i Celle.

I. Methoder for Modstandsmaalingerne.

Absolute Maalinger. Den anvendte Methode er i Principet ganske den samme, som den jeg i mine tidligere Undersøgelser har benyttet. Derimod har jeg i Udførelsen af Forsøgene gjort væsentlige Forandringer, navnlig for Rotationsapparatets Vedkommende, som jeg har indrettet i Overensstemmelse med det af mig til den internationale Konference gjorte Udkast[2]), og som nærmere vil blive omtalt i det følgende.

[1]) Overs. over d. K. D. Vidensk. Selsk. Forh. 1873, S. 1.

[2]) Journal de phys., S. II, T. 1, p. 477, 1882.

Relative Maalinger. Til alle mine relative Modstandsmaalinger har jeg benyttet en særegen Methode, som har vist sig saavel bekvem i Udførelsen som i høj Grad nøjagtig, hvorfor jeg tør anbefale den fremfor de sædvanlig benyttede Methoder.

De to Modstande AB og CD, som skulle sammenlignes, forbindes ved en Ledning BC og indskydes tilligemed to Traadruller i en Strømkreds. Disse Traadruller ere i passende Afstand anbragte paa Bordet foran og bagved et Spejlgalvanometer. Fra to af de fire Punkter A, B, C og D afledes Strømmen til Galvanometret, saaledes at denne afledede Strøm virker modsat Hovedstrømmen i Traadrullerne paa Galvanometrets Naale. I den til Galvanometret førende Ledning er desuden indskudt en Rheostat, ved Hjælp af hvilken Modstanden forandres, indtil Galvanometerspejlet er ført tilbage til Skalaens Nulpunkt.

Modstanden i Galvanometret tilligemed dets Tilledningstraade være betegnet ved G, Rheostatmodstandene ved R, R_1, R_2, efter som man har afledet Punkterne AC, BD eller AD. Man vil da have

$$\begin{aligned} k.AC &= G + R \\ k.BD &= G + R_1 \\ k.AD &= G + R_2 , \end{aligned}$$

idet $k + 1$ svarer til det konstante Forhold imellem Hovedstrømmens og den afledede Strøms Styrke. Heraf erholdes

$$\frac{CD}{AB} = \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1} .$$

Forsøgene kunne varieres ved Afledning af andre Par Punkter, som AB og CD, hvorved erholdes en Kontrol for Rigtigheden af det fundne Resultat.

For tillige at kunne variere Konstanten k paa bestemte Maader var Traaden i Traadrullerne sammensat som et Kabel af 11 indbyrdes isolerede Traade. Kabelet var svagt snoet, ligesom ogsaa de over en Meter lange to Kabelender fra enhver af Rullerne vare sammensnoede og førte til Siden til en Kommutator, hvor de 22 tæt til hinanden førte Traadender kunde indbyrdes forbindes paa hvilken som helst Maade. Man var saaledes i Stand til ved uforandret Stilling af Traadrullerne at forstærke disses Virkning paa Galvanometret 2, 3, indtil 11 Gange. Selvfølgelig maatte det, naar disse Kombinationer benyttedes, paases, at hele den udenfor Traadrullerne værende Ledning for Hovedstrømmen ingen Virkning udøvede umiddelbart paa Galvanometret, hvilket opnaaedes ved Udskydelse af Traadrullerne af Ledningen og Kompensering af den øvrige Lednings Virkning ved Indstilling af en paa Ledningen nær Iagttageren anbragt Sløjfe.

Galvanometret var et Thomson'sk med Planspejl og Kikkertaflæsning. Det indeholdt to Traadruller, den underste, som omfattede en Sats af smaa Magnetnaale, havde en tyk Traad, den øverste, som alene benyttedes ved disse Forsøg, bestod af en dobbelt, tynd og lang Traad og omsluttede den paa Spejlet anbragte Magnet.

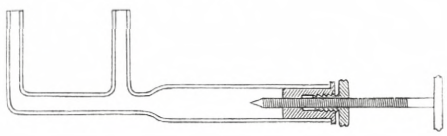
Alle Forsøg anstilledes i et ikke opvarmet Lokale. Forandringer under en Forsøgsrække af Galvanometrets Nulpunkt ophævedes ved Hjælp af en i Nærheden af Iagttageren anbragt Magnet. Rheostaten var en Siemens' med fra 1 indtil 10000 Enheder, hvortil undertiden blev føjet en anden fra $\frac{1}{10}$ til 1 Enhed. Ved Kalibrering viste den förste Rheostat sig saa nøjagtig, at der ikke behøvedes at indføres nogen Korrektionstabel. Jeg skal tilføje, at Rheostaten dengang var ny, og at der et halvt Aar senere viste sig kjendelige Forandringer, som vilde have gjort en ny Justering nødvendig.

II. Kalibrering af Glasrør.

Alle Kalibreringerne ere udførte af Dr. Topsøe. I en lille Afstand fra det paa et Betonfundament opstillede Kathetometer var et Mahognibrædt anbragt vertikalt paa et ligeledes paa Beton hvilende Bord. I dette Brædt var Normalmeteren indlagt og ved Siden af denne det Rør, som skulde kalibreres.

Kalibreringen af de snævre Rør udførtes paa den Maade, at en lille Kviksølvsøjle efterhaanden blev forskudt gjennem Røret, idet hver Gang Søjlens nederste Endeflade netop tangerede dens øverste Endeflade i dens foregaaende Stilling. Dette lod sig bekvemt og nøjagtig udføre paa følgende Maade. Et Glasrørr af den Form, som Figuren viser, var

Fig. 1.



indsat horisontalt i en Fordybning i ovennævnte Brædt. I den ombøjede Ende af Røret indsattes vertikalt det Rør, som skulde kalibreres, medens Apparatets anden vertikale Gren blev lukket med en Glasprop efter at have tjent til Indfyldningen af Kviksølv. Apparatet var lukket ved en med Pakskrue forsynet Prop, hvorigjennem gik en lang og fin Skrue, alt af Staal. Ved Hjælp af denne Skrue kunde Kviksølvet trykkes op til en vilkaarlig Højde i det Rør, som skulde kalibreres. Dette sidste Rør var foroven dobbelt ombøjet og udtrukket i en Spids. Efter at Kviksølvet var drevet op indtil Spidsen, blev Søjlen atter trukket tilbage paa en saadan Maade, at der efter den sammenhængende Søjle fulgte en lille Luftblære og derefter en omtrent 2 cm lang Søjle. Med denne sidste blev Kalibreringen udført.

Efter endt Kalibrering blev den lille Søjle dreven ud af Røret, optagen i en Skaal og vejet. Derefter blev en ved en Luftblære adskilt længere Kviksølvsøjle opsuget i Røret, idet Længden afpassedes omtrent efter hele den kalibrerede Længde. Efter at denne Søjles Længde og Beliggenhed i Forhold til et Mærke paa Røret var maalt, blev Søjlen ligeledes

uddreven og vejet. Endelig aftages Røret, afbrækkes nær ved det kalibrerede Stykkes Grænser og tilslibes konisk i begge Ender, hvorefter Rørets Længde maales.

De efter hinanden maalte Længder af den lille kalibrerende Kviksølvsøjle vare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ og

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = L.$$

Endvidere være L' Længden af den derefter indførte (store) Kviksølvsøjle, λ'_1 og λ'_n de manglende Stykker i den kalibrerede Længde, saaledes at man har

$$L - \lambda'_1 - \lambda'_n = L'.$$

Ligeledes være L'' Længden af det afbrækkede Rør og λ''_1 og λ''_n de manglende Stykker i den kalibrerede Længde, altsaa

$$L - \lambda''_1 - \lambda''_n = L''.$$

Man vil da kunne udtrykke Modstanden R' af Kviksølvsøjlen L'' ved

$$R' = r\left(\frac{\lambda_1 - \lambda''_1}{s_1} + \frac{\lambda_2}{s_2} + \ldots \frac{\lambda_{n-1}}{s_{n-1}} + \frac{\lambda_n - \lambda''_n}{s_n}\right),$$

idet r betegner Kviksølvets specifike Ledningsmodstand, og $s_1, s_2, \ldots s_n$ de til Midten af Søjlerne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ svarende Gjennemsnit.

De til det tomme Rum reducerede Vægte af den lille kalibrerende Søjle og af Søjlen L' være w og W. De af disse Søjler indtagne Rum kunne betegnes ved $v - 2x$ og $V - 2x$, idet x er det lille Rum, som begrænses af Kviksølvsøjlernes konvexe Endeflade, af en tangerende Plan til dennes Midtpunkt og af Rørets indre Cylinderflade. Naar altsaa Vægten af en Rumenhed Kviksølv ved 0°, som foreløbig antages for Forsøgets Varmegrad, betegnes ved ρ, saa er

$$w = \rho(v - 2x), \quad W = \rho(V - 2x),$$

hvoraf

$$W - w = \rho(V - v).$$

Tillige er

$$V = \left(n - \frac{\lambda'_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)v, \quad v = s_1\lambda_1 = s_2\lambda_2 = \ldots$$

Sættes

$$\lambda_1 - \frac{L}{n} = \delta_1, \quad \lambda_2 - \frac{L}{n} = \delta_2, \quad \ldots \lambda_n - \frac{L}{n} = \delta_n,$$

hvor Størrelserne δ blive meget smaa Størrelser, og indføres Betegnelsen

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots \delta_n^2 = \Sigma\delta^2,$$

saa vil man erholde

$$R'(W - w) = r\rho\left(n - 1 - \frac{\lambda'_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)\left(\frac{LL''}{n} - \lambda''_1\delta_1 - \lambda''_n\delta_n + \Sigma\delta^2\right).$$

Maalingerne af Længderne L' og L'' antages udførte ved Varmegraderne t' og t'', den Varmegrad, ved hvilken Normalmaalestokken er rigtig, være t_0 (— 1°,25); endvidere være de lineære Udvidelseskoefficienter for Messing og Glas betegnede ved b og g, og Kviksølvets

kubiske Udvidelseskoefficient ved γ. Man vil da have den til 0° reducerede Modstand R af Kviksølvsøjlen bestemt ved

$$R = R' \frac{1 + b(t' + t'' - 2t_0) + g(2t' - t'')}{1 + \gamma t'}.$$

De her benyttede numeriske Værdier af Konstanterne ere

$$\rho = 13{,}5952, \quad \gamma = 0{,}0001795, \quad b = 0{,}000018, \quad g = 0{,}0000084.$$

Med Hensyn til den ovenfor benyttede Konstant r bemærkes, at man vil erholde R udtrykt i sædvanlige Kviksølvenheder, naar Længderne angives i Millimeter, Vægtene i Milligram og r sættes lig $\frac{1}{1000}$.

Resultatet af Maalingerne vare:

Rør Nr. 1.

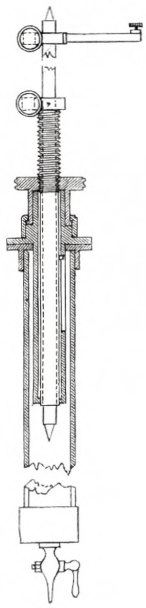
$$L = 368{,}119, \quad \lambda_1 = 19{,}406, \quad \lambda_n = 19{,}315^{\text{mm}}.$$
$$L' = 357{,}042, \quad \lambda'_1 = 4{,}685, \quad \lambda'_n = 6{,}392^{\text{mm}}.$$
$$L'' = 364{,}61, \quad \lambda''_1 = -0{,}87, \quad \lambda''_n = 4{,}38^{\text{mm}}.$$
$$n = 19, \quad t' = 10°{,}0, \quad t'' = 11°{,}0.$$
$$W = 1395{,}75^{\text{mgr}}, \quad w = 75{,}40^{\text{mgr}}, \quad \Sigma\delta^2 = 0{,}4714.$$
$$R = 1{,}26612 \text{ Kviksølvenheder.}$$

Rør Nr. 2.

$$L = 445{,}36, \quad \lambda_1 = 19{,}965, \quad \lambda_n = 20{,}434^{\text{mm}}.$$
$$L' = 442{,}32, \quad \lambda'_1 = 3{,}06, \quad \lambda'_n = -0{,}01^{\text{mm}}.$$
$$L'' = 435{,}30, \quad \lambda''_1 = -1{,}58, \quad \lambda''_n = 11{,}66^{\text{mm}}.$$
$$n = 22, \quad t' = 9°{,}6, \quad t'' = 9°{,}0.$$
$$W = 351{,}72^{\text{mgr}}, \quad w = 16{,}05^{\text{mgr}}, \quad \Sigma\delta^2 = 1{,}1714.$$
$$R = 7{,}42980 \text{ Kviksølvenheder.}$$

Kalibreringen af de vide Rør, nemlig tre 1 Meter lange, 1, 2 og 3 Centimeter vide Glasrør, som skulde benyttes ved de absolute Modstandsmaalinger, udførtes paa følgende Maade. Rørene vare ved den ene Ende lukkede med et med Hane forsynet Jernlaag, og ved den anden Ende indfattede i en Jernbøsning. Naar et af Rørene skulde fyldes med Kviksølv, blev det først i horisontal Stilling ved et med Glashane forsynet Glasrør sat i Forbindelse med en Luftpumpe og pumpet saa lufttomt som muligt, hvorefter Kviksølvet indsugedes gjennem Jernhanen. Dernæst opstilledes det fyldte Rør vertikalt og paa den øvre Bøsning befæstedes det i Fig. 2 fremstillede Staalapparat, som bestod af et ydre faststaaende Hylster med en Slidse, et indre Hylster for neden med en af Slidsen styret Tap, for oven fint skrueskaaret og ført af en Møttrik, samt inderst af en i begge Ender tilspidset Staalstang, der vilkaarlig lod sig forskyde og fastholde. Alt var meget omhyggelig afdrejet. Den nederste Spids blev ført ned til Berøring med Kvik-

Fig. 2.



sølvets Overflade, hvilket iagttoges ved Kikkert, og derefter blev Kathetometrets Kikkert indstillet paa den øverste Spids og dens Højde maalt. Kviksølvet blev efterhaanden udtappet i passende, omtrent lige store Mængder, og Maalingerne fortsattes igjennem hele den Længde af Røret, som skulde kalibreres.

Det videste af de tre Rør var forsynet med 4, de andre med 2 fine, konisk borede Huller. Ethvert af disse Huller vare lukkede lufttæt med en lille Platinplade, som blev fastholdt med en Røret næsten omsluttende Urfjeder. Dennes ombøjede Ender spændtes sammen ved en Kobbertraad, der tillige tjente ved de følgende Forsøg til elektrisk Ledning. Naar ved Kalibreringen Kviksølvet netop var sunket ned under et af Hullerne, blev Urfjedren løsnet og forskudt, den nederste Staalspids indstillet paa Midten af Hullet, som endnu ret godt kunde iagttages i Kikkerten, hvorefter Højden af den øverste Spids blev maalt. Desuden blev særskilt Afstanden maalt imellem Hullerne, som alle laa i samme vertikale Linie.

Da smaa Temperaturforandringer ikke kunde undgaas under Forsøgene, bleve Maalingerne ved smaa Korrektioner henførte til en fælles Middeltemperatur.

Er L den kalibrerede Længde ved Middeltemperaturen t, W den tilsvarende Vægt af det udtappede Kviksølv, L' Afstanden mellem to Huller, maalt ved Temperaturen t', saa kan Modstanden R' af Kviksølvsøjlen imellem de to Huller, uden Temperaturkorrektion, bestemmes ved

$$R'W = r\rho LL'\mu ,$$

hvor μ er et fra 1 kun lidt forskjelligt Tal, hvorved den af de enkelte Maalinger fremgaaede Korrektion med Hensyn til Rørets Afvigelse fra Cylinderformen er angivet. Denne Korrektion er, som af det følgende vil ses, meget lille, hvorfor det ikke har været nødvendigt her at medtage de Maalingers Enkeltheder, der have ligget til Grund for Beregningen. Af den saaledes fundne Værdi for R' beregnes dernæst den til 0° svarende Modstand R paa samme Maade som ovenfor, idet i den angivne Formel t' og t'' forandres til t og t'.

Resultaterne af Maalingerne vare:

Rør Nr. I.

$$L = 525{,}93^{\text{mm}}, \quad t = 12°49, \quad W = 2312197^{\text{mgr}},$$
$$L' = 499{,}35^{\text{mm}}, \quad t' = 10°6, \quad \mu = 1{,}000071,$$

hvoraf $R = 0{,}00154180$ Kviksølvenheder.

Rør Nr. II.

Dette Rør indeholdt 4 Huller A, B, C, D. Modstandene ved 0° af de Kviksølvsøjler, som befinde sig imellem disse Huller, betegnes henholdsvis ved AB, BC, CD.

AB.
$$L = 200{,}45^{\text{mm}}, \quad t = 11°70, \quad W = 2103229^{\text{mgr}},$$
$$L' = 199{,}79^{\text{mm}}, \quad t' = 9°0, \quad \mu = 1{,}000006.$$

BC.
$$L = 203{,}19^{\text{mm}}, \quad t = 10°79, \quad W = 2124558^{\text{mgr}},$$
$$L' = 199{,}97^{\text{mm}}, \quad t' = 9°0, \quad \mu = 1{,}000021.$$

CD.

$$L = 201{,}09^{mm}, \quad t = 11°22, \quad W = 2082375^{mgr},$$
$$L' = 200{,}45^{mm}, \quad t' = 9°0, \quad \mu = 1{,}000010,$$

hvoraf

$$AB = 0{,}00025836 \text{ Kviksølvenheder},$$
$$BC = 0{,}00025964 \quad »$$
$$CD = 0{,}00026279 \quad »$$

Da det senere ved de absolute Modstandsmaalinger viste sig, at de nøjagtigste Resultater erholdtes ved de Kviksølvsøjler, som havde den mindste Modstand, blev der ingen absolute Modstandsmaalinger udførte med det tredie Rør, hvis Modstand i Kviksølvenheder var 0,0062215.

III. Temperaturkoefficienten for Kviksølvets Ledningsmodstand.

Det til alle Forsøgene anvendte Kviksølv var af Dr. Topsøe fremstillet paa to forskjellige Maader. Den ene Del var omhyggelig renset paa sædvanlig Maade, dog uden Destillation; den anden Del var i større Mængde (16 Kilogram) fremstillet ved Destillation af Kviksølvilte, som var præpareret af renset Kviksølv. Begge Præparater viste imidlertid ved gjentagne Forsøg ikke nogen som helst kjendelig Forskjel i elektrisk Ledningsevne.

Til nærværende Forsøg benyttedes to ikke kalibrerede Rør, hvis Ender vare udvidede til cylindriske Beholdere. Det ene omtrent 1 Meter lange, 1^{mm} vide Rør var vunden i Spiral, det andet var 260^{mm} langt, $0{,}1^{mm}$ vidt og bøjet U-formet.

Efterat Rørene vare fyldte med Kviksølv, bleve de først anbragte under en Luftpumpes Klokke, og Modstanden blev iagttaget, medens Luften blev udpumpet. Hvis der nemlig skulde være smaa Luftblærer tilstede, saa vilde disse udvide sig ved Luftfortyndingen og derved forøge Ledningsmodstanden af Kviksølvsøjlen. Tillige skulde en ringe Modstandsforøgelse fremkomme alene ved Trykkets Formindskelse paa Kviksølvet, men jeg fandt tværtimod en konstant lille Aftagen af Modstanden, hvilken for det U-formede Rør beløb sig til 0,076 Procent. I andre Forsøg, som senere skulle omtales, og hvor der benyttedes lige, horisontalt stillede Rør, hvis Ender vare dækkede af Kviksølv, viste denne Anomali sig ikke, hvorfor jeg formoder, at den hidrører fra Udsugningen af Luften imellem Glasset og Kviksølvet i den øvre Del af Rørene. I ethvert Tilfælde viste Forsøgene, at der ingen kjendelige Luftblærer kunde være tilstede i Rørene.

Derefter indsattes et af Rørene i en med Alkohol fyldt Beholder, som befandt sig omgivet af en anden med Vand fyldt Beholder, og saaledes blev holdt paa konstant Varmegrad. Den første Beholder indeholdt tillige et i $\frac{1}{10}$ Grader inddelt Normalthermometer og en Rører.

Modstandsmaalingerne udførtes efter den ovenfor omtalte Methode. Ved AB er betegnet Modstanden af den i et Rørene ved Temperaturen t indesluttede Kviksølvsøjle,

ved BC Modstanden af en Platintraad, som forbinder Røret med en Rheostat, hvori Modstanden CD i den første Forsøgsrække var 1, i den anden 30 Siemens Enheder.

Spiralrør.

$t = 13°28.$ $k.AB = G + 2464{,}2$
$k.AD = G + 6671{,}5$
$k.BD = G + 743{,}1,$
hvoraf $G = 3464{,}2,\quad k.BD = 4207{,}3,$
$k.AB = 5928{,}4$ (ber. 5928,3).

$t = 10°00.$ $k.AB = G + 2445{,}9$
$k.AD = G + 6654{,}0$
$k.BD = G + 743{,}0,$
hvoraf $G = 3465{,}1,\quad k.BD = 4208{,}1,$
$k.AB = 5911{,}0$ (ber. 5911,0).

$t = 0°.$ $k.AB = G + 2392{,}6$
$k.AD = G + 6600{,}0$
$k.BD = G + 741{,}8,$
hvoraf $G = 3465{,}6,\quad k.BD = 4207{,}4,$
$k.AB = 5858{,}2$ (ber. 5858,2).

$t = 27°32.$ $k.AB = G + 2537{,}8$
$k.AD = G + 6746{,}0$
$k.BD = G + 743{,}5,$
hvoraf $G = 3464{,}7,\quad k.BD = 4208{,}2,$
$k.AB = 6002{,}5$ (ber. 6002,5).

De beregnede Værdier ere udledede ved Formlen

$$k.AB = 5858{,}2\ (1 + 0{,}0009013\,t),$$

og stemme, som man ser, næsten fuldkommen med de iagttagne.

U-formet Rør. Galvanometrets dobbelte Traad var her forenet til en.

$t = 8°32.$ $k.AD = G + 8773{,}1$
$k.BD = G + 3961{,}2$
hvoraf $k.AB = 4811{,}9$ (ber. 4811,9).

$t = 33°43.$ $k.AD = G + 8882{,}8$
$k.BD = G + 3961{,}2$
hvoraf $k.AB = 4921{,}6$ (ber. 4921,8).

$t = 35°31.$ $\quad k.AD = G + 8891{,}3$

$k.BD = G + 3961{,}0$

hvoraf $\quad k.AB = 4930{,}3$ (ber. 4930,1).

Beregningen er udført efter Formlen

$$k.AB = 4775{,}6\ (1 + 0{,}000916t).$$

De saaledes fundne Koefficienter for den apparente Modstandsforøgelse af Kviksølv i Glasrør ved en Opvarmning af 1° ere altsaa

0,0009013 mellem 0° og 27°32,

0,000916 mellem 8°32 og 35°31,

hvilke Koefficienter ere lidt større end den af Lenz fundne og temmelig nær overensstemmende med de af Siemens og for nylig af Mascart fundne Koefficienter.

IV. Kapillaritetens Indflydelse paa Kviksølvets Ledningsevne.

I et af den internationale elektriske Konferences Møder i 1882 henledede Becquerel[1]) Opmærksomheden paa ovennævnte Fejlkilde, i hvilken Anledning Helmholtz oplyste, at Siemens bestandig havde fundet den største Overensstemmelse mellem den iagttagne og den beregnede Modstand af Kviksølvsøjler, hvis Diameter varierede fra 1 til 2 mm, ligesom ogsaa Bosscha meddelte, at Rink i Delft havde anstillet Sammenligninger med forskjellige Rør og fundet en Overensstemmelse indtil $\frac{1}{7000}$. Da mine absolute Modstandsmaalinger skulde udføres med Søjler paa 2 og 3 Centimeters Diameter, medens Normalmaalet skulde henføres til en Søjle paa 1 Kvadratmillimeters Gjennemsnit, ansaa jeg det dog for nødvendigt selv ved nøjagtige Forsøg at undersøge, hvorvidt de molekulære Forandringer i Kviksølvets Overflade langs Glasrørets Vægge kunde hidføre nogen kjendelig Forandring i Kviksølvets Ledningsevne.

De første Forsøg anstilledes med et af tykke Spejlglasplader dannet Trug. Paa et Underlag af Spejlglas vare to, 1 cm høje slebne Glasstrimler befæstede med Fiskelim i en Afstand af 2 cm fra hinanden; to Staalplader dannede Enderne af det saaledes dannede Trug. Dette blev fyldt med Kviksølv og tæt over Kviksølvets Overflade var en Spejlglasplade anbragt. I denne befandt sig to større og to mindre Huller, i hvilke sidste to Synaale vare befæstede vinkelret paa Pladen. Disse vare forbundne med Galvanometret, medens en stærk Strøm lededes gjennem Trugets Endeflader og de i Nærheden af Galvanometret opstillede to Traadruller. Modstanden af Kviksølvsøjlen imellem de to Naalespidser blev saaledes bestemt ligesom i de tidligere Forsøg, og der undersøgtes nu, hvilken Forskjel i Modstanden der indtraadte, naar Dækpladen førtes ned til Berøring med Kviksølvets Overflade.

[1]) Procès-verbaux, S. 68. 1882.

Der viste sig ogsaa herved stedse en lille Forandring af Modstanden, men denne var snart positiv, snart negativ, og det fremgik af Forsøgene, at denne Forandring hidrørte fra det paa Kviksølvet udøvede Tryk. Dette kunde nemlig, alt efter som Kviksølvet mere eller mindre fyldte Truget, snart være positivt, hvilket viste sig ved den udhvælvede Overflade af Kviksølvet i de to større Huller i Dækpladen, snart negativt, i hvilket Tilfælde Kviksølvets Overflade var indhvælvet. Men ved disse Tryk bleve Trugets Vægge lidt bøjede, saaledes at Gjennemsnittet blev større, Modstanden mindre ved et større indre Tryk, og omvendt. Af Maalingerne fremgik, at, hvis der overhovedet fremkom nogen Forandring i Modstanden alene ved Kviksølvets Berøring med Dækpladen, saa kunde denne Forandring ikke overstige $\frac{1}{10000}$ af hele Modstanden.

En Virkning af Kapillariteten vil have den Indflydelse paa Formlen for en Kviksølvsøjles Ledningsmodstand, at der til Søjlens Gjennemsnit vil blive at tilføje et med dens Perimeter proportionalt Led. Det ses deraf, at Virkningen fornemmelig maatte give sig tilkjende ved Forsøg med meget snævre Rør. Jeg har derfor ogsaa udført Maalinger med saadanne Rør, navnlig de ovenfor omtalte kalibrerede Rør Nr. 1 og 2, hvis Diametre vare 0,606 og 0,273 mm.

Røret anbragtes i et Hul i Midten af en kvadratisk Træklods (2 cm i Sidelinie, 1 cm tyk), som blev indsat i et lignende Trug af Spejlglasplader, som ovenfor er omtalt, men af den dobbelte Højde (2 cm). Truget fyldtes med Kviksølv tilligemed Røret, der tilvejebragte Forbindelsen mellem de to Afdelinger af Truget. Ved Hjælp af Dækpladen kunde det lukkes lufttæt og pumpes lufttomt, medens Forandringerne af Modstanden bleve iagttagne. Paa den Maade sikrede jeg mig forud for enhver Maaling imod den mulige Tilstedeværelse af smaa Luftblærer i Røret. Derefter blev Laaget aftaget og Maalingerne udførte efter samme Methode, som tidligere, idet Hovedstrømmen lededes gjennem Trugets Endeflader og en Siemens' Normalenhed, medens to Punkter af denne Ledning forbandtes med Galvanometret. Forsøgene viste, at der ingen Forskjel i den maalte Modstand indtraadte, naar begge Enderne af den til Galvanometret førende Ledning bragtes i Berøring med Kviksølvet paa hver Side af Træpladen og derfra efterhaanden flyttedes langs Rørets Vægge indtil dettes Endeflader, hvorimod en kjendelig Forandring strax indtraadte, saasnart Afledningspunkterne førtes videre udenfor Endefladerne. Naar Afledningspunkterne befandt sig i Nærheden af Træpladerne, saa kunde den maalte Potentialforskjel derfor siges nøjagtig at svare til den, som findes i to Punkter, der befinde sig ved Rørets Endeflader i dets Glasvægs ydre Omkreds.

Naar Glasvæggens Tykkelse kan betragtes som uendelig stor i Sammenligning med Rørets indre Diameter, saa vil den paa den nævnte Maade maalte Modstand svare til Modstanden af Rørets Kviksølvsøjle forlænget med 0,82 Gange dets indre Diameter. Dette af Lord Rayleigh beregnede Tal behøver for Rørvægge af endelig Tykkelse en Korrektion,

som jeg har forsøgt at bestemme saavel ved Beregning som ved Forsøg. Jeg skal dog her udelukkende holde mig til de sidste. Disse udførtes med et 300 mm langt, 2,724 mm indvendig og 4,2 mm udvendig vidt Rør, for hvilket Modstanden først bestemtes. Derefter blev Røret brækket over i to Dele paa omtrent 200 og 100 mm Længde, og disses Modstand bestemt, og endelig blev den større Del brækket midt over og Modstanden bestemt af hver Del. Betegnes Rørets indre og ydre Diametre ved d_i og d_e, saa fandtes ved disse Forsøg den empiriske Formel

$$0{,}82 - 0{,}35\frac{d_i}{d_e}$$

som Udtryk for det Tal, der ved endelige Dimensioner træder i Stedet for det Rayleigh'ske Tal 0,82.

Det var min Hensigt paa samme Maade direkte at bestemme Korrektionen for Rør Nr. 1, men ved et Uheld gik Røret over, allerede førend de første Maalinger vare udførte. Begge Stykker bleve anbragte hvert i sin kvadratiske Træplade og nedsattes i Truget, som saaledes blev delt i tre Afdelinger. Afstanden imellem de to Rørender, som vendte mod hinanden, var omtrent 3 cm.

Betegnes ved R Modstanden af Kviksølvsøjlerne i begge Rørene og det mellemliggende Rum, S Modstanden af min Siemens' Normalenhed og x Modstanden af Forbindelsesledningen, saa gave Maalingerne, ved hvilke begge Galvanometrets Traade vare forenede til en:

$t = 10°10.$

$$\begin{aligned} k(R + S + x) &= 9063{,}3 + G \\ k(R + x) &= 4766{,}8 + G \\ k(S + x) &= 3551{,}0 + G, \end{aligned}$$

hvoraf

$$R = 1{,}28297\, S.$$

Ved direkte Forsøg fandtes endvidere Modstanden af Kviksølvet i det mellem begge Rørene liggende Rum lig $0{,}00009\, S$. Ved Reduktion til 0° ved Hjælp af Temperaturkoefficienten 0,00090 erholdes saaledes Modstanden af begge Rørene ved 0° lig

$$1{,}27132\, S.$$

Den benyttede Siemens' Normalenhed var mærket: Dec. 82, Nr. 2713, $\alpha = 0{,}000340$, richtig bei 15°5. Ved Henføring til denne Temperatur reduceres den fundne Værdi til

1,26899 Siemens Enheder.

Som Kontrol blev den benyttede Normalenhed sammenlignet med en B. A. Normalenhed (verificeret af Lord Rayleigh, Juni 1882, Nr. 54, $\alpha = 0{,}00025$, rigtig ved 11°5), hvorved fandtes

$$1 \text{ S. E.} = 0{,}95411 \text{ B. A.},$$

medens af Lord Rayleigh og Mrs. Sidgewick[1]) ved Modstandsmaalinger af Kviksølvsøjler af 1 til 2 mm Diameter er fundet

1 Kviksølvenhed = 0,95418 B. A.

Den ved Kalibrering fundne Modstand af Røret var (S. 7) 1,26612 Kviksølvenheder, og Korrektionen med Hensyn til de 4 Rørender, beregnet ved Hjælp af den ovenfor angivne Formel, idet $d_i = 0{,}6056$ mm og $d_e = 3{,}2$ mm, beløb sig til 0,00315 Kviksølvenheder. Ved Kalibreringen erholdes altsaa Rørenes Modstand lig

1,26927 Kviksølvenheder.

Forudsat, at min Siemens' Normalenhed nøjagtig svarer til Kviksølvenheden, er altsaa den iagttagne Modstand 0,022 Procent, og med Lord Rayleigh's Forsøg som Grundlag 0,029 Procent mindre end den theoretiske.

Det kalibrerede Rør Nr. 2 havde en Modstand af omtrent 7 S. E., og for nøjagtigere at kunne sammenligne denne med min Siemens' Normalenhed, indførtes der efterhaanden et forskjelligt Antal Vindinger af de to ydre Traadrullers Kabel, idet først ved tre forskjellige Kombinationer Siemens' Normalenhed alene blev afledet til Galvanometret, og derefter ved en fjerde Kombination Røret, der paa den angivne Maade var anbragt i Truget med Kviksølv. Betegnes de to Modstande henholdsvis ved S og R, og Forholdet mellem Hovedstrømmens og den afledede Strøms Intensiteter ved $\frac{k'}{n}$, idet n er det Antal Gange, Vindingerne i Traadrullerne er forøget (her efterhaanden 9, 5, 2 og 10 Gange), saa kunne Maalingernes Resultater udtrykkes ved

$t = 9°32.$

$$k'S = 9(526{,}50 + G + S)$$
$$k'S = 5(1635{,}60 + G + S)$$
$$k'S = 2(5378{,}7 + G + S)$$
$$k'R = 10(8504{,}7 + G + R).$$

Paa højre Side kan med tilstrækkelig Nøjagtighed strax sættes $S = 1$ og $R = 7{,}51$, hvorefter findes

$$R = 7{,}51057\ S.$$

Den til 0° reducerede Modstand af Røret er saaledes

7,43243 Siemens Enheder.

Den ved Kalibrering fundne Modstand beløb sig til 7,42980 Kviksølvenheder. Rørets indre Diameter var 0,273 mm, dets ydre Diameter 3,3 mm, hvoraf Korrektionen med Hensyn til Rørets Ender, beregnet ligesom ovenfor, findes lig 0,00369 Kviksølvenheder. Den korrigerede Modstand beløber sig altsaa til

7,43349 Kviksølvenheder.

[1]) On the specific resistance of mercury, Phil. trans. of the Roy. Soc., Part. I. 1883, p. 173.

Den ved direkte Maalinger bestemte Modstand er saaledes her 0,014 Procent mindre end den beregnede, naar Siemens' Normalenhed antages nøjagtig at svare til Kviksølvenheden.

Da de saaledes fundne Afvigelser ere meget smaa og gaa i samme Retning, er Resultatet af denne Undersøgelse, at Kapillariteten næppe udøver nogen maalelig Indflydelse paa Kviksølvets Ledningsevne.

V. Kviksølvets Ledningsmodstand i absolut Maal.

Rotationsapparatet bestod af en paa et Brædt anbragt hul Messingcylinder, inden i hvilken befandt sig en paa en Axel befæstet Skive af Messing eller Kobber. Cylinderens Længde var $1^{m},068$, ydre Diameter $0^{m},333$, indre Diameter $0^{m},322$. I Cylinderens ydre Flade var paa Maskine indskaaren en Skruegang, hvori var nedlagt et af 7, $^{1}/_{2}{}^{mm}$ tykke, Kobbertraade bestaaende Kabel; enhver af Traadene som ogsaa hele Kabelet var dobbelt omspunden med Silke. Dette Kabel gik i 472 Vindinger omkring Cylinderen og var fra Enderne ført tilbage til Midten af Cylinderen, hvor Traadenderne vare førte enhver til sin, paa Cylinderens Fodstykke anbragte, Klemskrue. Ved Maaling af Afstanden mellem hver 50 Skruevindinger viste Skruen sig fuldkommen nøjagtig, og den til de 472 Vindinger svarende Højde fandtes lig $998,70^{mm}$.

Axlen, paa hvis Midte Skiven var anbragt, forløb konisk henimod Enderne, der hvilede i isolerede, i Cylinderens udskaarne Endeflader anbragte, Lejer. Den sattes i Omdrejning ved en Dynamomaskine, hvis Omdrejningsaxe var stillet i den første Axes Forlængelse, idet begge Axler ved to isolerende Universalled vare forbundne ved et 26^{mm} tykt, $4^{m},3$ langt Messingrør, som understøttedes i 4 faste Lejer. Ved de større Omdrejningshastigheder, der kunde drives indtil 30 Omdrejninger i Sekundet, frembragtes den elektriske Strøm af en anden Dynamomaskine med tyndere Traad, idet denne Maskine bevægedes ved Dampkraft, hvorimod der til de mindre Hastigheder kun udkrævedes Strømmen fra et galvanisk Batteri paa 10 til 20 Elementer, hvormed kunde opnaas 6 til 12 Omdrejninger i Sekundet. En Del af den til Dynamomaskinen førende Strøm var afledet til en Sideledning, hvori var indskudt en Rheostat. Ved at variere Modstanden i denne kunde Maskinens Omdrejningshastighed let reguleres.

Den i den roterende Skive inducerede elektromotoriske Kraft overførtes til en Ledning gjennem to Kontakter, den ene anbragt ved Axlens ene Ende i Centret, den anden ved Skivens Periferi. Den første Kontakt bestod af en konisk Messingspids, som ved en Fjeder trykkedes ind imod Axlens Midtpunkt, hvor den omskrevne Flade næppe udgjorde en Kvadratmillimeter. Den anden Kontakt bestod af en tynd, 1^{cm} bred, Strimmel af samme Metal som Skiven (Kobber eller Messing), der var loddet til en Stang ligeledes af samme Metal. Strimmelen var ført tværs over den $11,8^{mm}$ tykke Skive og trykkede meget let imod

den, idet Strimmelens Bagside var belagt med blødt, fingertykt Filt, som udfyldte Mellemrummet mellem den og Cylindren. Stangen var ført udenfor Cylinderen og fastgjort. Begge Kontakterne bleve holdte smurte med Olie.

De ved Kontakterne opstaaede thermoelektriske Strømme viste sig ved denne Anordning temmelig svage og konstante, ligesom ogsaa den roterende Skive ikke opvarmedes kjendelig under Rotationen. Iøvrigt har der med Hensyn til Kontakterne fra først af været ikke faa Vanskeligheder at overvinde.

Fra den ene af disse to Kontakter førte en Ledning til den Kviksølvsøjle, hvis Ledningsmodstand skulde bestemmes, derfra til et Galvanometer og herfra atter tilbage til den anden Kontakt. Kviksølvet var indesluttet i et af de ovenfor omtalte kalibrerede, 1^{m} lange, 2 eller 3^{cm} vide Glasrør. Dette var stillet vertikalt, helt fyldt med Kviksølv, og medens Hovedstrømmen gjennemstrømmede hele Søjlen, skete Afledningen til Galvanometret fra to af de i Glasvæggen borede Huller igjennem de her om Røret spændte Urfjedre. Resultatet maatte iøvrigt være blevet det samme, hvis Hovedstrømmen var ledet gjennem disse Huller, og den afledede Strøm taget fra Søjlens Endepunkter, men da denne Anordning ikke frembød praktiske Fordele, blev den ikke forsøgt.

Det er en Selvfølge, at de i Ledningen til Galvanometret indførte elektromotoriske Kræfter fra den roterende Skive og fra Kviksølvsøjlen skulle være modsat rettede, idet Forsøgene, som bekjendt, gaa ud paa at maale Skivens Omdrejningshastighed, i det Øjeblik disse to modsatte elektromotoriske Kræfter netop ophæve hinanden.

Galvanometret var det tidligere omtalte Thomson'ske, idet her den underste Traadrulle med omtrent 0,7 Ohms Ledningsmodstand kom til Anvendelse. Jordmagnetismens Virkning paa Magnetnaalene var ved disse Forsøg i Reglen ikke kompenseret ved den til Apparatet hørende ydre Magnet, da det var af større Vigtighed, at Svingningerne udførtes hurtig (en enkelt Svingning udførtes i omtrent 3 Sekunder). Til en elektromotorisk Kraft af en Milliontedel Volt svarede et Udslag af omtrent 120^{mm} paa den i Kikkerten iagttagne Skala. Ved Bestemmelserne af Ledningsmodstanden af en Kviksølvsøjle, som udgjorde 0,00024 Ohm, var Hovedstrømmens Strømstyrke 2,9 Ampère, altsaa den elektromotoriske Kraft, som skulde maales, omtrent 700 Milliontedel Volt, som saaledes vilde svare til 84000^{mm} paa Skalaen. Da Afvigelserne fra Skalaens Nulpunkt i de faa Sekunder, som forløb, medens Skivens Omløbshastighed blev maalt, næppe oversteg 10^{mm}, vilde den tilsvarende Fejl kun naa op til $\frac{1}{84}$ Procent.

Kronografen. Foruden den ovenfor omtalte, midt inde i Cylinderen anbragte, Skive var der tæt udenfor Cylinderen anbragt en anden ganske lignende paa den roterende Axe. Disse to Skiver, hvoraf den ene var af Kobber, den anden af Messing, kunde ombyttes med hinanden. Et i Millimeter inddelt Papirbaand var lagt om den ydre Skives Rand, hvorved Skivens Omkreds blev delt i omtrent 940 Dele. I en ringe Afstand fra

Papirbaandet var stillet Enderne af to Platintraade, hvorfra elektriske Gnister gjennem Papiret sprang over paa Skivens Rand for hver to Sekunder i den Tid, Rotationshastigheden skulde maales, og for at kunne ordne de saaledes erholdte Mærker efter Tidsfølgen blev i alle Tilfælde, hvor dette var nødvendigt, de to Platintraade efter hver Gnist bragte i en anden Stilling. idet de vare anbragte i et om sin Axe bevægeligt Rør, saaledes at den ene Traadende befandt sig i Axen, den anden udenfor denne. Paa denne Maade bestemtes kun Brøkdelen af det i to Sekunder udførte Antal Omdrejninger. Det hele Tal kunde enten maales umiddelbart eller betragtes som bekjendt, da en Fejl paa Bestemmelsen af dette overhovedet ikke var mulig.

De to Platintraade vare forbundne med Induktionsrullen af et Rhumkorff's Apparat, hvori Hovedstrømmen blev afbrudt hvert andet Sekund. Dette udførte jeg efter at have prøvet andre Methoder, som gave mindre gode Resultater, ved alle de endelige Forsøg paa følgende simple, men fuldkommen tilfredsstillende Maade. Foran det i Indledningen omtalte Pendulkronometer var opstillet et sædvanlig til Faldforsøg benyttet Pendulur, hvis Gang under Maalingerne hyppig sammenlignedes med Kronometrets ved Bestemmelsen af de sammenfaldende Pendulslag. Til Pendulets nederste Spids var befæstet en 1 til $1^1/_2$ Meter lang Silketraad, hvis anden Ende var fastgjort i samme Højde og i Pendulets Svingningsplan, saaledes at Traaden blev svagt strammet for hver dobbelt Svingning af Pendulet. Paa Midten af denne Traad var i en kort Silketraad ophængt en lille Bøjle af Kobbertraad, hvis Grene gjennem to Øskener gik ned i to Cylinderglas, hvoraf det ene var fyldt helt med Kviksølv, det andet halvt med Kviksølv, halvt med Spiritus. Under Pendulets Svingninger hvilede den meste Tid Bøjlen paa Øsknerne, og først naar Snoren begyndte at strammes, blev Bøjlen med stor Hastighed kastet til Vejrs, og alt var afpasset saaledes, at Spidsen af Bøjlens ene Gren løftedes fra Kviksølvet over i Spiritusen i det Øjeblik, Hastigheden skjønnedes at være størst. Ved denne Bevægelse blev det Rhumkorff'ske Apparats Hovedstrøm afbrudt, og samtidig sloge Induktionsgnisterne over paa den roterende Skive.

Forsøgsanordningen. Apparaterne vare opstillede i to Værelser, som vare skilte fra hinanden ved et mellemliggende tredie. I det største af disse befandt sig Rotationsapparatet, Dynamomaskinen, Kronografen og den Kviksølvsøjle, hvis Modstand skulde maales. Rotationsapparatets og Dynamomaskinens fælles Axe var stillet tilnærmelsesvis i Øst—Vest, og alt Jern var fjernet fra Rotationsapparatets Nærhed. Fra disse Apparater førte alle Ledninger til det andet Værelse, hvor Galvanometret var opstillet i en Afstand af 10 Meter fra Rotationsapparatet og 15 Meter fra Dynamomaskinen. Desuden befandt sig her i Iagttagerens Nærhed forskjellige Strømvendere, Nøgler og Rheostater. Til den ene Strømvender førte Ledningerne fra et Batteri paa 24 Bunsen'ske Elementer, som vare opstillede i den anden Ende af Bygningen. Fra Strømvenderen gik Ledningen til Rotationsapparatets Traadvindinger, herfra gjennem en i Luften svævende Traad til Kviksølvsøjlen og

videre tilbage til Strømvenderen. Nær denne var tillige indskudt en Nøgle, saaledes at Strømmen først sluttedes ved et Tryk paa denne.

Et andet Batteri paa 10 til 20 Bunsen'ske Elementer tjente som Drivkraft for Dynamomaskinen, hvortil førte en direkte Ledning. Denne forgrenede sig til en Sideledning, som førte ind til en i Nærheden af Iagttageren anbragt Vædskerheostat, der bestod af et højt, med en mættet Opløsning af svovlsurt Kobberilte fyldt Cylinderglas, hvori en som negativ Elektrode tjenende Kobberplade var anbragt i Bunden, medens en tyk Kobbertraad, som bekvemt kunde hæves og sænkes, tjente som positiv Elektrode. Undertiden var ogsaa ved Siden af denne indskudt en Proprheostat. Paa denne Maade kunde uden Vanskelighed ved Pasning af Rheostatmodstanden Dynamomaskinens Hastighed reguleres og vedligeholdes konstant.

Til Rhumkorff's Apparat benyttedes 4 Elementer, hvorfra Ledningen var ført hen til en i Nærheden af Iagttageren anbragt Nøgle, ved Hjælp af hvilken Kronografen sattes i Virksomhed i de Øjeblikke, Rotationshastigheden skulde maales.

Endelig tjente en afledet Strøm fra et enkelt Daniell's Element til Kompensering af de thermoelektriske Strømme i den til Galvanometret førende Ledning. I Elementets Strømkreds var indskudt den fornødne Rheostatmodstand, medens et Stykke $^1/_2{}^m$ lang, $^3/_2{}^{mm}$ tyk Kobbertraad af denne Ledning var indført i Ledningen til Galvanometret. Den indskudte Rheostatmodstand beløb sig i Reglen til nogle tusinde Siemens' Enheder, og den til Kompensationen fornødne elektromotoriske Kraft oversteg sjælden 3 Milliontedele Volt. Tillige tjente denne afledede Strøm til at vise, hvorvidt Ledningen til Galvanometret var i Orden, idet Erfaringen snart lærte, hvilket Galvanometerudslag der skulde indtræde ved en given Forandring af Rheostatmodstanden.

Endnu skal kun tilføjes, at der ogsaa i Ledningen til Galvanometret var indført en Strømvender.

Forsøgene udførtes paa følgende Maade. Efterat Dynamomaskinen var sat i Gang, blev ved Trykket paa en Nøgle den til Rotationsapparatets Traadvindinger førende Batteristrøm sluttet, og, idet Galvanometerudslaget iagttoges i Kikkerten, blev ved Hjælp af Vædskerheostaten Dynamomaskinens Omdrejningshastighed reguleret, indtil Galvanometerspejlet omtrent viste paa Nulpunktet. Nu blev Batteristrømmen til Rotationsapparatet afbrudt og, medens Rotationen vedvarede, den thermoelektriske Strøm kompenseret paa den nylig angivne Maade. Derefter sluttedes paa ny Strømmen til Rotationsapparatet og Rotationen blev nøjagtig reguleret ved Vædskerheostaten. Naar da Galvanometerspejlet med ringe Hastighed passerede Nulpunktet, blev ved et Tryk paa den anden Nøgle Strømmen sluttet til det Rhumkorff'ske Apparat og saaledes Kronografen sat i Virksomhed. Efter to, undertiden flere, efter hinanden med Mellemrum af to Sekunder følgende Udladninger, som tydelig hørtes af Iagttageren, bleve alle Strømmene afbrudte, Rotationen standsede og

Mærkerne af Gnisterne paa Papirbaandet noteredes. Strax derefter gjentoges Forsøget med forandret Strømretning til Rotationsapparatet, hvorpaa to tilsvarende Maalinger toges med Forandring af Ledningen til Galvanometret. Endelig viste det sig ogsaa nødvendigt at gjentage de samme fire Maalinger med den modsatte Rotationsretning, idet den til Dynamomaskinens roterende Anker førende Ledning omvexledes. Saaledes kom der 8, umiddelbart efter hinanden følgende, Maalinger til at høre til en Forsøgsgruppe, af hvilke 8 Maalingsresultater Middeltallet toges.

Under Maalingerne iagttoges hyppig Kviksølvsøjlens Temperatur paa et i $^1/_{10}$ Grader inddelt Normalthermometer. En Ombytning af de forskjellige Batteriers Poler blev oftere prøvet, men viste sig at være uden Indflydelse paa Enderesultatet.

Endnu skal kun bemærkes, at der ved Slutningen og Aabningen af den til Rotationsapparatet førende Batteristrøm let fremkom Induktionsstød i Galvanometerledningen, som kunde besvære Iagttagelserne, men det var dog ikke vanskeligt at bringe disse Stød til at ophøre ved Forandring af Stillingen af den Del af Galvanometerledningen, som befandt sig i Nærheden af Rotationsapparatets Traadvindinger, og hvorfra disse Induktionsstød havde deres Udspring.

Beregning af Rotationsapparatets Konstant. Naar den afledede Kviksølvsøjles Modstand betegnes ved R, det ved Maalingerne fundne Antal af Skivens Omdrejninger i Sekundet ved n, og Rotationsapparatets Konstant ved C, saa skal man have

$$R = n\,C.$$

Jeg kan her indskrænke mig til at angive Beregningen af denne Konstant for det Tilfælde, at den roterende Skive er uendelig tynd, at Skivens Centrum falder nøjagtig i Rotationsaxen og Cylinderens Axe, og at Centralkontakten ligeledes falder nøjagtig i denne Axe, idet de virkelige Afvigelser herpaa kun give saa forsvindende smaa Korrektioner, at en nærmere Angivelse af Beregningen af disse bliver ganske unødvendig.

Er d Højden af den Skruegang, hvori Traaden er nedlagt omkring Cylindren, r Traadvindingernes Radius, ρ Skivens Radius, a_1 og a_2 Skivens Afstande fra Traadvindingernes Endeflader, saa bliver Konstanten C at beregne af Formlen

$$C = \frac{2\pi}{d}\int_{-a_2}^{a_1} dx \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r\rho\cos\theta}{\sqrt{x^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta}}.$$

Sættes heri til Afkortning $\rho = qr$, $x^2 + r^2 = \alpha r^2$, og tilsvarende $a_1^2 + r^2 = \alpha_1 r^2$, $a_2^2 + r^2 = \alpha_2 r^2$, samt

$$Q_\alpha = \int_1^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha - 1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\cos\theta}{\sqrt{\alpha + q^2 - 2q\cos\theta}},$$

vil man erholde

$$C = \frac{\pi q r^2}{d}[Q_{\alpha_1} + Q_{\alpha_2}].$$

For ovenstaaende dobbelte Integral erholdes Rækkeudviklingen

$$Q_\alpha = 2\pi q\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[1 + \frac{3q^2}{8\alpha^2} + \frac{5q^4}{16\alpha^4}\left(\frac{7}{4} - \alpha\right) + \frac{35q^6}{128\alpha^6}\left(\frac{33}{8} - \frac{9}{2}\alpha + \alpha^2\right) + \ldots\right],$$

hvor det medtagne Antal Led her er tilstrækkeligt for den numeriske Beregning, medens den fuldstændige Udvikling er

$$Q_\alpha = 2\pi\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{2m+1}\frac{1.3\ldots 2m-1}{2.4\ldots 2m}\cdot\frac{1}{1.2\ldots m+1}\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}}.$$

Maalingernes Resultater. Maalingerne med Rotationsapparatet kunde først paabegyndes henimod Slutningen af Marts (1884), og Resultatet af de første Maalinger (1 Kviksølvenhed = 0,9417 Ohm) meddelte jeg den den 28. April sammentrædende internationale Konference med Tilføjende, at dette Resultat kun maatte betragtes som foreløbigt, idet det endnu ikke var lykkedes mig at erholde en tilstrækkelig tilfredsstillende Overensstemmelse mellem de enkelte Maalinger indbyrdes. Det samme vedblev at vise sig i en Række følgende Maalinger, indtil jeg prøvede at gjentage Forsøgene med modsat Rotationsretning, hvorved jeg endelig opdagede den egentlige Grund til Maalingsfejlene. Jeg skal søge nærmere at gjøre Rede herfor.

En fuldkommen Isolation er ved elektriske Forsøg en Umulighed, men det er dog kun undtagelsesvis, at fuldkommen uundgaaelige Isolationsfejl kunne, saaledes som Tilfældet var her, faa en kjendelig Indflydelse paa Resultatet. Den til Galvanometret førende Ledning var i to Punkter, A og B, forbunden med den Kviksølvsøjle, hvis Modstand skulde bestemmes, og som var gjennemstrømmet af en stærk elektrisk Strøm i. Modstanden AB var meget lille, nemlig fra 0,00026 til 0,0015 Kviksølvenheder. Er nu tillige et Punkt C af Galvanometerledningen kommen i en svagt ledende Forbindelse med et Punkt D af Hovedledningen, vil der ogsaa herigjennem kunne afledes en forholdsvis betydelig Del af Hovedstrømmen til Galvanometret. Betegnes nemlig ved CD Modstanden imellem de to Ledninger og ved r Modstanden af den Del af den sluttede Ledning til Galvanometret, som gaar fra A eller B til C ad den Vej, som ikke indeholder Galvanometret, saa vil den til Galvanometret afledede elektromotoriske Kraft E, som under Forsøgene holdes i Ligevægt ved den i samme Ledning inducerede elektromotoriske Kraft, tilnærmelsesvis kunne udtrykkes ved

$$E = i\,.\,AB\left[1 \pm \frac{BD}{AB}\cdot\frac{r}{CD}\right],$$

idet der forudsættes, at Modstanden AB er meget lille i Sammenligning med BD og r, ligesom ogsaa at CD er meget stor i Sammenligning med de andre Modstande. Det øverste Fortegn svarer til det Tilfælde, at Galvanometret befinder sig i Ledningen fra A til

C, det underste, naar det er i Ledningen fra B til C. Naar Forsøget gjentages ved Rotation af Skiven i modsat Retning, saa maa Galvanometerledningens Ender i A og B ombyttes, hvorved i ovenstaaende Udtryk Fortegnet for det andet Led bliver det modsatte. Det ses heraf, at den fra Ledningen imellem C og D hidrørende Fejl kan elimineres ved at gjentage Forsøget med modsat Rotation og tage Middeltallet af de to Resultater.

Jeg skal som Exempel anføre det første af de ved modsatte Rotationer anstillede Forsøg. Hovedstrømmen gik 5 Gange omkring Rotationscylinderen, og Modstanden i denne Ledning, som paa det nærmeste maatte svare til Modstanden BD ovenfor, var 195 S. E. Tillige var i dette Forsøg $AB = 0{,}00154$ S. E. Antallet af Skivens Omdrejninger i 2 Sekunder var 14,6820 for Rotationen til højre, og 14,5751 for Rotationen til venstre, saa at Afvigelserne fra Middeltallet beløb sig til 0,37 Procent. Ifølge ovenstaaende Formel haves altsaa i dette Tilfælde

$$0{,}0037 = \frac{195}{0{,}00154} \cdot \frac{r}{CD},$$

hvoraf

$$CD = 34 \,.\, 10^6 r.$$

Sættes heri efter et Skjøn $r = 0{,}5$ S. E., bliver altsaa Resultatet det, at en Isolationsfejl, ved hvilken Modstanden beløb sig til 17 Millioner Siemens' Enheder, vilde være tilstrækkelig til at forklare den Fejl, som Forsøgene med modsatte Rotationsretninger viste maatte være tilstede. Da de to Ledninger nødvendigvis saavel ved Rotationsapparatet som i Nærheden af Iagttageren maatte føres nær hen til hinanden, vare saa smaa Isolationsfejl næppe til at undgaa, og man maatte i det Sted søge ved Forsøgene selv at eliminere dem.

Isolationen af de enkelte Traade i Rotationsapparatets Kabel var fra først af, navnlig ved fugtig Luft, ikke tilfredsstillende, hvorfor Kabelet gjentagne Gange blev gjennemtrukket af en tynd Skellakopløsning. Efter en Uges Forløb fandtes den mindste Modstand i de isolerende Lag imellem de 6 af Traadene indbyrdes og imellem disse og Cylinderen omtrent lig 500000 S. E., en Isolation, som her var tilstrækkelig. Den syvende Traad maatte derimod udskydes af Forbindelsen, og i Løbet af Forsøgene maatte senere ogsaa en af de andre Traade udskydes paa Grund af aftagende Isolation, saaledes at ved de endelige Forsøg kun 5 Traade kom til Anvendelse.

Udmaalingen af Rotationsapparatets enkelte Dele gav, idet Maalenheden overalt er 1 Centimeter, følgende Resultater.

Traadvindingernes Radius $R = 16{,}65$,

Skruevindingernes Højde $d = 0{,}211589$,

Afstandene fra Skivens Midte til hver af Traadvindingernes Endeflader $a_1 = 50{,}99$,

$a_2 = 49{,}80$.

Maalingerne forud for Forsøgene af Messingskivens Diameter 2ρ gave for 4 forskjellige Steder

29,897, 29,909, 29,901, 29,913, Middel 29,905.

Efter Udførelsen af et stort Antal Omdrejningsforsøg og umiddelbart forud for de endelige Forsøg fandtes

29,889, 29,879, 29,894, Middel 29,8933,

eg efter Tilendebringelsen af alle Forsøgene

29,889, 29,894, 29,898, Middel 29,8937.

De sidste næsten identiske Resultater viste, at der intet kjendeligt Slid havde fundet Sted ved de endelige Forsøg. Derimod fremtraadte Virkningen af Slidet tydeligt ved Kobberskiven, for hvilken før og efter de endelige Forsøg fandtes følgende Diametre

29,867, 29,871, 29,872, Middel 29,870,

29,856, 29,853, 29,859, Middel 29,856.

Den med disse numeriske Værdier efter den ovenfor udviklede Formel beregnede Konstant C, formindsket med den sammesteds omtalte Korrektion, som kun beløber sig til 0,6 Enheder, er for Messingskiven

39656,1,

og for Kobberskiven før og efter de endelige Forsøg

39594,1 og 39556,1,

af hvilke to Grænseværdier ved Interpolation er beregnet de til enhver af de tre med denne Skive anstillede Forsøgsrækker svarende Konstanter.

Denne for 0° beregnede Konstant gaar ved $t°$ over til

$$C(1 + bt),$$

idet $b = 0{,}000018$ er Messingets lineære Udvidelseskoefficient.

Det Antal Omdrejninger, Skiven udførte i to af Kronografens Sekunder, være betegnet ved $m + \frac{n}{p}$, idet m er det hele Antal, n det paa Papirstrimlen aflæste Antal Millimeter imellem Mærkerne af to paa hinanden følgende Gnister, og p Længden af Papirstrimlen i Millimeter. Endvidere være σ Kronografsekunder lig 1 Sekund, s Antallet af de efter hinanden indskudte Traade i Kablet, R Kviksølvsøjlens Modstand i Kviksølvenheder ved 0° og γ (= 0,00090) den apparente Temperaturkoefficient for denne Modstand. Man vil da erholde

$$1 \text{ Kv. Enh.} = \frac{1}{2}\sigma\left(m + \frac{n}{p}\right)\frac{Cs(1+bt)}{R(1+\gamma t)} \text{ abs. Ohm.}$$

Jeg kan her indskrænke mig til at angive Resultaterne af mine endelige Maalinger, som alle bleve udførte i Dagene fra den 9. til den 13. Juni (1884), og som alene ere benyttede til Fastsættelsen af den efter mine Maalinger sandsynligste Værdi af den til Ohm'en svarende Modstand i Kviksølvenheder.

Rør Nr. I. Messingskive. Værdierne af n, hvorved efterhaanden Strømretningen til Rotationsapparatet og til Galvanometret blev vendt om, vare

491,0, 583,7, 514,0, 571,0,

og ved Gjentagelse af de samme Maalinger

492,6, 581,3, 496,5, 592,6,

Middel 540,34.

Efter at Skivens Rotation var forandret til den modsatte, fandtes tilsvarende

651,1, 676,8, 626,4, 592,5,

663,1, 681,7, 648,2, 586,4,

Middel 640,77.

Heraf erholdes for den første Rotationsretning, idet $m = 14$, $p = 939{,}6$,

$$m + \frac{n}{p} = 14{,}5751,$$

og for den anden

$$m + \frac{n}{p} = 14{,}6820.$$

Endvidere var

$s = 5$, $\sigma = 1{,}01924$, $t = 17°{,}06$, $R = 0{,}0015418$, $C = 39656{,}1$,

hvorefter erholdes

1 Kviksølvenhed = 0,94455 abs. Ohm.

De følgende Forsøg bleve anstillede med Kobberskiven og det kalibrerede Rør Nr. II, som indeholdt de tre Kviksølvsøjler AB, BC og CD. Modstanden af enhver af disse Søjler var omtrent 6 Gange mindre end Modstanden af Røret Nr. I, og de 5 Traade af Rotationsapparatets Kabel vare derfor her forenede til en Traad. Herved var Kabelets Modstand formindsket 25 Gange, og Strømstyrken forøget 12 Gange. Det ses heraf, at skjøndt den maalte Modstand her var 6 Gange mindre end ved den første Forsøgsrække, saa var den maalte elektromotoriske Kraft dobbelt saa stor, hvorfor Nøjagtigheden af de følgende Forsøg ogsaa kan regnes omtrent som den dobbelte. Ligeledes maa ogsaa Forskjellen paa de ved de modsatte Rotationer erholdte Resultater her, under Forudsætning af samme Isolationsfejl, blive betydelig mindre.

Rør II, AB, Kobberskive. Værdierne af n:

243,5, 253,0, 234,1, 239,8,

250,8, 258,6, 245,2, —

Middel 246,4.

Ved modsat Rotation:

271,6, 280,4, 269,8, 277,6,

260,0, 269,6, 270,0, 271,5,

Middel 258,9. Endvidere var

$m = 12$, $p = 939{,}5$, $s = 1$, $\sigma = 1{,}01977$, $t = 17°{,}97$, $R = 0{,}00025836$, $C = 39578{,}5$, hvorefter erholdes

1 Kviksølvenhed = 0,94391 abs. Ohm.

Rør II, *BC*, Kobberskive. Værdierne af n:

351,5, 325,2, 341,4, 324,6,

Middel 335,7.

Ved modsat Rotation:

349,8, 324,8, 343,8, 321,5,

Middel 335,0.

$m = 12$, $p = 940$, $s = 1$, $\sigma = 1{,}01915$, $t = 18°{,}73$, $R = 0{,}00025964$, $C = 39571{,}0$, hvorefter erholdes

1 Kviksølvenhed = 0,94410 abs. Ohm.

Rør II, *CD*, Kobberskive. Værdierne af n:

432,8, 435,9, 436,1, 441,2,

Middel 436,5. $t = 18°{,}32$, $\sigma = 1{,}01935$.

Ved modsat Rotation:

487,7, 518,4, 496,0, 518,2,

495,8, 522,0, 484,2, 511,6,

Middel 504,24. $t = 18°{,}36$, $\sigma = 1{,}01945$.

$m = 12$, $p = 941{,}5$, $R = 0{,}00026279$, $C = 39562{,}2$,

hvorefter erholdes

1 Kviksølvenhed = 0,94391 abs. Ohm.

Af disse Maalingsresultater i Forening fremgaar som det sandsynligste Enderesultat

1 Kviksølvenhed = 0,9440 abs. Ohm

1 abs. Ohm = 1,0593 Kviksølvenhed.

Dette Resultat stemmer paa det nærmeste overens med de af F. Kohlrausch og Roiti fundne, medens de benyttede Methoder alle ere væsentlig forskjellige. Overhovedet fremgaar det af samtlige Resultater, som have været forelagte den internationale Konference, — navnlig efter at nylig Wild ved Korrektionen af en Fejl er kommen til et Resultat, som er i nøje Overensstemmelse med Middelværdien af de øvrige, — at næppe nogen af de anvendte forskjellige Methoder medføre konstante Fejl.

Jeg havde selv næret Betænkelighed ved Anvendelsen af variable Strømme, idet der var Mulighed for, at indre thermoelektriske Forskjelligheder i en Leder kunde have samme Virkning som f. Ex. Polarisationen i en Elektrolyt og navnlig gjøre Modstanden ved variable Strømme mindre end ved konstante Strømme. Denne Betænkelighed kan jeg nu ganske opgive, og jeg er ogsaa ad andre Veje naaet til samme Resultat.

Saavel ved mine relative som absolute Modstandsbestemmelser, der bleve udførte med konstante Strømme, har jeg nemlig hyppig gjentaget de samme Maalinger med intermitterende Strømme, men i intet Tilfælde har der vist sig nogen som helst Forskjel i

Resultaterne. Hertil kan jeg føje endnu en Betragtning, som ikke er ganske uden Interesse. Hvis der findes nogen kjendelig Forskjel paa Ledningsevnen for konstante og variable Strømme, saa maatte denne ogsaa have Indflydelse paa en Leders Induktionskonstant. Ved tidligere Forsøg[1]) havde jeg i Virkeligheden fundet en lille Afvigelse af de iagttagne Induktionskonstanter fra de beregnede, idet de første fandtes gjennemgaaende 5 til 6 Procent mindre end de sidste. Beregningen var udført paa sædvanlig Maade, nemlig uden at der var taget tilstrækkeligt Hensyn til den Omstændighed, at Strømtætheden ved variable Strømme er en Funktion af Afstanden fra Traadledningens Centrallinie. Efter at have taget denne Omstændighed med i Betragtning fandt jeg, at den paa sædvanlig Maade beregnede Induktionskonstant maatte formindskes med Traadens Længde, og denne Korrektion svarede paa det nærmeste netop til den fundne Afvigelse.

Naar saaledes Afvigelserne imellem de forskjellige Videnskabsmænds Bestemmelser af Ohm'en maa betragtes som tilfældige, saa bør ogsaa den af Konferencen vedtagne Ohm, nemlig

$$1 \text{ Ohm} = 1{,}06 \text{ Kviksølvenheder},$$

der nærmest svarer til Middeltallet af alle Iagttagelserne, vistnok almindelig betragtes som den for Tiden nøjagtigste, ligesom der ved denne Bestemmelse sandsynligvis er opnaaet den oprindelig tilsigtede Grad af Nøjagtighed, nemlig af 1 Tusindedel.

---

[1]) Om Elektricitetens Forplantning, Overs. o. d. K. D. Vidensk. Selsk. Forh. 1879.

Spolia atlantica.

Bidrag til Kundskab

om

Salperne.

af

M. P. A. Traustedt.

Med to Tavler.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 8.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1885.

Indholdsfortegnelse.

Side

Indledning . . . . . 339 (5).

Literaturfortegnelse . . . . . 341 (7).

Om Grupperingen af Arterne . . . . . 345 (11).

Om Salpernes geografiske Udbredelse . . . . . 346 (12).

Oversigt over Salpe-Formerne . . . . . 347 (13).

Synopsis Salparum . . . . . 350 (16).

1. Salpa pinnata, Forsk. . . . . 353 (19).

2. Salpa affinis, Cham. . . . . 357 (23).

3. Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt. . . . . 360 (26).

4. Salpa scutigera-confoederata, Cuv.-Forsk. . . . . 362 (28).

5. Salpa democratica-mucronata, Forsk. . . . . 365 (31).

- — — — var. flagellifera, mihi . . . . . 369 (35).

6. Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuv. . . . . 370 (36).

7. Salpa africana-maxima, Forsk. . . . . 374 (40).

8. Salpa cylindrica, Cuv. 377 (43)

9. Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim.-Cuv. . . . . 379 (45).

10. Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim.-Pall. . . . . 382 (48).

11. Salpa hexagona, Quoy & Gaim. . . . . 385 (51).

Nomenclator Salparum . . . . . 389 (55).

Tavleforklaring . . . . . 393 (59).

Paa Universitetets Zoologiske Museum i Kjøbenhavn forefindes saa omfangsrige og smukke Samlinger af Salper, at de vistnok vanskeligt finde deres Mage andetsteds.

Disse Samlinger skylde væsenligt Professor *Steenstrups* mangeaarige og ihærdige Bestræbelser deres Tilblivelse, og de siden under Lokalitetsangivelserne opførte Navne afgive det bedste Vidnesbyrd om den værdifulde og utrættelige Bistand, som er blevet ham til Del fra saa mange forskjellige Sider.

Som det vil fremgaa af det foreliggende Arbeide ere de fleste Indsamlinger foretagne i Atlanterhavet, og de afgive efter min Mening et smukt og kjærkomment Bidrag til denne Dyregruppes Udbredelsesforhold i dette Verdenshav.

Tilskyndet af D'Hrr. Professor *Steenstrup* og Dr. *Lütken*, for hvis Bistand jeg herved bringer min Tak, tog jeg i Aaret 1880 fat paa Gjennemarbeidelsen af dette rige Materiale af Salper, og endnu inden Udgangen af det nævnte Aar forelaa Resultaterne af disse mine Studier i den Form, hvorunder jeg nu tillader mig at fremlægge dem for Offentligheden.

Efter *Chamisso*, hvis overordentlig værdifulde Arbeide bærer Aarstallet 1819, have adskillige Naturforskere, blandt hvilke jeg særligt vil nævne *Meyen* og *C. Vogt*, beskjæftiget sig med Salpernes Systematik, men efter *Vogts* berømte Arbeider, der skrive sig fra den første Halvdel af Halvtredserne, altsaa nu i omtrent 30 Aar, er der ikke fremkommet noget mere omfattende Værk om disse Dyr. Der har saaledes nu i mange Aar været Trang til en paa et større Materiale støttet Bearbeidelse af den herhen hørende Literatur og til en Række Figurer, som kunde lette Oversigten og hjælpe til at holde Formerne ude fra hinanden.

Nærværende Arbeide er da gjort med den Hensigt for Øie om muligt at afhjælpe denne Trang, og Forf. har bestræbt sig for at gjøre Behandlingen af de ham tilgjængelige Arter og deres forskjellige Former saa ensartet og kortfattet som muligt.

Af ny Former foreligger der ikke mange; det indskrænker sig til Kjedesalperne af *Salpa cylindrica* og *S. hexagona* foruden *S. flagellifera*, som jeg indtil videre har anset for at være en Varietet af *Salpa democratica-mucronata*, men som maaske fremtidige Undersøgelser paa Grundlag af et rigere Materiale, end det jeg har havt, vil gjøre til en Art for sig.

Paa den anden Side findes her enkelte forlængst med Navn forsynede Salper, der ere blevne udstyrede med en mere tidssvarende Beskrivelse; herhen høre *Salpa affinis*, *Salpa costata-Tilesii* og *Salpa hexagona*.

Literaturfortegnelse.

Agass. Nr. 1. = Al. Agassiz, Description of Salpa Cabotti, Desor (Proceed. Boston Soc. N. H., Vol. XI, Dcbr. 1866, p. 17—23, med 2 Tavler).

Agass. Nr. 2. = Al. Agassiz, Letter Nr. 4 to C. P. Patterson, on the dredging operations of the U. S. Coast Survey Sr. «Blake», during June and July 1880 (Bulletin of the Mus. of compar. Zoology at Harvard College, Vol. VI, Nr. 8, Cambridge, Sptbr. 1880, p. 148—149).

Blainv. = Blainville, Salpa i Dictionnaire des sciences naturelles, Tome 47, 1827, p. 94—123.

Blumenb. = Blumenbach, Abbildungen naturhist. Gegenstände, Göttingen 1810, Nr. 30.

Bory de St. V. = Bory de St. Vincent, Voyage aux quatre îles d'Afrique, Tome I, 1804, p. 134, Atlas, Pl. 6, Fig. 3 (Salpa bipartita, som ifl. Lesson, Cent. Zool., p. 161, Pl. 55, Fig. 1 er = Diphyes dispar, Cham. & Eys).

Bosc, Nr. 1, Histoire naturelle des Vers, Tome II. Paris, An. X (1802), p. 179. (Suite à Buffon, Tome LXIV).

Bosc, Nr. 2. = Bosc, Histoire naturelle des Vers, contenant leur descriptions, leurs moeurs et leur usage, 2e éd., Paris 1827, Tome II, p. 168—181, med Tavler.

Brooks, Nr. 1 = Brooks, Embryology of Salpa (Proceed. Bost. Soc. Nat. Hist., Vol. 28, 1875, p. 193).

Brooks, Nr. 2. = Brooks, The development of Salpa (Bull. of the Mus. of compar. Zool., Vol. III., Nr. 14, Cambridge 1876, p. 291—348).

Brooks, Nr. 3 = Brooks, Development of the ova in Salpa (Johns Hopkins Univ. Biolog. Lab., Vol. II, Nr. 2, Baltimore 1882, p. 301).

Brooks, Nr. 4 = Brooks, Chamisso and the discovery of alternation of generation (Zoolog. Anzeiger, 1882, p. 212).

Brooks, Nr. 5 = Brooks, The origin of the eggs of Salpa (Studies from Biol. Lab. Vol. II, p. 301, Pl. XXIV. 1882).

Browne = Browne, History of Jamaica, London 1756, p. 384, Tab. 43.

Brug. = Bruguière, Encyclopédie méthodique, Histoire nat. des Vers etc., Paris 1789, Tome I.

Cham. = Chamisso, de animalibus quibusdam e classe vermium Linnæana, Fasc. Imus, de Salpa, Berolini, 1819.

Chiaje, Nr. 1 = delle Chiaje, Memorie sulla storia e notomia degli Animali senza vertebre del regno di Napoli, 1828, Vol. III, p. 59—64.

Chiaje, Nr. 2 = delle Chiaje, Descrizione e notomia degli Animali invertebrati della Sicilia citeriore osservati vivi negli anni 1822—30, Tomo terzo, Napoli 1841, p. 38—46, Tav. 66, 76—79 og 144.

Costa, Nr. 1 = Costa, Osservazioni fisiologiche ed anatomiche sopra alcune specie del genere Salpa, med 4 Tav. (Mem. della R. Accad. di Sc. di Napoli, 1839, Vol. IV, p. 193—196, Suppl. ibid. 223—230).

Costa, Nr. 2 = Costa, Fauna del Regno di Napoli, Molluschi. Ordine II, Acefali senzaconchiglia, p. 3—8, Tav. I—II.

Costa, Nr. 3 = Costa, Osservazioni embriologiche sulla Salpa pinnata (Rend. Accad. di Napoli, 1866, p. 438).

Cuvier, Nr. 1 = Cuvier, Mémoire sur les Thalides (Thalia, Browne) et sur les Biphores (Salpa, Forsk.) — (Annales du Muséum d'hist. nat., An. XII (1804), Tome IV, p. 360—382, Pl. 68).

Cuvier, Nr. 2 = Cuvier, Le Règne animal, Paris 1817, Tome II, p. 495-497.

Cuvier, Nr. 3 = Cuvier, Le Règne animal, édit. accompagnée de Pl. gravées; les Mollusques avec un Atlas, par M. G. P. Deshayes, Paris 1828, p. 238-241, Pl. 120-123.

Cuvier, Nr. 4 = Cuvier, Le Règne animal, nouv. édit., Paris 1830, Tome III, p. 163-165.

Dall = Dall i American Journal of Conchology, VII, p. 457 (om Salpa hereulea og cymbiola).

Desor = Desor i Proceed. of Boston Society of Nat. Hist. III, Cambridge 1851, p. 75. (Afh. er fra 1848).

Eschricht = Eschricht, Anatomisk-physiologiske Undersøgelser over Salperne (Kgl. Danske Vidensk. Selskabs naturv. og mathem. Afhandl. VIII, 1841, p. 297-392, Tab. I—V).

*) *Fleming, Nr. 1* = Fleming, Classification of Tunicata (Edinb. Encyclop. 1820).

*) *Fleming, Nr 2* = Fleming, History of British animals, Edinburgh 1828, p. 467.

Forb. & Hanl. = Forbes and Hanley, A History of British Mollusca and their Shells, Vol. I, London 1853, p. 47—54, Pl. E, Fig. 5—6.

Forsk. = Forskåhl, Descriptiones animalium etc., quæ in itinere orientali observavit. Post mortem auctoris edid. C. Niebuhr, Hauniæ 1775, p. 112—117.

Freminville = Freminville, Observations zoologiques faites pendant un voyage sur les côtes d'Afrique et du Brésil (Annales des Sciences nat., 1830, p. 101).

Gaimard = Quoy & Gaimard.

Hanc. = Hancock, On the anatomy and physiology of the Tunicata (Journal of the Linnean Society, Zoology, Vol. IX, London 1868, p. 309—346).

Hanl. = Forbes & Hanley.

Herdman = Herdman, Report on the Tunicata collected during the Cruise of H. M. S. «Triton» in the summer 1882. (Transact. Royal Society of Edinburgh, Vol. 32, Part I, 1884, p. 113).

*) *Home* = Home, Lectures on comparative anatomy, Vol. II, London 1814, Pl. 71—74.

Huxl. = Huxley, Observations upon the anatomy and physiology of Salpa and Pyrosoma (Phil. Trans. 1851, p. 568).

Jeffr., Nr. 1 = Gwyn Jeffreys, Fourth Report on Dredging among the Shetland Isles (Report of the British Association for the Advancement of Science for 1867, p. 439).

Jeffr., Nr. 2 = Gwyn Jeffreys, Last Report on Dredging among the Shetland Isles (ibid., 1868, p. 303).

Jones = Jones, Article: Tunicata i Todds Cyclopædia of Anatomy, vol. IV.

Krohn = Krohn, Observations sur la génération et le développement des Biphores-Salpa (Annales des sciences nat., 3 Sér., Zoologie, Tome VI, 1846, p. 110-131).

Krus. = Krusenstern, Atlas zur Reise um die Welt unternommen auf Befehl S. Kais. M. Alexander d. Ersten auf den Schiffen Nadeshda und Neva, St. Petersburg 1814, Tab. XXI, Fig. 1—6 (Texten har jeg ikke set).

Lam. = Lamarck, Histoire naturelle des animaux sans vertèbres, Tome III, Paris 1816, p. 113—119.

Less., Nr. 1 = Lesson, Centuries Zoologiques, Paris 1830, p. 95, Pl. 33, Fig. 2 (Salpa proboscidalis) og p. 161, Pl. 55, Fig. 1 (Oplysning om at Bory de St. Vincents Salpa bipartita = Diphyes dispar, Ch. & Eys.).

Less., Nr. 2 = Lesson i Duperrey, Voyage autour du monde, exécuté par ordre du roi, sur la corvette de S. M. la Coquille pendant les années 1822—25, Zoologie, Tome II, rédigée par M. M. Garnot et Lesson, Paris 1830, p. 256—279. Atlas, Pl. 4—6.

Leuck. = Leuckart, Zoologische Untersuchungen, II Heft, Salpa und Verwandte, Giessen 1854.

L., Nr. 1 = Linnæus Systema naturæ, Ed. X, Tom. I, Holmiæ 1758, p. 657.

L., Nr. 2 = Linnæus, Systema naturæ, Ed. XII, Holmiæ 1766.

L., Nr. 3 = Linné, Systema naturæ, Ed. XIII, Gmelin, London 1788—91.

*) *Mc. Culloch* = Mac Culloch. Western Isles, Vol. II, p. 157. (den første, som omtaler Fundet af Salper ved Englands Kyst; citeret i Forb. & Hanl., Brit. Moll.).

Mc. Donald = Mac Donald, On the representative Relationships of the fixed and the free Tunicata (Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh, vol. XXIII, 1864, p. 171—183).

Mc. Int. = Mac Intosh, Some observations on British Salpæ (Journ. Linn. Soc., Vol. IX, 1868, no. 33, p. 41—48, Pl. I, read Nov. 16, 1865).

Meyen = Meyen, Beiträge zur Zoologie, gesammelt auf einer Reise um die Erde. 1ste Abth., über die Salpen (Nova Acta Acad. cæs. Leop. Car. natur. curios., Tom. XVI, pars pr. 1832).

Müller, Nr. 1 = H. Müller, Ueber anatom. Verschiedenheit d. zwei Formen (Gener.) bei den Salpen (Verhandl. der phys. med. Gesellschaft in Würzburg, Bd. III, 1852, p. 57—66).

Müller, Nr. 2 = H. Müller i Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Bd. IV, 1853, p. 329.

Otto = A. W. Otto, Beschreibung einiger neuen Mollusken und Zoophyten (Nova Acta Acad. cæs. Leop. Car. natur. curios., Tom. XI, Bonnæ 1823, p. 303—305, Tab. 42, Fig. 1 a—d).

Pall. = P. S. Pallas, Specilegia zoologica, Fasc. X, Berolini 1774.

Péron = Péron, Entdeckungsreise nach den Süd-Ländern etc. während d. J. 1800—1804. Aus dem Französischen übersetzt von Hausleutner, Bd. I—II, Tübingen 1808—1819. (Kobbertavlerne dertil ere franske; paa Tab. 30 og 31 findes Afbildning af Salpa antheliphora, cyanogaster og vivipara; jeg har ikke fundet nogen Beskrivelse af disse Dyr i Texten). Den franske Original: Péron et Lesueur, Voyage de découvertes aux terres australes, kjender jeg ikke.

Quoy & Gaim., *Nr. 1* = i Freycinet, Voyage autour du monde. Zool., Paris 1824.

Quoy & Gaim., *Nr. 2* = Quoy et Gaimard, Observations sur les Biphores et les Beroes, faites pendant le voyage autour du monde de la corvette l'Uranie, commandée par M. Louis de Freycinet (Annales des sciences natur, Tome VI, Paris 1825, p. 28—47, Pl. I, Fig. 3—10).

Quoy & Gaim., *Nr. 3* = i Bull. soc. philom. Août 1826, Fig. A, 1—3.

— — *Nr. 4* = i Ann. des sciences nat., Tome X, 1827, p. 225, Pl. 8.

*) — — *Nr. 5* = i Dumont d'Urville, Voyage de la corvette l'Astrolabe, éxécuté par l'ordre du roi, etc. — Zoologie par Quoy & Gaimard. 4 voll. 1826—34.

Risso = Risso, Histoire naturelle des principales productions de l'Europe et particulièrement de celles des environs de Nice et des Alpes maritimes, Tome IV, Paris 1826, p. 284.

Salensky = W. Salensky, Ueber die embryonale Entwickelung der Salpen (Zeitschrift f. wissensch. Zoologie, Bd. 27, 28 og 30).

Sars, Nr. 1 = M. Sars, Bidrag til Sødyrenes Naturhistorie, Bergen 1829, p. 51, Tab. 6. (cfr. Okens Isis, 1833, Tab. 10, Fig. 8—9).

Sars, Nr. 2 = M. Sars, Fauna littoralis Norvegiæ, 1 Heft, Christiania 1846, p. 63—85, Taf. 8, 9 og 10.

Sav. = Savigny, Mémoires sur les animaux sans vertèbres, II, fasc. I, Paris 1816, p. 124, pl. 24.

Stp. = Steenstrup, Om Forplantning og Udvikling gjennem vexlende Generationsrækker. Udg. som Indbydelsesskrift til Examen artium og den offentlige Skoleexamen ved Sorøe Academie i Juli 1842, Kjøbenhavn 1842, p. 18—27.

Til. = Tilesius, Abbildung und Beschreibung eines sonderbaren Seebeutels oder einer neuen Thetys-Species aus dem Atlant. Ocean, Thetys vagina (Jahrbuch der Naturgeschichte, I, 1802, p. 150—165, Taf. 5—6).

Todaro, Nr. 1 = Todaro, Sopra lo sviluppo e l'anatomia delle Salpa (Atti della R. Academia dei Lincei, 1 Ser., Vol. I, Roma 1875, p. 720—792, Tav. 1—4).

Todaro, Nr. 2 = Todaro, Sopra una nuova forma di Salpa, S. dolicosoma (ibid, 3 Ser., Vol. VIII, Fasc. I, Roma 1883, p. 41—43. — uden Fig.).

Verrill = Verrill, Invertebrate animals of Vineyard Sound, p. 447.

Vogt, Nr. 1 = C. Vogt, Bilder aus dem Thierleben, Frankfurt am Main, 1852, p. 26—90.

Vogt, Nr. 2 = C. Vogt, Mém. sur les Salpes de la Mer de Nice. (Bull. Inst. Nat. genev. I, p. 226).

Vogt, Nr. 3 = C. Vogt, Recherches sur les animaux inférieurs de la Méditerranée, second mémoire. Sur les Tuniciers nageants de la mer de Nice. (Mém. de l'Institut national genevois, 1854, II, p. 1—61, Tab. V—IX).

*) En Stjærne foran Titlen betyder, at jeg ikke har havt Leilighed til at se Bogen.

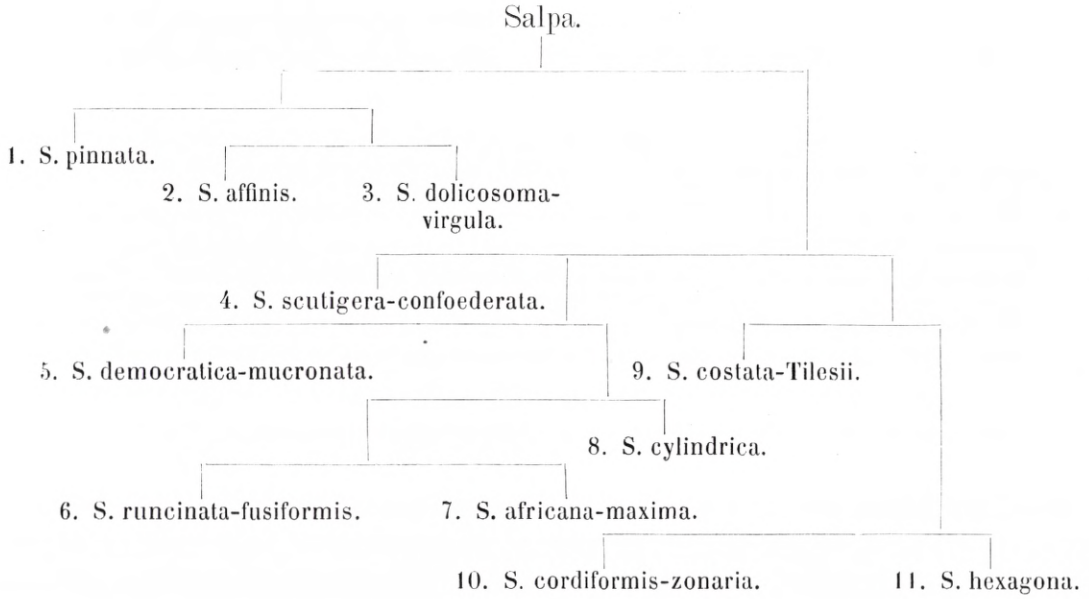
Om Grupperingen af Arterne.

De i dette Arbeide beskrevne 11 Arter af Salper falde i to naturlige Afdelinger, der kunne opfattes som to Slægter, for hvis Vedkommende man kan anvende de allerede af Blainville foreslaaede Navne: *Cyclosalpa* og *Salpa*, s. s. — Jeg har dog foretrukket at beholde Slægtnavnet *Salpa* for samtlige Arter.

Den første Afdeling omfatter de tre Former: *Salpa pinnata*, *S. affinis* og *S. dolicosoma-virgula*. Man behøver kun at henvise til den eiendommelige Stilling og Forbindelsesmaade af Individerne i Salpekjeden, det besynderlige Leiringsforhold af Tarmkanalen hos den enlige Salpe og den Omstændighed at Tarmkanalen i det hele taget ikke er nucleusformigt sammenrullet, for blot at fremhæve nogle Hovedpunkter, der ere tilstrækkelige til paa den ene Side at knytte dem sammen og paa den anden Side at stille dem fjærnt fra alle andre Salpe-Arter.

Den anden Afdeling omfatter de øvrige 8 Arter: *Salpa scutigera-confoederata*, *S. democratica-mucronata*, *S. runcinata-fusiformis*, *S. africana-maxima*, *S. cylindrica*, *S. costata-Tilesii*, *S. cordiformis-zonaria* og *S. hexagona*. — Disse 8 Arter lade sig igjen gruppere i to Underafdelinger, af hvilke den ene, hvis Kjedesalper alle have flere (ca. 4) Fosteranlæg, optages af de tre Former: *Salpa cordiformis-zonaria*, *S. hexagona* og *S. costata-Tilesii*, medens de andre fem, hvis Kjedesalper alle kun have ét enkelt Fosteranlæg, danne den anden Underafdeling. Ret naturlige Smaagrupper dannes paa den ene Side af *Salpa runcinata-fusiformis*, *S. africana-maxima* og *S. cylindrica* og paa den anden Side af *Salpa cordiformis-zonaria* og *S. hexagona*, der kan her blot fremhæves de interessante Ligheder i Muskelkonstellationerne hos Kjedesalperne af den første Gruppe og de Ligheder, som f. Ex. ses i Fimreorganerne og Udviklingen af Muskulaturen hos alle Former af den anden Gruppe, medens *Salpa scutigera-confoederata* og *S. democratica-mucronata*, der ere meget forskjellige fra hinanden indbyrdes, staa langt ude til Siden i den førstnævnte, og *Salpa costata-Tilesii* kun er fjærnt beslægtet med den sidstnævnte Gruppe.

[1]) For ikke at belemre denne Dyregruppe med flere Navne end høist nødvendigt, har jeg ikke givet de for første Gang her i dette Arbeide beskrevne Kjedesalper af *Salpa cylindrica* og *S. hexagona* særlige Navne.



Om Salpernes geografiske Udbredelse.

	Atlanter-havet.	Middel-havet.	Indiske Ocean.	Stille Ocean.
1. Salpa pinnata	+	+		+
2. — affinis	+			+
3. — dolicosoma-virgula		+		
4. — scutigera-confoederata	+	+	+	+
5. — democratica-mucronata . . .	+	+	+	+
6 — runcinata-fusiformis	+	+	+	+
7. — africana-maxima	+	+	+	
8. — cylindrica	+			+
9. — costata-Tilesii	+	+	+	+
10. — cordiformis-zonaria	+	+	+	+
11. — hexagona			+	+

Som det vil ses af ovenstaaende Tabel, have flere Arter en særdeles vid geografisk Udbredelse, hvilket er let forklarligt, naar man erindrer, at Salperne ere Høisødyr og saaledes med de forskjellige Strømninger kunne føres langt omkring. Fra de arktiske Have kjendes ingen Salper. Heller ikke er det mig bekjendt, at de nogensinde ere sete i danske Farvande.

For Atlanterhavets Vedkommende, hvilket Verdenshav er bedst undersøgt og rigest repræsenteret paa Universitetets Zoologiske Museum, kan jeg angive den omtrentlige Nordgrændse for de fleste Arter.

Salpa runcinata-fusiformis' Nordgrændse gaar saaledes fra 61° N. B. paa Norges Kyst over Færøerne til henimod Grønlands Sydspids, hvor den er truffet paa ca. 59° N. B.

Salpa democratica-mucronata kjendes ligeledes fra 61° N. B. paa Norges Kyst, men dens Nordgrændse falder strax stærkt mod S. V. ned over Hebriderne og gaar derfra til Cap Cod paa Nordamerikas Østkyst.

Salpa pinnata, *scutigera-confoederata*, *africana-maxima* og *cordiformis-zonaria* træffes saa langt Nord paa som ved Indløbet til Kanalen.

Salpa costata-Tilesii' Nordgrændse synes at gaa fra den pyrenæiske Halvøs Nordvestspids ud over Azorerne.

Salpa affinis er ikke truffet nordligere end ved de Kanariske Øer, medens *Salpa cylindrica* i ethvert Tilfælde paa Universitetets Zoologiske Museum ikke haves længere Nord fra end 20° N. B.

Syd paa kjendes Salper saa langt som til Cap Horn, altsaa ca. 55° S. B.

Fra de øvrige Verdenshave foreligger der kun saa spredte Oplysninger om Salpernes Forekomst og Udbredningsforhold, at der ikke kan siges noget i Almindelighed derom.

Oversigt over Salpe-Formerne.

A. Tarmkanalen udstrakt eller dannende en vid Krumning, ikke nucleus-formigt sammenrullet (Cyclosalpa, Blainv.):

1. Kjedesalper med finneformigt Vedhæng paa Bugsiden:

a. Aabningerne endestillede:

*) Et liniedannet, violet (i Spir. hvidt) Kirtelorgan paa hver Side af Ryggen; Tarmkanalen bøier sig fra Maven nedad og løber langt fortil hen under Bugfuren . . . . . Salpa pinnata, Forsk., pr. gr.

**) Intet liniedannet Kirtelorgan paa hver Side af Ryggen; Tarmkanalen danner en stor, aaben, bøileformig Krumning . . . Salpa affinis, Cham., pr. gr.

b. Kloakaabningen rygstillet; Tarmkanalen og Testiklen ligger bag Kloakrummet, indesluttede i et stort, kegleformigt, spidst tilløbende Vedhæng til Kroppen:
Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt, pr. gr.

2. Enlige Salper med endestillede Aabninger; Tarmkanalen krummer sig fra Maven opad, fortil og løber langt ud i Gjælleröret:

a. Fem liniedannede, violette (i Spir. hvide) Kirtelorganer paa hver Side af Ryggen; 8 Kropmuskler . . . . . Salpa pinnata, Forsk., pr. sol.

b. Ingen liniedannede Kirtelorganer paa hver Side af Ryggen:

*) 8 Kropmuskler; der findes ingen dem krydsende Længdemuskler:
Salpa affinis, Cham., pr. sol.

**) 9 Kropmuskler; der findes 4 dem krydsende Længdemuskler, to paa Ryggen og to paa Bugen, strækkende sig fra 2den til 6te Tværmuskel:
Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt, pr. sol.

B. Tarmkanalen nucleusformigt sammenrullet:

1. Kjedesalper uden finneformigt Vedhæng paa Bugen:

a. Aabningerne endestillede:

*) 5 kun paa Ryggen udviklede Kropmuskler; de tre forreste nærme sig noget til hinanden midt paa Ryggen, i hvis Midtlinie de forøvrigt ere afbrudte; de to bageste ere parallele:
Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim.-Cuv., pr. gr.

**) 7 brede Kropmuskler, af hvilke kun den forreste er afbrudt midt paa Ryggen; alle ere de afbrudte paa Bugsiden:
Salpa hexagona, Quoy & Gaim., pr. gr.

b. Mundaabningen endestillet, Kloakaabningen rygstillet; 4 Kropmuskler, der kun ere udviklede paa Ryggen, danne to skjæve Kors:
Salpa scutigera-confoederata, Cuv.-Forsk., pr. gr.

c. Aabningerne rygstillede:

*) Kropmusklerne indbyrdes parallele, 6 i Tallet, alle afbrudte paa Bugsiden:
Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim.-Pall., pr. gr.

**) Kropmusklerne ikke parallele, alle afbrudte paa Bugsiden:

α. 4 Kropmuskler, hvoraf de tre forreste nærme sig hinanden midt paa Ryggen . . . . . Salpa democratica-mucronata, Forsk., pr. gr.

β. 5 Kropmuskler, der alle tangere hinanden midt paa Ryggen:
Salpa cylindrica, Cuv., pr. gr.

γ) 6 Kropmuskler, ordnede i to Grupper; de fire i den forreste og de to i den bageste Gruppe konvergere henholdsvis med hinanden midt paa Ryggen.

† 4de og 5te Kropmuskel tangere hinanden paa hver Side af Dyret: Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuv., pr. gr.

†† 4de og 5te Kropmuskel ere langt fjærnede fra hinanden paa hver Side af Dyret . . . . . Salpa africana-maxima, Forsk., pr. gr.

2. Enlige Salper:

a. Aabningerne endestillede:

*) Kappen er udstyret med kortere eller længere Vedhæng omkring Kloakaabningen:

α) *Et* langt Vedhæng paa hver Side af Kloakaabningen:

† De to Vedhæng ere trinde og stive, 11 stærkt fremspringende Længdelister strække sig paalangs af Dyret, 11 parallele, særdeles brede Kropmuskler, alle afbrudte paa Bugen: Salpa hexagona, Quoy & Gaim., pr. sol.

†† De to Vedhæng ere hornformige, svagt krummede, i Spidsen fladtrykte. I Reglen 20, i Midtlinien afbrudte Kropmuskler gaa tværs over Ryggen og standse i Høide med Mundvigene: Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim. — Cuv., pr. sol.

β) Flere korte, stumpe, tornformige Vedhæng omkring Kloakaabningen. 9 Kropmuskler gaa tværs over Ryggen og standse i Høide med Mundvigene; de tre forreste tangere hinanden midt paa Ryggen, ligeledes de to bageste; de mellemliggende ere parallele: Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuv., pr. sol.

**) Ingen Vedhæng omkring Kloakaabningen:

α) Kropmusklerne er ikke parallele:

† 4 Kropmuskler, der kun findes udviklede paa Ryggen, konvergere to og to, saaledes at der dannes to skjæve Kors: Salpa scutigera-confoederata, Cuv.-Forsk., pr. sol.

†† 9 Kropmuskler, der alle ere afbrudte paa Bugsiden; de 4 forreste konvergere midt paa Ryggen. Fosterkjeden ligger udstrakt under Bugfuren foran Tarmkanalen: Salpa cylindrica, Cuv., pr. sol.

β) Kropmusklerne ere i Reglen parallele, 9—10 i Tallet; de løbe tværs

over Ryggen og standse i Høide med Mundvigene. Fosterkjeden er krummet og synes[1]) at ville sno sig rundt om Tarmkanalen:

Salpa africana-maxima, Forsk., pr. sol.

b. Kloakaabningen er rygstillet.

*) Et langt, tyndt, pidskeformigt Vedhæng paa hver Side af Kloakaabningen. 6 parallele, smalle Kropmuskler:

Salpa democratica-mucronata, Forsk., var. flagellifera, pr. sol.

**) Flere (7—8) Vedhæng omkring Kloakaabningen, hvoraf et paa hver Side kan naa Kroppens halve Længe, de øvrige ere korte og tornformige. 6 smalle Kropmuskler, som med Undtagelse af den forreste, der er afbrudt i Ryggens Midtlinie, og den bageste, der er afbrudt i Bugens Midtlinie, gaa bælteformigt rundt. 2den, 3die og 4de Kropmuskel konvergere paa Ryggen, ligeledes 5te og 6te. Paa Bugsiden konvergere 4de og 5te Kropmuskel . . . . . Salpa democratica-mucronata, Forsk., pr. sol.

***) Bagkroppen ender i en stor, kegleformig, spids, skraat nedad rettet Forlængelse. 6 særdeles brede, parallele Kropmuskler, der baade ere afbrudte i Ryggens og Bugens Midtlinie:

Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim.-Pall. pr. sol.

Synopsis Salparum.

A. Tractus intestinalis porrectus aut curvaturam hiantem formans, non nucleiformis (Cyclosalpa, Blainv.).

1. Salpæ gregatæ appendice pinniformi ventrali ornatæ:

a. Aperturæ terminales:

*) Unum organum lineiforme, longitudinale superne utrinque. Tractus intestinalis sub endostylum porrectus . . . . . Salpa pinnata, Forsk., pr. gr.

**) Nullum organum lineiforme, longitudinale superne utrinque. Tractus intestinalis curvatus . . . . . Salpa affinis, Cham., pr. gr.

b. Apertura cloacalis in dorso sita. Tractus intestinalis et testis post cavitatem cloacalem in abdomine magno, conico, acuminato siti:

Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt, pr. gr.

[1]) Jeg har kun havt unge Exemplarer til min Disposition.

2. Salpæ solitariæ aperturis terminalibus, tractu intestinali in tubum branchialem porrecto:

a. Organa lineiformia, longitudinalia superne utrinque 5. Musculi corporis 8:

Salpa pinnata, Forsk., pr. sol.

b. Organa lineiformia, longitudinalia superne utrinque nulla:

*) Musculi corporis 8; musculi longitudinales nulli:

Salpa affinis, Cham., pr. sol.

**) Musculi corporis 9; præterea quatuor musculi longitudinales inter musculum transversum secundum et sextum suspensi:

Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt, pr. sol.

B. Tractus intestinalis nucleiformis:

1. Salpæ gregatæ sine appendice pinniformi ventrali:

a. Aperturæ terminales:

*) Musculi corporis 5 in dorso siti; tres antici in medio dorso interrupti et approximati; duo postici paralleli:

Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim.-Cuv., pr. gr.

**) Musculi corporis 7 lati, in medio ventre interrupti, primus et in medio dorso interruptus; musculi quatuor antici in medio dorso approximati:

Salpa hexagona, Quoy & Gaim., pr. gr.

b. Apertura oris terminalis, apertura cloacalis in dorso sita. Musculi corporis 4, in dorso siti, figuras X-formes duas formantes:

Salpa scutigera-confoederata, Cuv.-Forsk., pr. gr.

c. Aperturæ in dorso sitæ:

*) Musculi corporis 6 paralleli, lati; omnes in medio ventre interrupti, primus et in medio dorso interruptus:

Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim.-Pall., pr. gr.

**) Musculi corporis non paralleli, tenues, omnes in medio ventre interrupti:

α) Musculi corporis 5, quorum tres antici æque ac duo postici in medio dorso approximati:

Salpa democratica-mucronata, Forsk., pr. gr.

β) Musculi corporis 5, omnes in medio dorso approximati:

Salpa cylindrica, Cuv., pr. gr.

γ) Musculi corporis 6, quorum quatuor antici æque ac duo postici in medio dorso approximati:

† Rami descendentes quarti et quinti musculi corporis in utroque latere approximati et attingentes, posteaque divergentes:

Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuv., pr. gr.

†† Rami descendentes quarti et quinti musculi corporis in utroque latere non approximati:

Salpa africana-maxima, Forsk., pr. gr.

2. Salpæ solitariæ:

a. Aperturæ terminales:

*) Tunica circum aperturam cloacalem appendicibus brevioribus aut longioribus ornata:

α) Appendix longa, utroque latere aperturæ cloacalis una:

† Appendices duæ, longæ, cylindricæ. Tunica cristis longitudinalibus 11, valde prominentibus ornata. Musculi corporis 11, latissimi, paralleli, omnes in medio ventre interrupti:

Salpa hexagona, Quoy & Gaim., pr. sol.

†† Appendices duæ, longæ, curvæ, extremitate depressæ. Musculi corporis 18—20, in dorso siti, medio dorso interrupti:

Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim.-Cuv., pr. sol.

β) Appendices plures, breves, spiniformes. Musculi corporis 9, in dorso siti; tres antici æque ac duo postici in medio dorso approximati, ceteri paralleli:

Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuv., pr. sol.

**) Appendices circum aperturam cloacalem nullæ:

α) Musculi corporis non paralleli:

† Musculi corporis 4, in dorso siti, figuras X-formes duas formantes:

Salpa scutigera-confoederata, Cuv.-Forsk., pr. sol.

†† Musculi corporis 9, omnes in medio ventre interrupti, 4 antici in medio dorso approximati:

Salpa cylindrica, Cuv., pr. sol.

β) Musculi corporis 9—10, plerumque paralleli, in dorso siti:

Salpa africana-maxima, Forsk., pr. sol.

b. Apertura cloacalis in dorso sita:

*) Appendix longa, tenuissima, flagelliformis, utroque latere aperturæ cloacalis una. Musculi corporis 6 paralleli, tenues:

Salpa democratica-mucronata, Forsk., var. flagellifera, pr. sol.

**) Appendices circum aperturam cloacalem complures (7—8), quarum una utroque latere longitudinis dimidii corporis; ceteræ breves, spiniformes. Musculi corporis 6 — anticus (in medio dorso interruptus) et posticus (in medio ventre interruptus) excepti — corpus cingentes; musculus secundus, tertius,

quartus æque ac quintus et sextus in medio dorso, quartus et quintus in medio ventre approximati:

Salpa democratica-mucronata, Forsk., pr. sol.

***) Extremitas posterior corporis in spinam brevem, conicam, acuminatam desinens. Musculi corporis 6, latissimi, paralleli, et in medio dorso et in medio ventre interrupti:

Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim.-Pall. pr. sol.

Salpa pinnata, Forskåhl.

Tab. I, Fig. 1—5.

Synonymi og Literatur.

Thalia Nr. 1, Nr. 2 og Nr. 3, Browne, p. 384, Tab. 43, fig. 3—4.

Holothuria thalia, L., Nr. 1, p. 657 (opstillet paa Browne's Thalia Nr. 1).

Holothuria caudata, L., Nr. 1, p. 657 (opstillet paa Browne's Thalia Nr. 2).

Holothuria denudata, L., Nr. 1, p. 657 (opstillet paa Browne's Thalia Nr. 3, annuleret hos Gmelin og Lamarck).

Salpa pinnata, Forsk., p. 113, Tab. 35, Fig. B. — Brug., pl. 74, Fig. 7—8. — Bosc, Nr. 1, p. 179. — L., Nr. 3, p. 3129. Nr. 2. — Lam., p. 116. — Cham., p. 8, Fig. 1 A—I. — Blainv., p. 108. — Meyen, p. 406, Tab. 27. — Delle Chiaje, Nr. 2, p. 39, Tav. 77, Fig. 7—8. — Costa, Nr. 1, p. 227, Tav. 3, Fig. I. A, B. — Müller, Nr. 1, p. 57 (etc.). — Vogt, Nr. 1, p. 35 (etc.), Fig. 6—19; Nr. 3, p. 14, Tab. V, Fig. 1—8, 15—17, Tab. VI, VII, VIII og IX, Fig. 1—2. — Leuck., p. 3 (etc.), Tab. 1, Fig. 2, 7 og 13 og Tab. 2, Fig. 2. — Mc. Donald, p. 181. — Costa, Nr. 3, p. 438.

Salpa cristata, Cuvier, Nr. 1, p. 366, Pl. 68, Fig. 1—2. — Lam., p. 118. — Cuvier, Nr. 3, Pl. 123, Fig. 1—1a.

Salpa pelasgica, Bosc, Nr. 1, p. 181, Tab. 20, Fig. 4.

Salpa thalia, L., Lam., p. 119.

Salpa caudata, L., Lam., p. 119.

Salpa proboscidalis, Less., Nr. 1, p. 95, Pl. 33, Fig. 2.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo; dorso depresso; ventre compresso et appendice pinniformi ornato. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 5 — postico excepto,

corpus cingente — in medio ventre interruptis; musculis duobus anticis in medio dorso coalitis; musculis tertio et quarto in medio dorso approximatis; musculis duobus posticis in utroque latere musculo longitudinali conjunctis. Tractu intestinali sub endostylum porrecto; ano paulo post extremitatem anteriorem endostyli ad sinistram partem ejus sito; ventriculo appendice simplice cæca ornato. Linea superne utrinque longitudinali una.

Proles solitaria. Corpore longo, cylindrico, subdepresso, antice ventricoso. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 8 — postico excepto, corpus cingente — et in medio dorso et in medio ventre interruptis; musculis duobus posticis in utroque latere dorsi approximatis. Tractu intestinali in tubum branchialem porrecto; ano paulo post ganglion ad sinistram partem ejus sito; ventriculo appendice duplice cæca ornato. Lineis superne utrinque longitudinalibus 5.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er langstrakt, næsten trekantet i Tværsnit; Ryggen fladtrykt, Bugen skarp med et noget foran Midten siddende, sammentrykt, finneformigt Vedhæng, hvormed Dyret er — eller har været — forbundet med de øvrige Medlemmer af Kjeden. Det største Exemplar var 56^{mm} langt og havde i sig et Foster af 28^{mm}' Længde. I en nyfødt Kjede maalte det største Individ ca. 7^{mm} i Længden.

Kappen er geléagtig og temmelig tyk, især paa Bugsiden.

Aabningerne ere endestillede. Mundaabningen ses som en bred Tværspalte paa Forenden; Underlæben er tykkest og noget mere fremspringende end Overlæben. Kloakaabningen er rund; den sidder paa Spidsen af den tudformige, skraat opadbøiede, med rig Ringmuskulatur udstyrede Bagende.

Kropmusklerne ere 5 i Tallet. Kun den bageste gaar bælteformigt rundt om Dyret; de øvrige ere alle afbrudte midt paa Bugen. 1ste og 2den Kropmuskel ere sammensmeltede midt paa Ryggen; de forene sig atter ved Grunden af det finneformige Vedhæng og sende deres nederste fri Ender ud i samme. Paa hver Side afgiver 1ste Kropmuskel 2 næsten parallele Grene, der løbe fortil og forene sig med Mundaabningens Muskelsystem. 3die og 4de Kropmuskel nærme sig noget til hinanden i Ryggens Midtlinie. Nede paa hver Side deler 4de Kropmuskel sig gaffelformigt; den forreste af disse Grene løber hen foran Svælget; den bageste, som næsten naar sammen med den fra den modsatte Side, løber bagom Mavens blindtarmsagtige Forlængelse. 5te Kropmuskel sender paa hver Side af Kroppen en Gren fremad til 4de Muskel, som modtager den lidt ovenfor Gaffeldelingen.

Mundhulen er cylinderformig, videst fortil, gaar jævnt over i det bagtil stærkt indsnevrede Kloakrum. Det kugleformige Nervecentrum ligger lige foran 1ste Kropmuskel, langt bagenfor Gjællerørets forreste Ende; fra Rygsiden af Nerveknuden rager en lysere

farvet, keglestubformig Udvæxt i Veiret; paa Toppen af denne Udvæxt findes 3 Pigmenthobe; hele dette Apparat tydes som Synsorgan.

Fimreorganet ligger lige foran Gjællerørets forreste Ende og dannes af en flad, rundagtig Fordybning, noget bredere end lang, omgivet af en uregelmæssigt bølgeformig, fremspringende Rand, der fortil næsten fuldstændig udviskes.

Gjællerøret er temmelig svært, den forreste Del stærkt sammentrykt. Forenden af Gjællerøret er fastgjort til Mundhulens Loft og strækker sig fra Fimreorganet til bag om 2den Kropmuskel. Der findes omtrent 124 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren begynder tæt indenfor Mundaabningen, er opadkrummet i sin forreste Ende, iøvrigt temmelig lige; den naar helt hen til Svælget

Tarmkanalen er udstrakt (ikke nucleus-formigt sammenrullet); Svælget er tragtformigt, Spiserøret krummer sig bagtil og nedad og fortsætter sig over i en fremadrettet, langstrakt Mave, der bærer et stort, blindtarmsagtigt, i Spidsen afrundet, opadkrummet Vedhæng, som strækker sig bagtil i Midtlinien af Bugen hen til 4de Kropmuskels bageste Gren. Den lange, rummelige Tarm løber i den store Blodlacune under Bugfuren lige fortil og udmunder med en opadvendende, skraat bagtil afskaaret Anus paa venstre Side af Bugfuren, et Stykke bag dennes Forende.

Testiklen udvikler sig under Bugfuren, mellem denne og Tarmkanalen; den er langstrakt, cylindrisk, noget tilspidset i begge Ender; en Udførselsgang løber fortil og udmunder i Mundhulens Gulv, noget bag ved Anus.

Et langstrakt, lappet, cylindrisk, mod begge Ender tilspidset, i levende Live violet eller hvidligt farvet Kirtelorgan (Nyre?) ligger paa hver Side af Ryggen imellem 2den og 3die Kropmuskel.

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster anlægges; det findes fasthæftet i Kloakrummet paa høire Side mellem 3die og 4de Kropmuskel. Fosterets Mund- og Kloakaabning vende henholdsvis i samme Retning som Kjedesalpens.

Salpekjedens Medlemmer ere stillede i en Kreds med Bugsiden indad og hæftede til hinanden ved det oven nævnte finneformige Vedhæng; de vende alle Mund- og Kloakaabning i samme Retning. I Reglen bestaar Kjeden af 9—12 Medlemmer.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er langstrakt, buget; Forenden bred og svær, Bagenden spids og tudformig. Største Exemplar: 75^{mm} langt og 33^{mm} bredt.

Kappen er tyk og geléagtig.

Aabningerne ere endestillede; Mundaabningen ses som en bred Spalte paa Forenden; Kloakaabningen er rund; den sidder paa Spidsen af den tudformige Bagende.

Kropmusklerne ere 8 i Tallet, alle — med Undtagelse af den bageste, som gaar bælteformigt rundt — afbrudte saavel i Ryggens som i Bugens Midtlinie. 1ste Kropmuskel sender paa hver Side to fortil konvergerede Grene hen til Mundaabningens Muskelsystem. De nedre Ender af samme 1ste Kropmuskel dreie sig langt bagud paa Bugfladen; dette nys nævnte Forhold gjentager sig om end i langt ringere Grad for 2den Kropmuskels Vedkommende. 7de Kropmuskel konvergerer paa hver Side med 8de. Iøvrigt løbe alle de andre Muskler parallelt. De nedre fri Ender af 4de, 5te, 6te og 7de Kropmuskel dreie sig noget fortil paa Bugfladen.

Mundhulen er cylindrisk, videst fortil, gaar jævnt over i Kloakrummet, der er tragtformigt indsnevret bagtil.

Nerveknuden er kugleformig og sidder lige foran 1ste Kropmuskel. Synsorganet er stort, knapformigt, med 3 Pigmenthobe paa Overfladen. Fimreorganet er stort og fladt og ligger lige foran Gjællerørets forreste Ende; dets fremspringende Rand er stærkere bølgeformig end hos Kjedesalpen.

Gjællerøret er langt og smalt; dets Forende er fastgjort til Mundhulens Loft lige fra Fimregruben til bag om 1ste Kropmuskel.

Bugfuren begynder tæt indenfor Mundaabningen og løber hen til Svælget.

Tarmkanalen er udstrakt (ikke nucleus-formigt sammenrullet). Svælget er rummeligt, tragtformigt. Spiserøret krummer sig bagtil og opad ind i Maven, der tillige med Tarmen er bøiet fortil og lagt ind i Gjællerøret. Paa den Del af Maven, som vender bagud, i samme Retning som Kloakaabningen, sidde to ved Siden af hinanden stillede Blindsække. Tarmen, der som alt sagt løber ud gjennem Gjællerøret, bøier sig lidt bagved Nerveknuden tilvenstre og udmunder i en forholdsvis snever, lige afskaaret Anus.

Fem langstrakte cylindriske, i levende Live violet- eller hvidfarvede Kirtelorganer (Nyrer?) ligge i en Række paa hver Side af Ryggen; det forreste mellem 1ste og 2den Kropmuskel, det bageste mellem 5te og 6te Kropmuskel.

Fosterkjeden ligger paa Bugsiden, neden under Bugfuren. Kimrøret begynder omtrent i Høide med 5te Kropmuskel. Kjeden løber skraat nedad fortil. I Modsætning til de øvrige Salpe-Arter, med Undtagelse af *S. affinis* og *S. dolicosoma-virgula*, findes her intet Spring i Udviklingen af Individerne i Fosterkjeden. Kjeden fødes i smaa Partier ad Gangen. Kjedesalperne, som ere stillede i to Rækker med Bugsiden mod hinanden, gruppere sig umiddelbart efter Fødselen mere eller mindre regelmæssig ringformigt.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] 56° 8′ N. Br., 26° 30′ V. L. (Andréa). [2] 52° 47′ N. Br., 13° 10′ V. L. (Branner). [3] 47° N. Br., 27° V. L. (Hygom). [4] 46° N. Br., 10° V. L. (Stübe). [5] 43° 30′ N. Br., 32° 40′ V. L. (Andréa). [6] 43° N. Br., 36° V. L. (Mus. R.). [7] 42° 38′ N. Br., 29°

34′ V. L. (Warming). [8] 42° 20′ N. Br., 15° V. L. (Andréa). [9] 42° N. Br., 44° V. L. [10] 41° N. Br., 30° V. L.; [11] 40° N. Br., 15°—26° V. L.; [12] 39° N. Br., 14° V. L.; [13] 38° N. Br., 23°, [14] 25° og [15] 30° V. L. (Hygom). [16] 37° 40′ N. Br., 51° 20′ V. L.; [17] 36° 40′ N. Br., 23° 16′ V. L.; [18] 36° 30′ N. Br., 28° 13′ V. L.; [19] 36° 10′ N. Br., 26° 32′ V. L.; [20] 36° 6′ N. Br., 26° 14′ V. L.; [21] 36° 1′ N. Br., 27° 10′ V. L. (Andréa). [22] 36° N. Br., 30° 30′ V. L. (Thomsen). [23] 35° N Br., 30° V. L.; [24] 34° N. Br., 30° V. L.; [25] 32° N. Br., 15° V. L.; [26] 31° N. Br., 16° V. L.; [27] 31° N. Br., 36° V. L.; [28] 30° N. Br., 32° V. L. (Hygom). [29] V. for Azorerne (Kjellerup). [30] 28° N. Br., 23° V. L.; [31] 28° N. Br., 35° V. L. (Hygom). [32] 25° 5′ N. Br., 32° V. L. (R. Nielsen). [33] 24° N. Br., 30′ V. L. (Hedemann). [34] 24° N. Br., 39° V. L. (Hygom). [35] 22° 4′ N. Br., 24° 40′ V. L. (Reinhardt). [36] Vestindien (Suenson). [37] Jamaica (ifl. Brown, p. 384). [38] 19° N. Br. 39° V. L. (Hygom). [39] S. f. Rio (Reinhardt).

Middelhavet: «non procul a rupe Belgran juxta insulam Yvicam» (ifl. Forskåhl). Nizza (ifl. Vogt). Neapel.

Det Stille Hav: «Litt. occ. Amer. merid.» (Reinhardt).

Salpa affinis, Chamisso.

Tab. I, Fig. 6—8.

Synonymi og Literatur.

Salpa affinis, Cham., p. 11, Fig. 2 A—F. — Blainv., p. 119. — Meyen, p. 407. — Vogt., Nr. 3, p. 8 (citeret).

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo; dorso depresso; ventre compresso et appendice pinniformi ornato. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 5 — duobus posticis exceptis corpus cingentibus et in utroque latere musculo longitudinali conjunctis — in medio ventre interruptis. Tractu intestinali curvato (non nucleiformi); ano post pharyngem, ad sinistram partem ejus sito; ventriculo appendice cæca non ornato. Linea superne utrinque longitudinali nulla.

Proles solitaria. Corpore longo, cylindrico. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 8 — duobus posticis exceptis corpus cingentibus — in medio ventre interruptis; duobus anticis præterea in medio dorso interruptis. Musculis duobus posticis in utroque latere dorsi approximatis. Tractu intestinali in tubum branchialem porrecto; ano paulo post ganglion ad sinistram partem ejus sito; ventriculo appendice duplice cæca ornato. Lineis superne utrinque longitudinalibus nullis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er langstrakt, fladtrykt; det finneformige Vedhæng paa Bugsiden, hvormed Dyret er — eller har været — forbundet med de øvrige Medlemmer af Kjeden, strækker sig noget længere bagtil end hos *Salpa pinnata*. Det største Exemplar var 36^{mm} langt og havde i sig et Foster af ca. 10^{mm} Længde.

Kappen er meget tyk og geléagtig.

Aabningerne ere endestillede. Mundaabningen ses som en bred Tværspalte paa Forenden. Kloakaabningen er rund; den sidder paa Spidsen af den tudformige, med rig Ringmuskulatur udstyrede Bagende.

Kropmusklerne ere 5 i Tallet. De ere parallele og alle — med Undtagelse af de to bageste, der gaa bælteformigt rundt om Dyret — afbrudte midt paa Bugen. 1ste Kropmuskel, der paa hver Side afgiver to fortil løbende og konvergerende Grene, som forene sig med Mundaabningens Muskelsystem, krummer sig midt paa Ryggen noget bagud. 4de Kropmuskel udsender paa hver Side en Gren, som løber nedad hen foran Tarmkanalen; den samme 4de Kropmuskel staar noget længere nede mod Bugfladen ved en anden Gren i Forbindelse med 5te Kropmuskel.

Mundhulen er cylindrisk, bredest fortil, gaar jævnt over i det bagtil noget indsnevrede Kloakrum.

Nerveknuden er kugleformig og ligger lige foran 1ste Kropmuskel, langt bagenfor Gjællerørets forreste Ende; Synsorganet er cylinderformigt, temmelig høit og smalt.

Fimreorganet ligger tæt foran Gjællerøret; det er fladt med bred, lappet Forrand; bagtil er det spidst; idet hele taget har det Form som en bred, kort Vifte med bagud rettet Haandtag.

Gjællerøret er langt og noget spinklere end hos *Salpa pinnata*, den forreste Ende er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet til lidt bag ved 1ste Kropmuskel.

Bugfuren begynder tæt indenfor Mundaabningen, er svagt opadkrummet i sin forreste Ende og løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen danner her i Modsætning til Forholdet hos *Salpa pinnata* en stor, aaben Løkke, en Slags Tilløb til at antage den fra de fleste Salper kjendte Nucleus-Form. Svælget er rummeligt, tragtformigt; Spiserøret, som er meget snevert og kort, gaar nedad, over i en rummelig Mave, der ikke er udstyret med blindsækagtigt Vedhæng. Maven fortsætter sig i Spiserørets Retning skraat nedad tilhøire og gaar dernæst over i en snever Tarm, som snart danner et Knæ og løber et Stykke fortil, hvorpaa den atter danner et Knæ og stiger skraat opad tilvenstre; endelig dreier Endetarmen, som løber skraat opad, bagtil og udmunder i en snever Anus, et Stykke bagved Svælget, tilvenstre for Midtplanen.

Testiklen ligger i Tarmløkken mellem de to nys omtalte Knæ.

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster findes anlagt i Kloakrummet paa høire Side mellem 3die og 4de Kropmuskel, nærmest ved den første.

Salpekjedens Form synes ikke at afvige fra det for *Salpa pinnata*'s Vedkommende omtalte Forhold.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen ligner i Henseende til Formen ganske *S. pinnata*. Det største Exemplar, jeg havde til Undersøgelse, var 41^{mm} langt og bar endnu Fostermærkerne.

Kappen er tyk og geléagtig.

Aabningernes Form og Stilling er ganske som hos *Salpa pinnata*.

Kropmusklerne ere 8 i Tallet. Med Undtagelse af 7de og 8de Kropmuskel, der gaa bælteformigt rundt om Dyret, naar ingen af de øvrige sammen i Bugens Midtlinie; 1ste og 2den Kropmuskel ere desuden afbrudte midt paa Ryggen. 1ste Kropmuskel sender paa hver Side to tæt ved hinanden løbende Grene hen til Mundaabningens Muskelsystem; paa Bugsiden ere samme 1ste Kropmuskels fri Ender krummede bagud henimod 2den Kropmuskel, dog næppe saa stærkt som hos *Salpa pinnata*. 7de og 8de Kropmuskel tangere hinanden paa hver Side af Ryggen. Iøvrigt løbe Musklerne parallelt med omtrent lige store Mellemrum imellem sig.

Mundhulen er cylindrisk, videst fortil.

Nerveknuden er kugleformig og ligger tæt foran 1ste Kropmuskel.

Fimreorganet har samme Udseende som hos proles gregata.

Gjællerøret er med sin forreste Ende fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet til lidt bagved 1ste Kropmuskel.

Bugfuren afviger i Form og Forløb ikke væsentlig fra Forholdet hos Kjedesalpen.

Tarmkanalen er ganske som hos *Salpa pinnata* udstrakt og lagt ud i Gjællerøret; Maven har ligesom hos denne en dobbelt Blindsæk.

Fosterkjedens Stilling og Udseende er som hos *Salpa pinnata*. Jeg har kun set en enkelt hel Kjede, som bestod af 9 Medlemmer.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] Kanariske Øer (ifl. Meyen). [2] Guinea (Dr. Thams). [3] 3° 30′ N. Br., 20° V. L. (Andréa). [4] 2° N. Br., 21° og 25° V. L. (Hygom).

Middelhavet (ifl. Vogts Liste, Nr. 3, p. 8).

Det Stille Hav: Omkring Sandwichøerne (ifl. Chamisso).

Salpa dolicosoma-virgula, Todaro-Vogt.

Tab. I, Fig. 9.

Synonymi og Literatur.

Salpa virgula, Vogt, Nr. 3, p. 11—12, Tab. 5, Fig. 12—13.

Salpa dolicosoma, Todaro, Nr. 2, p. 41—43. (Her paavises Forholdet til Salpa virgula, og den sammensatte Betegnelse: Salpa dolicosoma-virgula anvendes.)

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo, abdomine magno, conico acuminatoque; extremitate anteriori subtruncata; ventre appendice pinniformi ornato. Apertura oris terminali; apertura cloacali in dorso sita. Musculis corporis 4. Tractu intestinali curvato (non nucleiformi), in abdomine conico sito; ventriculo appendice cæca simplice ornato; ano prope aperturam cloacalem sito.

Proles solitaria. Corpore longissimo, cylindrico. Aperturis terminalibus. Musculis corporis transversalibus 9, præterea quatuor musculi longitudinales inter musculum transversalem secundum et sextum suspensi. Tractu intestinali in tubum branchialem porrecto; ventriculo appendice cæca bifurcata ornato.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen har en særdeles karakteristisk Form. Den bestaar af to i høj Grad ulige Halvdele, hvoraf den forreste er cylindrisk og er optagen af Gjælle- og Kloakrum med Tilbehør, medens den bageste, kegleformige Halvdel, der med sin Basis er sammensmeltet med Forparten af Kroppen og bagtil løber ud i en Spids, omslutter den øvrige Indvoldsmasse. Fortil paa Bugsiden findes et stort, fra Siden set firkantet, finneformigt Vedhæng til Forbindelse med de øvrige Medlemmer af Kjeden. Totallængden udgjør omtrent 30^{mm}.

Kappen er ikke særligt beskrevet.

Mundaabningen sidder paa den jævnt afrundede Forende saa høit oppe, at den kan siges at være ifærd med at vandre om paa Ryggen; den er betydelig bredere end den som en kort Tud udseende Kloakaabning, der sidder langt fremme paa Ryggen.

Kropmusklerne ere 4 i Tallet; de ere svage og synes at løbe parallelt tværs over Ryggen; efter Tegningen hos Vogt at dømme ere de alle afbrudte paa Bugsiden.

Mund- og Kloakrummet danner en aflang, cylindrisk Hule.

Nerveknuden ligger tæt bagved Mundaabningen.

Fimreorganet omtales ikke.

Gjællerøret er temmelig kort og svagt S-formigt krummet.

Bugfuren strækker sig helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er ikke nucleusformigt sammenrullet; den danner en stor, vid Krumning i Kroppens bageste Del; Maven er udstyret med en Blindsæk; Anus udmunder høit oppe i Kloakrummet, ikke langt fra selve Kloakaabningen.

Testiklen er langstrakt, tendannet og ligger langt tilbage, ude i Bagkroppens kegleformige Vedhæng; dens Udførselskanal udmunder fortil, ikke langt fra Anus.

Saadanne Kirtelorganer som de, der findes hos *Salpa pinnata* foroven paa hver Side af Ryggen, omtales ikke for den nærværende Arts Vedkommende, hverken hos Kjedesalpen eller den enlige Salpe.

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster findes anlagt indvendig paa Kloakrummets høire Side, omtrent lodret under Kloakaabningen.

Salpekjedens Medlemmer ere grupperede ganske paa samme Maade som hos *Salpa pinnata* og *affinis*.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er særdeles langstrakt, glasklar og blød; der findes to røde Pletter i Mundvigene. Ca. 150^{mm} lang og 50^{mm} bred.

Kappen omtales ikke særligt.

Aabningerne ere endestillede; Mundaabningen er stor og bred, Kloakaabningen forholdsvis lille og rund.

Kropmusklerne ere 9 i Tallet, som løbe paatværs, men desforuden findes 4 Længdemuskler, to paa Ryggen og to paa Bugen, som strække sig fra den 2den til den 6te Tværmuskel.

Mundhulen og Kloakrummet,

Nerveknuden,

Fimreorganet,

Gjællerøret og

Bugfuren finder jeg ikke omtalte af Todaro.

Tarmkanalens Stilling er ganske som hos de enlige Former af *Salpa pinnata* og *affinis*. Maven er forsynet med en dobbelt Blindsæk.

Fosterkjeden ligger paa Bugsiden; den begynder i Høide med den 6te Kropmuskel og løber fortil mellem de to Længdemuskler, parallelt med disse, indtil Mellemrummet mellem 1ste og 2den Kropmuskel, hvor den bøier sig tilhøire og udmunder paa Siden.

Findesteder.

Middelhavet: Villafranca Bugten (ifl. C. Vogt). — Neapels Golf (ifl. Todaro).

Anm. Ovenstaaende Beskrivelser ere for Kjedesalpens Vedkommende en Gjengivelse af *C. Vogts*, for den enlige Salpes Vedkommende af *Todaro's* Beskrivelser.

Salpa scutigera-confoederata, Cuvier-Forsk.

Tab. II, Fig. 23, 24 og 46.

Synonymi og Literatur.

Salpa confoederata, Forsk., p. 115, Tab. 36, Fig. A. — Brug., Pl. 75, Fig. 2—4. — Bosc, Nr. 1, p. 179. — L., Nr. 3, p. 3130, Nr. 6. — Lam., p. 117. — Risso, p. 284. — Blainv., p. 111. — Meyen, p. 410 (mindre rigtigt sammendrages denne Form med S. fasciata, Forsk. og S. africana, Forsk.; ligeledes mener han, at S. runcinata, Cham., og «sandsynligvis» S. vaginata, Cham., høre herhen).

Salpa scutigera[1]), Cuvier, Nr. 1, p. 377, Pl. 68, Fig. 4—5. (Ligel. Mém. Moll., p. 20 Fig. 7). — Lam., p. 118. — Blainv., p. 110. — Non Delle Chiaje, Nr. 2, p. 39, Tav. 66, Fig. 21 og Tav. 78, Fig. 13 (begge Figurer minde om S. africana-maxima).

Salpa octophora[1]), Cuvier, Nr. 1, p. 379, Pl. 68, Fig. 7 (Mém. Moll., p. 20, Fig. 7). — Lam., p. 118. — Blainv., p. 110. — Meyen, p. 416.

Salpa vivipara, Péron & Les., Pl. 30, Fig. 3.

Pegea octophora, Sav., p. 124, Pl. 24, Fig. 1.

Salpa ferruginea, Cham., p. 23, Fig. 10 A—D. — Blainv., p. 110. — Meyen, p. 417.

Salpa gibba, Bosc, Nr. 1, p. 178, Pl. 20, Fig. 5.

Salpa socia, Bosc, Nr. 1, p. 180, Pl. 20, Fig. 1—3. — Meyen, p. 409.

Salpa bicaudata, Quoy & Gaim., Nr. 3, Fig. A, 1—3. — Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 225, Pl. 8 A, Fig. 1—2. — Blainv., p. 123.

? Salpa dolium, Quoy & Gaim., Nr. 5, p. 575, Pl. 90, Fig. 1—8 (cit. efter Krohn).

Salpa nephodea, Less., Nr. 2, p. 272.

Salpa scutigera-confoederata, Vogt, Nr. 3, p. 6.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo, cylindrico, subdepresso; extremitate anteriori truncata, extremitate posteriori rotundata. Apertura oris terminali; apertura cloacali in dorso sita. Musculis corporis 4, in dorso sitis, figuras X-formes duas formantibus.

Proles solitaria. Corpore brevi, lato; extremitate anteriori subrotundata; extremitate posteriori acuta; dorso depresso; ventre medio depresso. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 4, in dorso sitis, figuras X-formes duas formantibus.

---

[1]) Cuviers Exemplarer skrive sig ifl. Lamarck og Blainville fra Pérons og Lesueurs Reise. — Home afbilder Tab. 73, Fig. 1 et Stykke Kjede af denne Art.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er langstrakt, cylindrisk, noget fladtrykt; fortil lige afskaaret, bagtil afrundet. Det største Exemplar var 115^{mm} langt og bar et 43^{mm} langt Foster i sig.

Kappen er med Undtagelse af det bageste tykke og bruskagtige Parti, som omgiver Indvoldsmassen, temmelig tynd og blød. Undertiden ere Individerne i enkelte Kjeder forsynede med et langt, tyndt Vedhæng paa hver Side af Kloakaabningen (*Salpa bicaudata*, Quoy & Gaim.).

Mundaabningen er endestillet og bred, Kloakaabningen rygstillet.

Kropmusklerne ere 4 i Tallet, spinkle og kun udviklede paa Rygsiden; de nærme sig to og to tæt til hinanden midt paa Ryggen og danne to skjæve Kors, det ene bagved det andet. Denne Muskelkonstellation gjentager sig hos den enlige Salpe, og bliver saaledes et for Arten karakteristisk Kjendetegn.

Mundhulen er rummelig, cylindrisk, omtrent ens vid overalt.

Nerveknuden er lille, kugleformig; den ligger langt foran 1ste Kropmuskel, lige bagved Fimreorganets øverste, bageste Hjørne. Paa den forreste, øverste Del af Nerveknuden sidder et temmelig stort, knapformigt Synsapparat.

Fimreorganet er indsænket i den Del af Mundhulens Loft, som ligger lige foran Gjællerøret, og i den forreste Ende af dette. Det dannes af en næsten lige saa lang som høi, ganske smal Hulhed, hvis faste Bund begynder fortil med en nedbøiet Spids og dernæst løber parallel med Dyrets Længdeaxe til hen tæt foran Nerveknuden; her bøier den knæformigt af og stiger lodret ned paa Gjællerørets Forflade, dreier nok engang og løber fortil; tilsidst ender den med en opadbøiet Spids noget bag ved og lavere end Begyndelsen; imellem disse to krummede Spidser ligger en spalteformig Aabning, hvormed Fimreorganets Hulhed udmunder i Mundhulen.

Gjællerøret er langt, stærkt bygget, fastgjort foroven til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet til i Høide med Randen af 1ste Kropmuskel. Der findes ca. 83 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren begynder med en svag Krumning fortil tæt indenfor Underlæbens Rand, har iøvrigt et lige Forløb og naar helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen ligger lavt nede bag Kloakrummet; den er kugleformig, svagt sammentrykt. Tarmrøret er videst lidt foran Midten. Svælg og Anus vende fremad.

Testiklen ligger i Tarmløkken.

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster findes anlagt indvendig paa høire Side i Kloakrummet, omtrent midt imellem 3die og 4de Kropmuskel.

Salpekjedens Medlemmer, hvis Længdeaxer staa lodret paa Kjedens Længdeaxe, ere som sædvanlig stillede i to Rækker, der vende Bugfladerne mod hinanden; det enkelte Individ i den ene Række passer ind mellem to Individer i den modstaaende Række o. s. v.

Den ènlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er kort og bred, noget afrundet fortil, spids bagtil; Ryggen er fladtrykt. Det største Exemplar var ca. 120^{mm} langt.

Kappen er temmelig tyk og bruskagtig.

Aabningerne ere endestillede. Mundaabningen er særdeles bred. Den lille, ovale Kloakaabning sidder paa Spidsen af den med svag Ringmuskulatur udstyrede, tudformige Bagende.

Kropmusklerne ere 4 i Tallet; i Henseende til Stilling og øvrige Forhold ligne de ganske Kjedesalpens.

Mundhulen er næsten firkantet i Tværsnit, rummelig; bagtil gaar den over i det henimod Kloakaabningen tragtformigt indsnevrede Kloakrum.

Nerveknuden er i Udseende og Leiringsforhold lig Kjedesalpens; det samme gjælder Synsapparatet.

Fimreorganet afviger ikke synderlig fra Kjedesalpens.

Gjællerøret er meget kort, stærkt bygget, noget sammentrykt især fortil; det er foroven fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet til midtveis mellem Nerveknuden og 1ste Kropmuskel.

Bugfuren begynder tæt indenfor Randen af Underlæben, er noget nedadkrummet paa Midten og løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Den kugleformige Indvoldsmasse ligger under det forreste Parti af Kloakrummet, lidt bag Midten af Bugen. Tarmrøret begynder med et tykrandet, opadvendende Svælg; Anus ligger som sædvanlig tilvenstre for Midtplanen.

Fosterkjeden ligger spiralformigt uden om Indvoldsmassen og kan være snoet to Gange rundt om denne.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] 48° N. Br., 15° og [2] 38° V. L.; [3] 47° N. Br., 8° og [4] 27° V. L. (Hygom). [5] 44° 35′ N. Br., 25° 5′ V. L. (Warming). [6] 44° N. Br., 15° V. L.; [7] 43° N. Br., 16° V. L. (Hygom). [8] 42° 38′ N. Br., 29° 34′ V. L. (Warming). [9] 41° 10′ N. Br., 17° 55′ V. L. (Normann). [10] 41° N. Br., 29° 30′ V. L. (Hygom). [11] 40°—38° N. Br., 26°—30° V. L. (Hygom). [12] 39° 40′ N. Br., 34° 30′ V. L. (Andréa). [13] 39° N. Br.,

10° og [14] 13° V. L.; [15] 37° N. Br., 16° og [16] 27° V. L.; [17] 36° N. Br., 6° og 28° V. L. (Hygom). [18] 34° 4′ N. Br., 17° 50′ V. L. (Normann). [19] 34° N. Br., 30° V. L.; [20] 30° N. Br., 17° V. L.; [21] 29° 20′ N. Br., 23° 6′ V. L. (Hartmann). [22] 28° N. Br., 35° V. L.; [23] 26° N. Br., 22° V. L.; [24] 22° N. Br., 22° V. L.; [25] 20° N. Br., 22° V. L. (Hygom). [26] 15° 19′ N. Br., 24° 54′ V. L. (Reinhardt). [27] 11° N. Br., 29° 30′ V. L. (Hygom). [28] Guinea (Dr. Thams, Mus. physiol.). [29] 29° 0′ S. Br., 11° 30′ Ø. L. (Andréa).

Middelhavet: [30] Neapel (P. E. Müller).

Det Indiske Hav: [1] 39° 56′ S. Br., 40° 26′ Ø. L.; [2] 32° 0′ S. Br., 44° 10′ Ø. L. (Andréa). [3] 1° 44′ S. Br., 81° 8′ Ø. L. (Mathiesen).

Det Stille Hav: [1] China Søen (Galath. Exp.). [2] Valparaiso (H. Krøyer). 6° N. Br., 105° Ø. L. (Gerstenberg).

Salpa democratica-mucronata, Forsk.

Tab. II, Fig. 25—28.

Synonymi og Literatur.

Salpa democratica, Forsk., p. 113, Nr. 32, Tab. 36, Fig. G (= proles solitaria). — Brug., Pl. 74, Fig. 9. — Bosc, Nr. 1, p. 179. — L., Nr. 3, p. 3129, Nr. 3. — Lam., p. 116. — Blainv., p. 121. — Cuvier, Nr. 3, Pl. 123, Fig. 3. — Delle Chiaje, Nr. 1, p. 61 og 63. — Meyen, p. 408, Tab. 29, Fig. 7—8. — Delle Chiaje, Nr. 2, p. 39, Tav. 79, Fig. 14, 15 og 17.

Salpa mucronata, Forsk., p. 114, Nr. 33, Tab. 36, Fig. D. — Brug., Pl. 74, Fig. 10. — Bosc, Nr. 1, p. 179. — Lam., p. 116. — Cuvier, Nr. 3, Pl. 123, Fig. 2. — Meyen, p. 409, Tab. 28. — Sars, Nr. 2, p. 82, Tab. 10, Fig. 6—11.

? Salpa cyanogaster, Péron, Tab. 30, Fig. 3.

Thalia lingulata, Blumenb., Nr. 30.

Salpa longicauda, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 507, Pl. 73, Fig. 8. — Blainv., p. 123. — Meyen, p. 420.

Salpa spinosa, Otto, p. 303—305, Tab. 42, Fig. 1 a—d. — Risso, p. 285. — Sars, Nr. 2, p. 79—82, Tab. 10, Fig. 1—5.

Biphora mucronata, Costa, Nr. 2, p. 3, Tav. 1, Fig. 1—3.

Biphora democratica, Costa, Nr. 2, p. 7, Tav. 2.

Dubreuillia cirrhosa, Less., Nr. 2, p. 278, Pl. 6, Fig. 7.

Salpa Cabotti, Desor, p. 75. — Agass., Nr. 1, p. 17—23 med 2 Tab. — Brooks, Nr. 1—4.

Salpa democratica-mucronata, Krohn, p. 112—113. — Leuck., p. 3, p. 17 (etc.), Tab. 1, Fig. 1, 3, 9—10, 12, 14 og Tab. 2, Fig. 6—10, 16—17. — Vogt, Nr. 3, p. 5, Tab. 5, Fig. 22—23.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore ovato; extremitate anteriori rotundata, extremitate posteriori in spinam brevem pyramidalem desinente. Aperturis in dorso sitis. Musculis corporis 5 in dorso sitis; tribus anticis æque ac duobus posticis in medio dorso approximatis.

Proles solitaria. Corpore orciformi; extremitatibus truncatis. Circum aperturam cloacalem 7—8 spinis, duabus lateralibus longitudinis dimidii corporis. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 6 — antico (in medio dorso interrupto) et postico (in medio ventre interrupto) exceptis — corpus cingentibus; musculo secundo, tertio, quarto, æque ac quinto et sexto in medio dorso, quarto et quinto in medio ventre approximatis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er ægformig, noget fladtrykt paa Rygsiden, jævnt afrundet fortil; Bagenden løber ud i en spids, skraat nedadrettet, i Reglen firsidet Pyramide, der omslutter Indvoldsmassen. Farven er ifl. Sars vandklar med himmelblaat Gjællerør og Bugfure; Kjærnen er indigoblaa. Det største Exemplar maalte ca. 15^{mm} i Længden.

Kappen er temmelig fast, næsten bruskagtig og særdeles tyk, især paa Bugsiden.

Aabningerne ere rygstillede; Mundaabningen er bredere end Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 4 i Tallet. De tre forreste ere sammensmeltede midt paa Ryggen; 4de Kropmuskel ligger langt tilbage. De ere alle afbrudte i Bugens Midtlinie.

Mundhulen er forholdsvis kortere og bredere end hos den enlige Salpe.

Nerveknuden er lille, kugleformig og ligger længere foran Gjællerørets Udspring end hos den enlige Salpe.

Fimreorganet er lille og næsten rundt; det ligger foran Nerveknuden; en eiendommelig, temmelig lang, traadformig, tentakelagtig, fremadrettet, i Spidsen tilbagebøiet Proces, som rager frit frem i Gjællehulen, findes tæt foran Fimreorganet.

Gjællerøret er spinkelt og forholdsvis kort; den forreste Ende er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra 1ste Kropmuskel til lidt bagved 3die. Der findes ca. 60 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren er meget kort; den begynder langt nedenfor og noget foran den rygstillede Mundaabning paa den nederste Del af Mundhulens Forvæg, er kun svagt krummet og naar næppe hen i Høide med 2den Kropmuskel.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen er langagtig, spindelformig og indtager den bageste Del af Kroppen. Tarmrøret, der er videst paa Midten,

men uden tydelig Adskillelse i Spiserør, Mave og Tarm, danner en snever Løkke. Endetarmen dreier sig forover og udmunder paa venstre Side af Svælget, omtrent i Høide med samme.

Testiklen dannes af lange, tilspidsede, bagtil rettede, mer eller mindre vifteformigt sammenstillede Lapper, der ligge paa hver Side af Tarmkanalen og kunne hos ældre Individer rage ud over denne (cfr. Leuck., p. 50).

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster anlægges paa høire Side bag 4de Kropmuskel. Fosterets Længdeaxe er parallel med, og Mund- og Kloakaabning vende samme Vei som Kjedesalpens.

Salpekjedens Medlemmer ligge i en lang Dobbeltrække. Individernes Længdeaxer danne mer eller mindre spidse Vinkler med Kjedens Længdeaxe. Den enkelte Kjedesalpe ligger med Bugen vendt mod Bugfladerne af to Individer i den modstaaende Række og vender høire Side mod venstre Side af sin Nabo i samme Række, o. s. v. — Hver Kjedesalpe har til Forbindelse med Naboer og Gjenboer i Kjeden 8 Heftetraade, stillede i 4 Længderækker, 2 paa Bugfladen og 1 paa hver Side.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er tøndeformig, noget afstumpet i begge Ender, lidt bredere end høi, saaledes at et Snit lagt paatværs gjennem Dyret frembyder en oval Flade. En Fure løber langs Ryggens og Bugens Midtlinie og langs Midten af hver Side. Farven er vandklar med blaaligt Skjær og brunrød Kjærne (cfr. Sars, Nr. 2, p. 79). Store Exemplarer maalte ca. 25^{mm} i Længden.

Kappen er tyk og temmelig fast, næsten bruskagtig; omkring Kloakaabningen løber den ud i 7—8 kortere eller længere, ubevægelige Torne, hvoraf den yderste paa hver Side ofte er af Kroppens halve Længde.

Mundaabningen er endestillet og er meget bredere end den halvmaaneformige, rygstillede Kloakaabning.

Kropmusklerne ere 6 i Tallet. De 4 midterste gaa bælteformigt rundt om Dyret; 1ste Kropmuskel er afbrudt midt paa Ryggen og 6te midt paa Bugen. 2den, 3die og 4de Kropmuskel nærme sig stærkt til hinanden paa Ryggen; 1ste Kropmuskel bøier sine fri Ender bagtil henimod dette Komplex; længere bagtil paa Ryggen konvergere 5te og 6te Kropmuskel, medens 4de og 5te konvergere paa Bugsiden.

Mund- og Kloakrum danne en cylindrisk, i begge Ender afrundet Hule.

Nerveknuden er kugleformig og ligger noget foran Gjællerørets Udspring.

Fimreorganet ligner fuldstændigt Kjedesalpens; det er maaske lidt mere langstrakt; og den tentakelagtige Proces er noget længere og tyndere.

Gjællerøret er spinkelt og sammentrykt; den til Mundhulens Loft fastgjorte Ende naar omtrent fra Nerveknuden til et Stykke bag 4de Kropmuskel. Der findes omtrent 100 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren er smal, svagt og jævnt krummet gjennem hele sin Længde; den begynder tæt indenfor Underlæbens Rand og taber sig i Høide med 5te Kropmuskel.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen er langagtig rund, linseformigt sammentrykt, uden tydelig Sondring i Spiserør, Mave og Tarm. Fra Svælget gaar Tarmrøret skraat nedad bagtil, bøier derpaa knæformigt om og stiger skraat opad fortil nedenunder den bagtil løbende Del; først i Svælgets umiddelbare Nærhed, dreier Tarmrøret ud fra Midtlinien, idet det krummer sig tilvenstre og udmunder i en rummelig Anus i Høide med og lidt bagved Svælget.

Fosterkjeden ligger i en Spiral omkring Indvoldsmassen; den begynder paa Bugsiden foran Svælget og vender sig strax tilhøire, hvorpaa Kjeden ruller sig spiralformigt $1^1/_4$—$1^1/_2$ Gang rundt om Tarmkanalen. Fostrene ligge i to Rækker med Bagenderne vendende udad med Periferien.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] Norges Kyst, Florø og Bremanger, 61° 50′ N. Br. (Sars). [2] Shetlands-Øerne (ifl. Gwyn Jeffreys). [3] 59° 52′ N. Br., 6° 31′ V. L. (Assist. Steenstrup). [4] 57° 23′ N. Br., 18° 36′ V. L. (Olrik). [5] 48° 47′ N. Br., 21° V. L. (Hygom). [6] 48° 30′ N. Br., 5° 30′ V. L. (Hedemann) [7] 48° N. Br., 38° V. L. (Hygom). [8] 47° N. Br., 11° V. L. (Koch). [9] 46° 23′ N. Br., 11° 15′ V. L. (Reinhardt). [10] 45° 43′ N. Br., 34° 30′ V. L. (Andréa). [11] 45° 30′ N. Br., 11° 30′ V. L. (Normann). [12] 45° 30′ N. Br., 36° 50′ V. L. (Andréa). [13] 43° N. Br., 32° V. L. (Grønsund). [14] Ca. 43° N. Br., 70° V. L. Vineyard Sound, Mass. (Smithson. Institut). [15] 42° N. Br., 46° V. L. (Andréa). [16] 40° N. Br., 15° V. L.; [17] 40° N. Br., 26° V. L. (Hygom). [18] 38° 40′ N. Br., 15° V. L. (Normann). [19] 38° N. Br., 23° V. L. (Hygom). [20] 37° N. Br., 27° V. L. (Hygom). [21] 36° 40′ N. Br., 17° 25′ V. L. (Normann). [22] 30° N. Br., 18°—19° V. L. (Hygom). [23] 23° 47′ N. Br., 24° 31′ V. L. (Reinhardt). [24] 22° N. Br., 20°—22° V. L. (Hygom). [25] 15° 19′ N. Br., 24° 54′ V. L. (Reinhardt). [26] 14° N. Br., 25° V. L. (Hygom). [27] 14°—7° N. Br., 16°—19° V. L. (Prosch). [28] 13° N. Br., 22° V. L.; [29] 11° N. Br., 25° V. L.; [30] 5° N. Br., 21° V. L.; [31] 4° N. Br., 24° V. L. (Hygom). [32] 18° S. Br., 2° V. L. (Andréa). [33] 19° 8′ S. Br., 36° 19′ V. L. (Warming). [34] 35° 31′ S. Br., 0° 51′ V. L. (Andréa).

Middelhavet: [35] «Ad Majorcam» og «in vicinia Yvicæ» (ifl. Forskåhl). [36] 38° 58′ N. Br., 10° 32′ Ø. L. (Branner). [37] Neapel (Panceri. — Stazione zoologica).

Det Indiske Hav: [1] 42° S. Br., 31° Ø. L. (Strandgaard). [2] 39° 54′ S. Br., 41° 30′ Ø. L. (Andréa). [3] 39° 49′ S. Br., 25° 12′ Ø. L. (Thomsen). [4] 31° 23′ S. Br., 73° 53′ Ø. L. (Mathiesen). [5] 29° 54′ S. Br., 76° 42′ Ø. L. (uden Navn).

Det Stille Hav: [1] China Søen, Tonghai, 31° 40′ N. Br., 125° 50′ Ø. L. (Andréa). [2] Port Jackson (ifl. Quoy & Gaimard, S. longicauda). [3] Tasmanien (Corneliussen). [4] Ny Zeelandshavet, 40° 50′ S. Br., 161° 0′ Ø. L. (Hartmann).

Salpa democratica-mucronata, Forsk., Var. **flagellifera,** mihi.

Tab. I, Fig. 12—13.

Beskrivelse.

Proles gregata. Si ex foetibus proli solitariæ exsectis æstimare licet, nihil a prole gregata typica Salpæ democraticæ-mucronatæ differre videtur.

Proles solitaria. Corpore longo, cylindrico, subdepresso; extremitatibus rotundatis; utroque latere aperturæ cloacalis appendice longa, tenuissima, flagelliformi una ornato. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 6 gracilibus, parallelis; primo in medio dorso reflexo et interrupto; sexto in medio ventre interrupto; ceteris corpus cingentibus.

Kjedesalpen (proles gregata)

synes efter de af den enlige Salpe udskaarne Fostre at dømme ikke at afvige fra Kjedesalpen af den typiske *Salpa democratica-mucronata.*

Den enlige Salpe (proles solitaria)

afviger fra den typiske Form ved:

1) at der paa hver Side af Kloakaabningen kun findes en lang, tynd, pidskeformig Forlængelse af Kappen, og ved

2) at de 6 Kropmuskler ere indbyrdes parallele. De synes stundom alle at være afbrudte midt paa Ryggen (smlgn. Fig. 12), hvilket Forhold ikke er mig bekjendt for selve *Salpa democratica-mucronata*'s Vedkommende.

Findesteder.

Atlanterhavet: 18° S. Br., 2° V. L. (Andréa).

Det Indiske Hav: 38° 20′ S. Br., 42° 10′ Ø. L. (Andréa).

Salpa runcinata-fusiformis, Cham.-Cuvier.

Tab. II, Fig. 29—31 og 42.

Synonymi og Literatur.

? Salpa fasciata, Forsk., p. 115, Tab. 36, Fig. B. — Brug., Pl. 75, Fig. 6. — Lam., p. 117. — Blainv., p. 113.

Salpa maxima, varietas, Forsk., p. 113, Tab. 35, Fig. A a 1.

Salpa fusiformis, Cuv.[1]), p. 382, Pl. 68, Fig. 5. — Brug., Pl. 74, Fig. 3—5. — Lam., p. 119. — Blainv., p. 117. — Meyen, p. 413 (henfører den til Salpa maxima).

Salpa runcinata, Cham., p. 16, Fig. 5 A—I. — Blainv., p. 119. — Meyen, p. 411 (henfører den til Salpa confoederata). — Sars, Nr. 2, p. 63, Tab. 8, Fig. 44—45 og Tab. 9, Fig. 1—24. — Krohn, p. 113. — Forb. & Hanl., p. 53, Pl. E, Fig. 5—6. — Jeffr., Nr. 1, p. 439 og Nr. 2, p. 303.

Salpa moniliformis, Mc Culloch, p. 187 (cit. hos Forb. & Hanl.).

Salpa clostra, Milne Edwards i Cuvier, Nr. 3, Pl. 121, Fig. 2.

Biphora depressa, Sars, Nr. 1, p. 51, Tab. 6, Fig. 1—4.

Biphora tricuspidata, Sars, Nr. 1, p. 56, Tab. 6, Fig. 5—16.

Salpa runcinata-fusiformis, Krohn, p. 112—113. — Leuck, p. 3, etc., Tab. 1, Fig. 4, 6, 8, 11, 16—18, Tab. 2, Fig. 1, 3—5, 11, 13—15, 18. — Vogt, Nr. 3, p. 6.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore ovato; extremitatibus in appendicem longam, conicam, acuminatam desinentibus (corpore ipso partem tertiam longitudinis totius occupante). Aperturis in dorso sitis. Musculis corporis 6 in medio ventre interruptis; quatuor anticis æque ac duobus posticis in medio dorso valde approximatis; ramis descendentibus quarti et quinti musculi corporis in utroque latere approximatis et attingentibus, posteaque divergentibus.

Proles solitaria. Corpore longo, cylindrico; dorso depresso; extremitate anteriori rotundata, extremitate posteriori truncata, 7—8 spinis brevibus circum aperturam cloacalem. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 9 in dorso sitis; tribus anticis æque ac duobus posticis in medio dorso approximatis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er tøndeformig; hver Ende er udstyret med et langt, snart tilhøire, snart tilvenstre bøiet, kegleformigt, spidst tilløbende Vedhæng, som er en Forlængelse af Kappen.

[1]) Ifl. Lamarck skrive Cuviers Exemplarer sig fra Pérons og Lesueurs Reise.

Selve den egentlige Krop udgjør omtrent den midterste Trediedel af hele Dyrets Totallængde. Det største Exemplar var ca. 65^{mm} langt.

Kappen er temmelig tyk og fast, særligt paa Bugsiden.

Aabningerne ere rygstillede; Mundaabningen er næsten dobbelt saa bred som Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 6 i Tallet; de strække sig — især de fire forreste — langt ned paa Bugfladen, men alle ere de afbrudte i dennes Midtlinie. Kropmusklerne ere paa Ryggen sammensmeltede med hinanden to og to; de to forreste Grupper tangere hinanden i Midtlinien, hvorimod den bageste Gruppe er langt fjærnet fra de øvrige. Noget nede paa hver Side af Kroppen tangere 4de og 5te Kropmuskel hinanden, hvorefter de atter divergere; denne Tilnærmelse mellem 4de og 5te Muskel finder ikke Sted hos Kjedesalpen af *Salpa africana-maxima*, der i Henseende til Antal og Lejringsforhold af Kropmusklerne ganske ligner nærværende Form.

Mund- og Kloakhule danne tilsammen et aflangt Rum, noget bredere end høit, videst paa Midten.

Nerveknuden er lille, rund, noget fladtrykt, med et lille, keglestubformigt Synsapparat.

Fimreorganet er langstrakt, med seglformigt krummet i Mundhulens Loft indsænket Bund; det ligger omtrent midt imellem Overlæbens Rand og 1ste Kropmuskel, lige foran Gjællerørets Forende.

Gjællerøret er ret kraftigt bygget, fastvoxet til Mundhulens Loft til omtrent i Høide med 1ste Kropmuskel. Der findes ca. 150 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren begynder dybt nede paa Mundhulens Gulv med opadbøiet Forende, er jævnt krummet gjennem hele sin Længde og standser foran Svælget i Høide med 5te Kropmuskel.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen er pæreformig, noget sammentrykt, med lodret opad vendende Spids; den ligger nedenunder Kloakrummets bageste Del med sin største Runding nedad, noget tilhøjre. Tarmrøret er videst midtpaa. Endetarmen stiger op paa venstre Side af Svælget og udmunder i en tragtformig, noget sammentrykt Anus. I levende Live er Tarmkanalen ifl. Sars af rødgul Farve.

Testiklens Blindsække ere forenede under Tarmkanalen til en saddelformig Masse; de ere stillede næsten radiært i de to Sidelapper. Tarmkanalens Rygside forbliver ubedækket af dem (cfr. Leuck., p. 50).

Fosterets Stilling. Der findes kun anlagt et enkelt Foster indvendig paa høire Side af Kloakrummet, mellem 5te og 6te Kropmuskel, nærmest den første af disse. Sars fortæller (Nr. 2, p. 74), at han har set Fosteret bevæge sig meget ljvligt inde i Kjedesalpen.

Salpekjedens Medlemmer ordne sig efter Fødselen saaledes, at deres Længdeaxer komme til at ligge parallelt med Kjedens Længdeaxe. Hvert Individ staar i Forbindelse med 4 andre Individer af Kjeden; med sin Bugflade er den knyttet til henholdsvis bageste og forreste Halvdel af Bugfladerne af to Individer i den modstaaende Række, medens det fortil er forbundet med Bagenden af det foranliggende Individ og bagtil med Forenden af det bagved liggende Individ i samme Række (smlgn. Kjeden hos *Salpa cordiformis-zonaria*). Kjeden svømmer, som allerede Chamisso (p. 11) angiver, for det meste i en ret Linie; hvert Individ trækker sig ifl. Sars (Nr. 2, p. 72) sammen for sig. Kjedens Medlemmer løsnes overordentlig let fra hinanden f. Ex. ved Irritation, eller naar den løftes op af Vandet.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er lang, foroven flad, forneden stærkt hvælvet, jævnt afrundet og noget fladtrykt fortil, lige afskaaren, dobbelt saa høj som bred bagtil. Et Tværsnit gjennem Midten af Kroppen giver en næsten trekantet Flade. Omkring Kloakaabningen løber Kappen ud i 7—8 korte, stumpe, faste Torne; fra hver af disse udgaar en lav Kjøl fortil, som hurtigt taber sig. Den Kjøl, der kommer fra den nederste, stundom spaltede Torn deler sig bag ved Indvoldsmassen og taber sig paa begge Sider af denne (smlgn. Sars, Nr. 2, p. 65). Kroppens Længde ca. 70^{mm}.

Kappen er fortil tynd; tykkere, mere bruskagtig paa Bugens bageste Del.

Aabningerne ere endestillede, rykkede temmelig langt op mod Rygsiden. Mundaabningen er bredest, halvmaaneformig, med stærkt fremspringende Underlæbe.

Kropmusklerne ere 9 i Tallet; de gaa tværs over Ryggen og standse i Høide med hinanden, kort efter at de ere bøiede om paa Siderne. De tre forreste og de to bageste konvergere i Ryggens Midtlinie; de mellemliggende løbe parallelt.

Mund- og Kloakhule gaa jævnt over i hinanden, omtrent ens vid overalt.

Nerveknuden er temmelig stor og ligger lidt bagved Fimreorganet. Synsapparatet er bredt og knapformigt; Pigmentet er ordnet i en hesteskoformig, fortil aaben Bue.

Fimreorganet ligger midtveis mellem Overlæbens Rand og 1ste Kropmuskel, lige foran Gjællerørets Forende; det er noget mere langstrakt, men iøvrigt af samme Form som Kjedesalpens.

Gjællerøret er langt og spinkelt; det er ophængt til Mundhulens Loft indtil bagom 2den Kropmuskel. Der findes ca. 180 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren udspringer langt nedenfor Mundaabningen med opadbøiet Forende, er jævnt krummet i hele sit Løb og standser først ved Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Den indtager Kroppens laveste Parti og ligger noget foran den nederste Torn, under og lidt foran de to bageste Kropmuskler.

Indvoldsmassen er aflang, lindseformigt sammentrykt, i levende Live har den ifl. Sars (Nr. 2, p. 67) en rødgul Farve.

Fosterkjedens Stilling minder meget om Forholdel hos *Salpa costata-Tilesii* (ikke hos *Salpa africana-maxima*); Kjeden begynder paa Bugsiden, tæt foran Tarmkanalen og strækker sig fremad paa høire Side af Midtlinien; omtrent i Høide med 5te eller 6te Kropmuskel bøier den knæformigt venstre om og løber paa venstre Side af Midtlinien bagtil forbi Tarmkanalen. Fostrene vende alle Bagenden udad mod Periferien. Ifl. Sars (Nr. 2, p. 71) fødes Kjeden — som sædvanligt stykkevis — gjennem en i dette Øiemed gjennembrudt Aabning i Nærheden af den nederste Torn.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] Norges Kyst, Florø og Bremanger, 61° 50′ N. Br. (Sars). [2] Færøerne (J. Steenstrup). [3] Ørkenøerne (Steenstrup; lgl. ifl. Herdman og flere Eng. og Skotske Forf.). [4] Hebriderne (ifl. Herdman). [5] 60° 4′ N. Br., 18° 33′ V. L. (Assist. Steenstrup). [6] 59° 37′ N. B., 8° V. L. (Olrik). [7] 59° N. Br., 22½° V. L. [8] 58¼° N. B., 29½° V. L. (Bang). [9] 57° 23′ N. Br., 18° 36′ V. L. (Olrik). [10] 46° N. Br., 24° V. L. (Hygom). [11] 46° N. Br., 37° 10′ V. L. (Andréa). [12] 41° 10′ N. Br., 17° 55′ V. L. (Normann). [13] 39° N. Br., 13° V. L.; [14] 38° N. Br., 13½° V. L. (Hygom). [15] 36° 40′ N. Br., 23° 16′ V. L. (Andréa). [16] 36° N. Br., 28° V. L. (Hygom) [17] 33° 48′ N. Br., 53° 10′ V. L. (Garde). [18] 26° N. Br., 22° V. L. (Hygom). [19] 25° N. Br., 32° V. L. (R. Nielsen). [20] 23° 2¾′ N. Br., 31° 28′ V. L. (Mathiesen). [21] 20° N. Br., 36° V. L.; [22] 17° N. Br., 22° V. L.; [23] 15° N. Br., 26° V. L.; [24] 6° N. Br., 22° og [25] 28° V. L.; [26] 5° N. Br., 32° V. L. (Hygom). [27] 3° 29′ N. Br., 22° 38′ V. L. (Reinhardt, Galath. Exp.). [28] 3° N. Br., 27° V. L. (Hygom). [29] 12° 10′ S. Br., 28° 16′ V. L.; [30] 39° 56′ S. Br., 12° 30′ Ø. L. (Andréa).

Middelhavet: [31] Malaga (J. Collin).

Det Indiske Hav: [1] 42° S. Br., 31° Ø. L. (Strandgaard). [2] 40° 41′ S. Br., 85° 22′ Ø. L. (Hartmann). [3] 29° 54′ S. Br., 76° 42′ Ø. L.; [4] 5° 21′ S. Br., 81° 56′ Ø. L.; [5] 1° 44½′ S. Br., 7¾° Ø. L. (Mathiesen).

Det stille Hav: [1] 0°, 105° Ø. L., N. f. Banka (Strandgaard). [2] 40° 50′ S. Br., 161° 0′ Ø. L., Ny Zeelandshavet (Hartmann).

Salpa africana-maxima, Forsk.

Tab. II, Fig. 32—34 og 44—45.

Synonymi og Literatur.

Salpa maxima, Forsk., p. 112, Tab. 35, Fig. A (undt. A, 1), Tab. 36, Fig. H. — Brug., Pl. 74, Fig. 2. — Bosc, Nr. 1, p. 178. — L., Nr. 3, p. 3129, Nr. 1. — Lam., p. 116. — Quoy & Gaim., Nr. 5, p. 503, Pl. 73, Fig. 3. — Blainv., p. 117. — Cuvier, Nr. 3, Pl. 120; 121, Fig. 1 og Pl. 122. — Shaw, vol. 7, Tab. 232. — Meyen, p. 412 (som mindre rigtigt regner S. runcinata, gregata, Cham., og vistnok ogsaa med Urette S. dubia, Cham., herhen). — Costa, Nr. 1, p. 195, Tav. I—II.

Salpa africana, Forsk., p. 116, Tab. 36, Fig. C. — Brug., Pl. 75, Fig. 7. — Bosc, Nr. 1, p. 180. — Lam., p. 117. — Costa, Nr. 1, p. 226.

Salpa birostrata, Blainv., p. 119.

Salpa Forskalii, Lesson, Nr. 2, p. 272.

Salpa africana-maxima, Krohn, p. 112—113. — Vogt, Nr. 3, p. 6.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo, cylindrico; extremitatibus in appendicem brevem, conicam desinentibus. Aperturis in dorso sitis. Musculis corporis 6 in dorso sitis; quatuor anticis æque ac duobus posticis in medio dorso approximatis; ramis descendentibus quarti et quinti musculi corporis in utroque latere non approximatis.

Proles solitaria. Corpore longo, cylindrico; extremitate anteriori depressa, subrotundata; extremitate posteriori alta, truncata, spinis nullis. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 9(—10) parallelis in dorso sitis (duobus aut tribus anticis rarissime in medio dorso approximatis).

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er langstrakt, med fladtrykt Ryg og hvælvet Bug; hver Ende er udstyret med en i Sammenligning med Forholdet hos Kjedesalpen af *Salpa runcinata-fusiformis* kort, tilspidset, kegleformig Forlængelse af Kappen. En stor Pukkel neden under det bageste Vedhængs Udspring gjemmer Indvoldsmassen. Totallængden udgjør ca. 150^{mm}.

Kappen er temmelig tyk og blød; den Del, der omgiver Indvoldsmassen, er haard og bruskagtig.

Aabningerne ere rygstillede, Mundaabningen næsten dobbelt saa bred som Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 6 i Tallet; to og to ere de sammensmeltede paa Midten af Ryggen; medens de tvende forreste Grupper atter tangere hinanden i Midtlinien, staar den

bageste Gruppe fjærnt fra de øvrige. Den for Kjedesalpen af *Salpa runcinata-fusiformis* eiendommelige Tilnærmelse mellem 4de og 5te Kropmuskel et Stykke nede paa hver Side finder ikke Sted hos nærværende Art; desuden naa Kropmusklerne ikke nær saa langt om paa Bugsiden som hos *Salpa runcinata-fusiformis*.

Mundhulen og Kloakrummet danne tilsammen et aflangt, i begge Ender jævnt afrundet Rum, som gjennemgaaende er noget bredere end høit.

Nerveknuden er lille og kugleformig; den ligger midtveis mellem Mundaabningen og 1ste Kropmuskel. Synsapparatet er lille, næsten kugleformigt med stærkt indkneben Hals.

Fimreorganet dannes af en temmelig høi, sammentrykt Hule, hvis opadvendende Bund er stærkt krummet, især fortil, bagtil strækker den sig lige bagud og standser i Gjællerørets øverste Del.

Gjællerøret er svært bygget, sammentrykt; foroven er det fastgjort til Mundhulens Loft indtil bag om 2den Kropmuskel.

Bugfuren er opadkrummet fortil og løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform og ligger langt tilbage; Tarmrøret er videst paa Midten; Svælg og Anus vende fortil.

Testiklen ligger i Tarmløkken.

Fosterets Stilling. Der findes kun anlagt et enkelt Foster indvendig paa høire Side af Kloakrummet imellem de divergerende Ender af 5te og 6te Kropmuskel.

Salpekjedens Medlemmer ere stillede i to Rækker, ikke som Krohn (p. 126) antyder parallelt med Kjedens Længdeaxe, men Individernes Længdeaxer danne spidse Vinkler med Kjedens Længdeaxe, hvilket iøvrigt allerede er angivet af Quoy og Gaimard.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er langstrakt, fladtrykt paa Rygsiden, stærkt hvælvet paa Bugsiden; medens den næsten lige afskaarne Bagende er kjendelig høiere end bred, gjør det omvendte Forhold sig gjældende for den stumpt afrundede Forendes Vedkommende. Høit oppe paa Bagenden ligger Kloakaabningen, hvorimod dens laveste Parti indtages af Indvoldsmassen. Det største Exemplar var 135^{mm} langt.

Kappen er forholdsvis tynd paa Rygsiden, tykkere paa Bugsiden; særlig tyk og fast er den Del, der omgiver Indvoldsmassen.

Aabningerne ere endestillede, Mundaabningen særdeles bred; Underlæben rager noget frem foran Overlæben; Kloakaabningen er lille, oval og rigt udstyret med Ringmuskulatur.

Kropmusklerne ere 9 i Tallet, den 1ste er stedse noget bagtil krummet midt paa Rygfladen; iøvrigt løbe Musklerne parallelt og standse i samme Høide, kort efter at de ere

bøiede om paa Siden (i enkelte, sjældne Tilfælde har jeg set 1ste og 2den Kropmuskel nærme sig noget til hinanden midt paa Ryggen; ogsaa spores en Gang imellem en Tilnærmelse af den midterste Del af de tre forreste Kropmuskler).

Mundhulen er langstrakt, næsten firkantet i Tværsnit, fortil noget bred og lav; bag til gaar den jævnt over i Kloakrummet, der hurtigt indsnevres henimod Kloakaabningen.

Nerveknuden er lille, kugleformig og ligger et godt Stykke foran 1ste Kropmuskel, lige bagved Fimreorganet. Synsapparatet dannes af en lille, kegleformig, paa Nerveknudens forreste, øverste Del siddende, spids Udvæxt.

Fimreorganet er af en ret ejendommelig Form, som lettest vil forstaas af Figuren.

Gjællerøret er svært bygget, noget sammentrykt, især fortil; det er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet indtil Bagranden af 2den Kropmuskel.

Bugfuren løber skraat nedad bagtil, helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform; dens Stilling og Udseende er omtrent som Kjedesalpens.

Fosterkjeden begynder foran Tarmkanalen og løber halvcirkelformig uden om den venstre Side af Indvoldsmassen.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] 52° 47′ N. Br., 13° 10′ V. L. (Branner). [2] 47° N. Br., 9° V. L. (Hygom). [3] 46° N. Br., 10′ V. L. (Stübe). [4] 43° 30′ N. Br., 32° 40′ V. L. (Andréa). [5] 42° 38′ N. Br., 29° 34′ V. L., Azoriske Øer (Warming). [6] «In freto Gaditano» (ifl. Forskåhl). [7] 41° 15′ N. Br., 15° 30′ V. L. (Andréa). [8] 40° N. Br., 26° V. L. (Hygom). [9] 39° N. Br., 34° V. L. (Andréa). [10] 38° N. Br., 30° og 34° V. L.; [11] 37° N. Br., 27° V. L. (Hygom). [12] 36° N. Br., 20° V. L. (Andréa). [13] 35° 30′ N. Br., 28° 13′ V. L. (Andréa). [14] 35° N. Br., 30° V. L. [15] 34° N. Br., 30° V. L.; [16] 11° N. Br., 29° 30′ V. L. (Hygom). [17] 29° 0′ S. Br., 11° 30′ Ø. L. (Andréa). [18] Cap Hoorn (ifl. Meyen).

Middelhavet: [19] 36° 17′ N. Br., 3° 27′ V. L. (Branner). «Ad littora Tunetana» (ifl. Forskåhl). Neapel (Panceri).

Det indiske Hav: [1] 35° 12′ S. Br., 26° 0′ Ø. L.; [2] 30° 14′ S. Br., 37° 50′ Ø. L. (Hartmann). [3] 27° 30′ S. Br., 98° 0′ Ø. L. (Andréa).

Salpa cylindrica, Cuvier.

Tab. I, Fig. 22, Tab. II, Fig. 35—37 og 43.

Synonymi og Literatur.

Salpa cylindrica, Cuvier[1]), Nr. 1, p. 381, Pl. 68, Fig. 8—9). — (Lgl. i Mém. Moll., p. 22, Fig. 8—9). — Lam., p. 119. — Blainv., p. 113. — Meyen, p. 417.
Jasis cylindrica, Sav., p. 124, Pl. 24, Fig. 2.
Salpa elongata, Quoy & Gaim. (ifl. Blainv., p. 113).
Salpa coerulescens, Cham., p. 22, Fig. 9.
?Salpa Garnotii, Lesson, Nr. 2, p. 270, Pl. 6, Fig. 6.
?Salpa cymbiola, Dall, p. 159.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore ovato; extremitatibus in appendicem sublongam, conicam desinentibus. Aperturis in dorso sitis. Musculis corporis 5, omnibus in ventre interruptis; tribus anticis et duobus posticis in medio dorso coalitis, omnibus in medio dorso approximatis.

Proles solitaria. Corpore longissimo, cylindrico; extremitatibus truncatis, spinis nullis. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 9, omnibus in medio ventre interruptis; musculis quatuor anticis in medio dorso approximatis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er aflang, forholdsvis kort og bred, noget fladtrykt og tilspidset i begge Ender. Største Exemplar var 9^{mm} langt.

Kappen er tyk, især paa Siderne, fast og bruskagtig; baade for og bag løber den ud i et kort, bredt, kegleformigt Vedhæng.

Aabningerne ere rygstillede, Mundaabningen omtrent dobbelt saa bred som Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 5 i Tallet, samlede i to Grupper, tre i en forreste og to i en bageste; begge Grupper tangere hinanden midt paa Ryggen. Alle Kropmuskler ere afbrudte paa Bugsiden, paa hvilken de tre i den forreste Gruppe naa længst ned. Den bageste Kropmuskel løber bagud paalangs ad Siden; i Høide med Kloakaabningen afgives en Gren til hver Vig af denne; omtrent samtidig gaffeldeler Musklen sig, idet en spinklere Gren

[1]) Arten er ifl. Lamarck og Blainvillle først hjemført af Péron og Lesueur.

fortsætter Retningen bagud, medens Muskelens Hovedmasse drejer ned paa Bugsiden og forsvinder, inden den naar Midtlinien.

Mundhulen er oval, bredere end høi.

Nerveknuden er temmelig stor, kugleformig; den ligger midtveis mellem Mundaabningen og 1ste Kropmuskel. Synsapparatet er lille og fremadrettet.

Fimreorganet er langstrakt og smalt; dets bageste Del løber ned paa Gjællerørets Forende; Grubens i Mundhulens Loft dybt indsænkede Bund er jævnt krummet i hele sin Længde.

Gjællerøret er kort og fladt, svært bygget; dets Forende er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra Fimreorganet til den forreste Rand af 1ste Kropmuskel. Der findes omtrent 40, udadtil brede, midtpaa smalle Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren er fortil noget opadkrummet; den naar ikke Svælget, men standser omtrent i Høide med de nedre Ender af 4de Kropmuskel.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen er kugleformig; Tarmrøret er temmelig kort, midtpaa noget buget.

Testiklens Form og Leiringsforhold kan jeg ikke udtale mig om, da de undersøgte Individer kun vare smaa og næppe nok havde en Antydning af Testikel.

Fosterets Stilling. Kun et enkelt Foster findes anlagt indvendig paa høire Side af Kloakrummet under 4de Kropmuskel. En Kjedesalpe paa ca 8^{mm}'s Længde havde i sig et Foster paa 1^{mm}, hvorpaa tydeligt det for den enlige Salpe sædvanlige Muskeltal og Muskelstilling kunde erkjendes.

Salpekjeden og Individernes Stilling i samme efter Fødselen er mig ukjendt.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er stærkt forlænget, cylindrisk, noget fladtrykt, især fortil, lige afskaaret i begge Ender. Største Exemplar var 42^{mm} langt.

Kappen er temmelig tyk og fast.

Aabningerne ere endestillede; Mundaabningen er som sædvanlig noget bredere end Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 9 i Tallet alle afbrudte paa Bugsiden. De fire forreste Kropmuskler konvergere midt paa Ryggen; de øvrige ere parallele.

Mundhulen er lang og cylindrisk, fortil bredere end høi.

Nerveknuden ligger midtveis mellem Overlæbens Rand og 1ste Kropmuskel; den er lille, kugleformig, med et fladt, knapformigt Synsapparat.

Fimreorganet ligner i Udseende og Leiringsforhold Kjedesalpens.

Gjællerøret er langt og temmelig spinkelt; Forenden er fastgjort til Mundhulens

Loft paa Strækningen fra 1ste til bag om 3die Kropmuskel. Der findes ca 135 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren begynder tæt indenfor Underlæbens Rand og løber uden Krumninger helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen, som er beliggende mellem 7de og 9de Kropmuskel, ligner en Flaske med en temmelig lang, lodret opstigende Hals. Tarmrøret er videst lidt foran Midten; Endetarmen stiger lige i Veiret og udmunder i en tragtformig Anus.

Fosterkjeden ligger paa Bugsiden; den begynder tæt foran Indvoldsmassen og strækker sig uden Krumninger lige fortil, under Bugfuren, til lidt foran sammes Midte.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] 20° N. Br., 36° V. L.; [2] 18° N. Br., 25° V. L. (Hygom). [3] 13° N. Br., 31° V. L. (Strandgaard). [4] 6° N. Br., 28° V. L.; [5] 3° N. Br., 22° V. L. (Hygom). [6] 35° 31′ S. Br., 0° 51′ V. L. (Andréa).

Det Stille Hav: 0° Br, 105° Ø. L., Javasø; Chinasøen (Strandgaard).

Salpa costata-Tilesii, Quoy & Gaim. — Cuvier.

Tab. I, Fig. 10—11, Tab. II, Fig. 38—41 og 47.

Synonymi og Literatur[1]).

Thetys vagina, Til., p. 150—165, Tab. V—VI.

Salpa Tilesii, Cuvier, Nr. 1, p. 375, Pl. 68, Fig. 3 og 6. — Lam., p. 118. — Blainv., p. 109. — Meyen, p. 415.

Salpa costata, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 504, Pl. 73, Fig. 2, og Nr. 2, p. 37. — Blainv., p. 122. — Meyen, p. 419. — Krohn, p. 114.

Salpa bigibbosa, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 504, Pl. 73, Fig. 1, og Nr. 2, p. 38. — Blainv., p. 122. — Meyen, p. 419.

Salpa gibbosa, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 506, Pl. 73, Fig. 7. — Blainv., p. 122. — Meyen, p. 419.

Salpa infundibuliformis, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 508, Pl. 73, Fig. 13, og Nr. 2, p. 42. — Blainv., p. 110. — Meyen, p. 420.

Salpa costata-Tilesii, Krohn, p. 114 (opstiller Formodningen om, at S. costata og S. Tilesii høre sammen). — Vogt, Nr. 3, p. 7.

---

[1]) Home afbilder den enlige Salpe under Navnet «*Dagyza strumosa*, Banks» paa Tab. 71; ligeledes giver han en Figur af Kjedesalpen paa Tab. 72 under Betegnelsen «another species of dagyza».

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore robusto, subcompresso; appendicibus nullis. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 5 in dorso sitis; tribus anticis in medio dorso interruptis et approximatis; duobus posticis parallelis.

Proles solitaria. Corpore robusto, inprimis antice; extremitate posteriori depresso. Aperturis terminalibus; utroque latere aperturæ cloacalis cornu longo, curvo, in extremitate depresso. Musculis corporis 18—22 in dorso sitis, medio dorso interruptis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er svær, lidt sammentrykt, med fladtrykt Ryg og stærkt hvælvet Bug. Det største Exemplar var ca. 190^{mm} langt.

Kappen er tyk, bruskagtig, hist og her forsynet med korte Pigge, især paa den Del, som dækker Indvoldsmassen, og som springer pukkelformigt frem paa Bugen; hos ganske smaa kun faa Millim. lange Individer, som jeg udtog af den enlige Salpe, vare disse Torne meget tydelige og forholdsvis kolossale (Fig. 10 og 11). Undertiden forefandt jeg dog en fuldstændig glat Overflade hos store Exemplarer.

Aabningerne ere endestillede; Mundaabningen er særdeles bred og har en meget tyk Underlæbe; den ovale, med stærk Ringmuskulatur udstyrede Kloakaabning sidder paa Spidsen af den skraat opstigende, tudformige Bagende; Kloakaabningens Rande ere tynde og skarpe.

Kropmusklerne ere fem i Tallet; de tre forreste ere afbrudte midt paa Ryggen, hvor de iøvrigt nærme sig stærkt til hinanden; de to bageste Kropmuskler ere indbyrdes parallele og stundom, dog ikke altid, afbrudte midt paa Ryggen. Alle fem Kropmuskler tabe sig i Høide med Mundvigene, saaledes at Bugen er aldeles fri for Muskulatur.

Mundhulen er rummelig, noget høiere end bred; den gaar jævnt over i det henimod Kloakaabningen tragtformigt indsnevrede Kloakrum.

Nerveknuden er forholdsvis meget lille; Synsapparatet er ligeledes lille og knapformigt.

Fimreorganet minder i Udseende og Leiringsforhold meget om det samme Organ hos *Salpa scutigera-confoederata.*

Gjællerøret er kraftigt bygget, forholdsvis kort, sammentrykt, ophængt til Mundhulens Loft indtil i Høide med 1ste Kropmuskel. Der findes ca. 60 Fimreplader paa Gjællerørets Forflade.

Bugfuren begynder dybt nede under den store Underlæbe paa Mundhulens Gulv; den løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. I levende Live er Indvoldsmassen ifl. Quoy og Gaimard af en brændende rød Farve og lyser i Mørke. Svælget er tragtformigt og ligger lidt tilhøire for Midlinien; Tarmrøret er videst midtpaa; Endetarmen stiger skraat opad og udmunder i en rummelig, tragtformig, sammentrykt, skraat afskaaret Anus.

Testiklen ligger halvkugleformigt uden om Tarmens nederste Halvdel.

Fosterets Stilling. Som hos *Salpa cordiformis-zonaria* og *Salpa hexagona* anlægges flere Fostre; kun fra en enkelt Lokalitet (27° N. Br., 64° V. L., Hovgaard $^{9}/_{3}$ 1883) forefindes paa Universitetets zoologiske Museum et Par Exemplarer paa ca. 10^{cm}'s Længde med Fosteranlæg. Der findes 3, næsten ens store Fostre paa høire Side af Kloakrummets Rygparti, lige bagved 4de Kropmuskel.

Salpekjeden kjender jeg kun i Fostertilstanden. Jeg formoder, at Medlemmerne af Kjeden efter Fødselen gruppere sig som Kjedesalperne af *Salpa democratica-mucronata*, og at Individernes Længdeaxer danne spidse Vinkler med Kjedens Længdeaxe.

Den enlige Salpe (proles solitaria).

Kroppen er svært bygget, især fortil, noget fladtrykt henimod Kloakaabningen, hvor den tillige bliver meget smal. Noget foran hver Vig af Kloakaabningen udgaar et langt, udad og bagtil krummet, i Spidsen fladtrykt, fast, grønligt farvet Horn. Det største Exemplar var 192^{mm} langt, heri ikke iberegnet Hornene, hvis Længde udgjorde 34^{mm}.

Kappen er tyk, bruskagtig og fast, især paa Bugsiden for det pukkelformige Partis Vedkommende, som omgiver Indvoldsmassen.

Aabningerne ere endestillede; den særdeles brede Mundaabning har tykke Læber, især er Underlæben stærkt fortykket; den ovale, med tynde Rande udstyrede Kloakaabning sidder paa Spidsen af den tudformige Bagende.

Kropmusklernes Antal varierer noget. I Reglen forefindes 20 Tværmuskler paa hver Side af Ryggens Midtlinie; dette Tal kan stundom forøges til 22 eller synke ned til 18; ofte træder desuden den Eiendommelighed til, at der en Muskel mere paa den ene Side end paa den anden.

Mundhulen er omtrent saa høi som bred; den gaar jævnt over i det bagtil stærkt indsnevrede Kloakrum.

Nerveknuden er meget lille og har et særdeles lille Synsapparat; den ligger et godt Stykke bag Fimreorganet, lidt foran den 1ste Kropmuskel.

Fimreorganet er omtrent som hos Kjedesalpen.

Gjællerøret er svært bygget, sammentrykt, ophængt til Mundhulens Loft indtil omtrent i Høide med 4de Kropmuskel. Der findes ca. 85 Fimreplader paa Gjællerørets Forside.

Bugfuren er jævnt krummet igjennem hele sin Længde og løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er som hos Kjedesalpen; kun synes Anus at springe noget mere frem bagtil mellem to temmelig store, bruskagtige, morgenstjærneformige Processer fra den indre Kropvæg. Indvoldsmassen er ifl. Quoy og Gaimard i levende Live orangerød.

Fosterkjedens Stilling minder om Forholdet hos *Salpa runcinata-fusiformis*; ligesom hos denne strækker den sig fra Svælget fremad paa Bugsiden, bøier derefter knæformigt om og løber næsten parallelt med og paa venstre Side af det fortilgaaende Parti bagtil og standser omtrent i Højde med Anus.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] Ved Indløbet til Kanalen (ifl. Blainville). [2] 43° N. Br., 12° V. L. (Andréa). [3] 42°—41° N. Br., 26° V. L.; [4] 40° N. Br., 31° V. L.; [5] 39° N. Br., 13° V. L., (Hygom). [6] Azoriske Øer (Warming). [7] 36° N. Br., 27° V. L.; [8] 35° N. Br., 31° V. L. (Hygom). [9] 35° 20′ N. Br., 24° V. L. (Andréa). [10] Madeira, 2 Mile fra Land (Reinhardt, Galath. Exp.). [11] 28° N. Br., 25° V. L. (Iversen). [12] 27° N. Br., 64° V. L. (Hovgaard). [13] 23° 31′ N. Br., 22° 4′ V. L. (Stübe). [14] 13° N. Br., 25° V. L. (Strandgaard). [15] 10° N. Br., 22° V. L.; [16] 2° S. Br., 26° V. L. (Hygom). [17] 34° 20′ S. Br., 5° 30′ V. L. (Andréa).

Middelhavet: (ifl. Krohn og Vogt).

Det Indiske Hav: [1] 40° 8′ S. Br., 52° Ø. L.; [2] 40° 4′ S. Br., 53° 20′ Ø. L.; [3] 33° 34′ S. Br., 89° 0′ Ø. L. (Andréa). [4] 21° 50′ S. Br., 63° 40′ Ø. L. (Hartmann).

Det Stille Hav: [1] Japan (Salmin). [2] Mellem Marianerne og Sandwichsøerne, 38° N. Br. (ifl. Quoy & Gaim.: S. bigibbosa). I Nærheden af Selskabsøerne (ifl. Quoy & Gaim.: S. gibbosa.)

Salpa cordiformis-zonaria, Quoy & Gaim. — Pall.

Tab. I, Fig. 18—21.

Synonymi og Literatur.

Holothurium zonarium, Pall., p. 26, Tab. I, Fig. 17 A—C.

Salpa polycratica, Forsk., p. 116, Tab. 36, Fig. F. — Brug., Pl. 75, Fig. 5. — Bosc, Nr. 1, p. 181. — L., Nr. 3, p. 3150, Nr. 11. — Lam., p. 117. — Risso, p. 284. — Blainv., p. 116. — Meyen, p. 414.

Holothuria zonaria, L., Nr. 3, p. 3142, Nr. 18.

Salpa zonaria, Brug., Pl. 73, Fig. 8—10. — Lam., p. 118. — Cham., p. 12, Fig. 3 A—G. — Blainv., p. 115. — Eschricht, p. 303 (og fremdeles), Tab. III, Fig. 16, 18—23. — Herdman, p. 113.

Salpa cordiformis, Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 226, Pl. 8 A, Fig. 3—6. — Blainv., p. 120. — Eschricht, p. 301 (og fremdeles), Tab. I, Fig. 1—4, Tab. II, Fig. 5—10, Tab. III, Fig. 11—15 og 17, Tab. IV, Fig. 23 (bis) — 36. — Vogt, Nr. 1, p. 33, Fig. 1.
Salpa microstoma, Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 226, Pl. 8 A, Fig. 7—9.
Salpa unicuspidata, Quoy & Gaim., iflg. Blainv., p. 116.
?Salpa quadrangularis, Lesson, Nr. 2, p. 268, Pl. 6, Fig. 2.
Salpa cordiformis-zonaria, Krohn, p. 112—113.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo, depresso; extremitatibus in appendicem conicam, acuminatam desinentibus. Aperturis in dorso sitis. Musculis corporis 6, latis, parallelis; omnibus in medio ventre interruptis, primo et secundo et in medio dorso interruptis.

Proles solitaria. Corpore longissimo; extremitate anteriori truncata, extremitate posteriori in spinam brevem, conicam, acuminatam desinente. Apertura oris terminali, apertura cloacali in dorso sita. Musculis corporis 6, latissimis, parallelis, et in medio dorso et in medio ventre interruptis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er aflang, forholdsvis kortere og bredere end hos den enlige Salpe, noget fladtrykt, især paa Ryggen. Forenden løber ud i et stumpt, kegleformigt Vedhæng; ligeledes forlænger Bagenden sig ud i et ofte dobbelt saa langt, noget tyndere, i Reglen mere tilspidset, skjævt tilhøire siddende Vedhæng. Begge disse Vedhæng ere Forlængelser af Kappen. Ca. 50^{mm} lang.

Kappen er temmelig tyk, fast og bruskagtig.

Aabningerne ere rygstillede; Mundaabningen betydelig bredere end Kloakaabningen.

Kropmusklerne ere 6 i Tallet, brede, indbyrdes parallele; alle ere de afbrudte paa Bugens Midte; de to forreste tillige midt paa Ryggen.

Mundhulen er bredere end høi, afrundet for og bag.

Nerveknuden er kugleformig og ligger umiddelbart bagved Fimreorganet.

Fimreorganet er langstrakt og smalt og ligner Fimreorganet hos den enlige Salpe; det ligger lige foran 2den Kropmuskels forreste Rand.

Gjællerøret er tyndt og spinkelt; dets forreste Ende er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra 2den Kropmuskels Bagrand til midt under 4de Kropmuskel.

Bugfuren begynder med brat opadkrummet Spids dybt neden under Mundaabningen og naar hen i Høide med 4de Kropmuskels Bagrand.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform; Indvoldsmassen er kugleformig og ligger forholdsvis længere fortil end hos den enlige Salpe, neden under den bageste Del af Kloakrummet.

Testiklen ligger som et halvkugleformigt Overtræk omkring Tarmkanalens nederste Del.

Fosterets Stilling. Der findes 4 Fostre paa lige saa mange forskjellige Udviklingsstadier indvendig paa høire Side mellem 5te og 6te Kropmuskel; det længst fortil liggende Foster er det største, det bageste det mindst udviklede (smlgn. *Salpa hexagona*).

Salpekjedens Medlemmer ligge i to Rækker; Kjedesalpernes Længdeaxer ere parallele med Kjedens Længdeaxe (smlgn. *Salpa runcinata-fusiformis*).

Den enlige Salpa (proles solitaria).

Kroppen er stærkt forlænget og noget fladtrykt, især fortil. Et Tværsnit gjennem Kroppen i Høide med Kloakaabningen frembyder en firkantet Flade. Skraat nedad bagtil udgaar en bred, kegleformig, spids Forlængelse, der indeslutter Indvoldsmassen og Fosterkjeden. Det største Exemplar maalte 65^{mm} i Længde.

Kappen er temmelig tyk, fast og bruskagtig.

Mundaabningen ligger som en bred Tværspalte paa den lige afskaarne Forende. Kloakaabningen er rygstillet, halvmaaneformig og langt smallere end Mundaabningen. Paa hver Side af Kloakaabningen danner Kappen et skarpt Hjørne.

Kropmusklerne ere 6 i Tallet, særdeles brede, parallele og afbrudte saavel paa Ryggens som paa Bugens Midte. Den bageste Kropmuskel er kun udviklet paa Siderne af Ryggen.

Mundhulen er firkantet i Tværsnit, høiere bag end for.

Nerveknuden er dobbelt saa bred som lang og ligger i Høide med Mellemrummet mellem 1ste og 2den Kropmuskel, tæt foran Gjællerørets Udspring. Synsapparatet er fladt.

Fimreorganet er langstrakt, lige og tilspidset i begge Ender; det ligger et Stykke foran Nerveknuden.

Gjællerøret er langt og spinkelt; den til Mundhulens Loft fastgjorte Ende naar fra 2den Kropmuskel til hen i Høide med Mellemrummet mellem 4de og 5te Kropmuskel.

Bugfuren begynder tæt indenfor Underlæben, og efter et ganske lige Løb standser den lidt foran Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform og ligger bagved Kloakrummet i den allerede ovenfor omtalte Forlængelse af Kroppens Bagende.

Fosterkjeden er snoet spiralformigt uden om Tarmkanalen.

Findesteder.

Atlanterhavet: [1] 48° N. Br., 8° V. L. (Hygom). [2] 46° 23′ N. Br., 11° 15′ V. L. (Reinhardt). [3] 46° N. Br., 18° V. L. (Hygom). [4] 38½° N. Br., 11° V. L. (Friis). [5] «Extra fretum Gaditanum» (ifl. Forsk.). [6] 37° N. Br., 10° og [7] 15° V. L. (Friis). [8] 34° 22′ N. Br., 18° 10′ V. L. (Reinhardt). [9] 34° N. Br., 54° V. L.; 31° N. Br., 61° V. L. (Hovgaard). [10] 30° 16′ N. Br., 37° 16′ V. L. (Warming). [11] 30° N. Br., 13½° V. L. (Hygom). [12] 25° 5′ N. Br., 32° V. L. (R. Nielsen). [13] Vestindien, Øen Antigua (ifl. Pallas). [14] 16° 31′ N. Br., 33° 10′ V. L.; [15] 15° 56′ N. Br., 30° 41′ V. L. (Warming). [16] 15° 19′ N. Br., 24° 54′ V. L. (Reinhardt). [17] 12° N. Br., 26° 30′ V. L.; [18] 5° 24′ N. Br., 26° 30′ V. L. (E. von Benzon). [19] 4° 25′ N. Br., 36° V. L. (Kjellerup). [20] 7° 17′ S. Br., 32° 52′ V. L. (E. von Benzon). [21] 14° S. Br., 28° 50′ V. L. (Warming). [22] 20° 14′ S. Br., 1° 4′ V. L. (Andréa). [23] 36° 34′ S. Br., 2° 0′ V. L. (Andréa). [24] 36° 45′ S. Br., 7° 36′ V. L. (Reinhardt).

Middelhavet: [25] 36° 29′ N. Br., 2° 28′ V. L. (Branner). [26] Malaga (J. Collin).

Det Indiske Hav: [1] 38° 50′ S. Br., 28° 30′ Ø. L. (Andréa). [2] 35° 12′ S. Br., 26° 0′ Ø. L.; [3] 34° 30′ S. Br., 27° 50′ Ø. L. (Hartmann). [4] 5° 21′ S. Br., 81° 26′ Ø. L. (Mathiesen). [5] 3° 9′ N. Br., 84° 44′ Ø. L. (Reinhardt).

Det Stille Hav: [1] China-Søen, ved Manila (Galath. Exp.). [2] 40° 50′ S. Br., 161° 0′ Ø. L. (Hartmann).

Salpa hexagona, Quoy & Gaim.

Tab. I, Fig. 14—17.

Synonymi og Literatur.

Salpa hexagona, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 505, Pl. 73, Fig. 3. — Quoy & Gaim., Nr. 2, p. 39, Pl. 1, Fig. 4 (cit. hos Blainv., p. 122 og Meyen, p. 419).

?Salpa triangularis, Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 511, Pl. 74, Fig. 9—10.

?Salpa biensis, Blainv., p. 123 (Beskrivelsen er gjort efter en Tegning af en Naturforsker paa en engelsk Expedition til Congo).

?Salpa lineata, Less., Nr. 2, p. 268, Pl. 6, Fig. 5 og 5 bis.

Beskrivelse.

Proles gregata. Corpore longo, ventricoso, cristis longitudinalibus 4 serratis ornato; extremitate anteriori subacuminata, extremitate posteriori truncata. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 7 latis, in medio ventre interruptis, primo et in medio dorso interrupto; musculis 4 anticis in medio dorso approximatis.

Proles solitaria. Corpore longissimo, cylindrico, cristis longitudinalibus 6 valde prominentibus ornato; extremitatibus truncatis; crista utriusque lateris media et a dextra et a sinistra parte aperturæ cloacalis in appendicem longam, cylindricam desinente. Aperturis terminalibus. Musculis corporis 11, latissimis, parallelis, omnibus in medio ventre interruptis.

Kjedesalpen (proles gregata).

Kroppen er langstrakt, cylindrisk, noget buget paa Midten, løber spidst ud bagtil, stumpt tilspidset fortil; ca. 38^{mm} lang.

Kappen er temmelig tyk og fast; langs hver Side løbe to savtakkede, fremspringende Lister, der bagtil fortsætte sig ud paa en Proces af Kappen, som rager ud over Kloakaabningen, neden under denne.

Aabningerne ere endestillede; Mundaabningen er bred; den svagt tilspidsede Underlæbe rager frem foran Overlæben, saaledes at Mundaabningen kan siges at være i Begreb med at vandre op paa Rygsiden.

Kropmusklerne ere 7 i Tallet, særdeles brede; den bageste er næsten dobbelt saa bred som en af de andre; alle tabe de sig i Høide med hinanden paa Dyrets Sider; 1ste Kropmuskel, der er ikke saa lidt smallere end de øvrige, er tillige afbrudt midt paa Ryggen. De 5 forreste Kropmuskler nærme sig stærkt til hinanden paa Midten af Ryggen.

Mundhulen er cylindrisk og gaar bagtil over i et noget snevrere Kloakrum.

Nerveknuden er lille og kugleformig; den ligger lige foran 2den Kropmuskel i Høide med Gjællerørets forreste Ende. Synsapparatet er lille, kegleformigt og fremadrettet.

Fimreorganet er lille (ca. $1^1/_2{}^{mm}$ langt hos et Individ paa 38^{mm}) og smalt; det ligger foran Gjællerørets forreste Ende. Iøvrigt minder det i Henseende til Formen i høj Grad om Fimreorganet hos *S. cordiformis-zonaria.*

Gjællerøret er temmelig langt og spinkelt; noget sammentrykt, især i sit øverste Parti; det er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra lidt foran 2den Kropmuskel til Forranden af 4de Kropmuskel.

Bugfuren tager sin Begyndelse paa Mundhulens Gulv lige under Mundaabningen, er opadkrummet i sin forreste Ende, iøvrigt lige, og løber helt hen til Svælget.

Tarmkanalen er sammenrullet i Nucleusform. Indvoldsmassen er langagtig; dens Længdeaxe er parallel med Kroppens. Endetarmen løber lige bagtil og udmunder i en rummelig, skraat afskaaret, tragtformig Anus.

Testiklen var hos de af mig undersøgte Exemplarer lille, men ret tydelig, aflang, ulappet og havde sit Leie i Tarmløkken.

Fosterets Stilling. Der findes anlagt 4 Fostre indvendig paa høire Side af Kloakrummet under og bagved 6te Kropmuskel (Fig. 17, s, s′, s″ og s‴); det længst fortil lig-

gende Foster er det største, det bageste det mindst udviklede. Paa det største Foster, der kun maalte ca. 3mm i Længde, saa jeg tydeligt 11 Kropmuskler.

Salpekjedens Form og Individernes Stilling i Kjeden kjender jeg ikke.

Den enlige Salpe (proles solitaria)[1]).

Kroppen er stærkt forlænget, cylindrisk, svagt tøndeformigt udvidet midtpaa, jævnt afrundet i begge Ender. Incl. Tornene paa Bagenden 71mm lang, uden Tornene 57mm lang og ca. 12mm bred.

Kappen er temmelig tyk, fast, bruskagtig og udstyret med 11 Længdelister, hvoraf de 3 paa hver Side (Fig. 16, β, γ og δ) og de to paa Ryggen (Fig. 15, α og α') løbe ud i et temmelig tyndt og langt, men fast, trindt og spidst Vedhæng paa hver Side af Dyrets Bagende.

Aabningerne ere endestillede. Mundaabningen ses som en særdeles bred Tværspalte paa Forenden; Underlæben er kun ubetydeligt længere end Overlæben. Kloakaabningen er oval med sin største Diameter paatværs af Kroppen; den ligger lige midt paa Bagenden.

Kropmusklerne ere 11 i Tallet, særdeles brede, især den bageste; langs Ryggens Midtlinie have de et karakteristisk zigzagagtigt Forløb, der dog ikke gjælder for de 3 forrestes Vedkommende; nogle Muskelfibre fra de foranliggende Muskler løbe nemlig skraat bagtil og forene sig med de bagvedliggende Muskler; alle de forøvrigt parallele Kropmuskler ere afbrudte paa Bugsiden.

Mundhulen er cylindrisk.

Nerveknuden er temmelig stor og ligger usædvanligt langt tilbage under 5te Kropmuskel, kun lidt foran den bageste Del af Gjællerørets til Mundhulens Loft fasthæftede Forende. Synsapparatet kjender jeg ikke.

Fimreorganet er langt og smalt og ligger lige foran Gjællerørets forreste Ende.

Gjællerøret er langt, spinkelt og sammentrykt, især i sit forreste Parti; det er fastgjort til Mundhulens Loft paa Strækningen fra 2den Kropmuskels forreste Rand til forreste Rand af 6te Kropmuskel. Fimrepladerne paa Gjællerørets Forside ere særdeles tætstillede.

Bugfuren begynder i Forranden af 1ste Kropmuskel, har et lige Forløb og naar helt hen til Svælget.

Tarmkanalens Form og Forløb er som hos Kjedesalpen.

---

[1]) Til min Disposition har der kun været 1 helt Exemplar og nogle tomme Kapper.

Fosterkjedens Stilling kjender jeg ikke ret meget til. Der var paa det af mig sete Exemplar kun et ganske kort, tyndt Rør med begyndende Udvikling af Kjedesalper; det laa nedenfor Bugfurens bageste Spids og krummede sig derfra tilvenstre bagud.

Findesteder.

Det Indiske Hav: [1] 33° 20′ S. Br., 33° 0′ Ø. L. (Andréa). [2] 1° 20′ S. Br., 89° 37′ Ø. L. (Hansen & Thalbitzer). [3] 3° 9′ N. Br., 84° 44′ Ø. L., (Reinhardt, Galathea Exp.).

Det Stille Hav: [1] I Nærheden af Karolinerne paa 13° N. Br. (ifl. Quoy & Gaim.). [2] Nyhollandshavet, 40° 50′ S. Br., 161° 0′ Ø. L. (Hartmann).

Nomenclator Salparum.

* angiver, at det er den her i dette Arbeide brugte Artsbetegnelse.
? — enten, at jeg slet ikke kjender Formen, eller at jeg kun har vage Formodninger om, hvor den skal henføres.
0 — at Navnet er bleven eller efter min Opfattelse bør annulleres.

Findes der ikke vedføiet noget af disse tre Mærker, saa er Betegnelsen at opfatte som et Synonym til en af de i dette Arbeide omhandlede Arter.

* denotat significationem speciei in hoc opusculo usitatam.
? — me aut formam plane ignorare, aut valde dubitare, quo referenda sit.
0 — nomen jam rejectum vel meo judicio rejiciendum esse.

Ubi nulla nota adponitur, nomen pro synonymo cuidam in hoc opusculo commemoratæ speciei habendum est.

Biphora democratica.		Costa, Nr. 2, p. 7, Tav. II.		S. democr.-mucron., pr. sol.
— depressa.	1829	Sars, Nr. 1, p. 51, Tab. VI, Fig. 1—4.		S. runc.-fusif., pr. gr. *
— mucronata.		Costa, Nr. 2, p 3, Tav. I, Fig. 1—3.		S. democr.-mucron., pr. gr.
— tricuspidata.	1829	Sars, Nr. 1, p. 56, Tab. VI, Fig. 5—16.		S. runc.-fusif., pr. sol.
Dagyza strumosa.	1814	Banks, ifl. Home, Pl. 71.		S. costata-Tilesii, pr. sol.
Dubreullia cirrhosa.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 278, Pl. 6, Fig. 7.		S. democr.-mucron., pr. sol.
Holothuria caudata.	1758	L., Nr. 1, p. 657.		S. pinnata.
— denudata.	1758	L., Nr. 1, p. 657.	0	S. pinnata.
— thalia.	1758	L., Nr. 1, p. 657.		S. pinnata.
— zonaria.	1788-91	L., Nr. 3, p. 3142, Nr. 18.		S. cordif.-zonaria, pr. gr.
Holothurium zonarium.	1774	Pall., p. 26, Tab. 1, Fig. 17 A—C.		S. cordif.-zonaria, pr. gr.
Jasis cylindrica.	1816	Sav., p. 124, Pl. 24, Fig. 2.		S. cylindrica, pr. sol.
Pegea octophora.	1816	Sav., p. 124, Pl. 24, Fig. 1.		S. scutig.-conf., pr. gr.
Pterolyra beroides.	1830	Less., Nr. 2, p. 378.	0	Rimeligvis ingen Salpe.
Salpa affinis.	1819	Cham., p. 11, Fig. 2 A—F.	*	
— africana.	1775	Forsk., p. 116, Tab. 36, Fig. C.		S. afric.-max., pr. sol.
— africana-maxima.	1846	Krohn, p. 112—113.	*	
— amphoræformis.	1830	Less., Nr. 2, p. 270, Pl. 5, Fig. 3.	0	Doliolum sp.
— antarctica.	1832	Meyen, p. 416, Tab. 29, Fig. 1.	?	
— antheliphora.		Pér. & Les., Tab. 30, Fig. 3 a.	?	
— aspera.	1819	Cham., p. 14, Fig. 4.	?	
— bicaudata.	1826	Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 225, Pl. 8 A, Fig. 1—2.		S. scutig.-conf., pr. gr. var.

Salpa bicornis.	1819	Cham., p. 20, Fig. 8.	?	
— biensis.	1827	Blainv., p. 123.	?	S. hexagona, pr. sol.
— bigibbosa.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 505, Pl. 73, Fig. 1.		S. costata-Til, pr. sol.
— bipartita.	1804	Bory de Saint Vincent, p. 134, Pl. 6, Fig. 3.	0	Diphyes dispar.
— birostrata.	1827	Blainv. p. 119.		S. afric.-max., pr. gr.
— Caboti.	1848	Desor, p. 75.		S. democr.-mucron., pr. sol. & gr.
— caudata.	1816	Lam., p. 119. (cfr. L., Nr. 1, p. 657).		S. pinnata.
— clostra.	1828	Milne-Edw., Cuv., Nr. 3, Pl. 121, Fig. 2.		S. runcin.-fusif., pr. gr.
— coerulea.	1828	Delle Chiaje, Nr. 1 p. 60.	?	
— coerulescens.	1819	Cham., p. 22, Fig. 9.		S. cylindrica, pr. sol.
— confoederata.	1775	Forsk., p. 115, Tab. 36, Fig. A.		S. scutig.-conf., pr. gr.
— cordiformis.	1827	Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 226, Pl. 8 A, Fig. 3—6.		S. cordif.-zonaria, pr. sol.
— cordiformis-zonaria.	1846	Krohn, p. 112—113.	*	
— costata.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 504, Pl. 73, Fig. 2.		S. costata.-Til., pr. sol.
— costata-Tilesii.	1854	Vogt, Nr. 3, p. 7 (Krohn udtaler Formodning om, at de to Former høre sammen).	*	
— cristata.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 366, Pl. 68, Fig. 1—2.		S. pinnata, pr. gr.
— cyanea.	1828	Delle Chiaje, Nr. 1, p. 63; Nr. 2, p. 39, Tav. 79, Fig. 12.	?	S. pinnata, pr. sol.
— cyanogaster.		Pér. & Les., Tab. 30, Fig. 3.	?	S. democr.-mucr., pr. gr.
— cylindrica.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 381, Pl. 68, Fig. 8—9.	*	
— cymbiola.	1872	Dall, p. 159.	?	S. cylindrica.
— democratica.	1775	Forsk.. p. 113, Tab. 36, Fig. G.		S. democr.-mucron., pr. sol.
— democratica-mucronata.	1846	Krohn, p. 112—113.	*	
— dolicosoma.	1883	Todaro, Nr. 2, p. 41—43.		S. dolic.-virg., pr. sol.
— dolicosoma-virgula.	1883	Todaro, Nr. 2, p. 42.	*	
— dolium.		Quoy & Gaim., Nr. 5, p. 575, Pl. 90, Fig. 1—8.		S. scutig.-conf., pr.
— dubia.	1819	Cham., p. 18, Fig. 6.	?	
— elongata.		Quoy & Gaim (ifl. Blainv., p. 113).		S. cylindrica, pr. sol.
— emarginata.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 511, Pl. 74, Fig. 11—12.	?	
— fasciata.	1775	Forsk., p. 115, Tab. 36, Fig. B.	?	S. runc.-fusif., pr. sol.
— femoralis.		Quoy & Gaim., Nr. 5, p. 587, Pl. 88, Fig. 1—5.		S. scutig.-conf. pr. gr.
— ferruginea.	1819	Cham., p. 23, Fig. 10 A—D.		S. scutig.-conf., pr. gr.
— flagellifera.	1881	Traustedt.		S. democr.-mucron., var.
— Forskalii.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 276, Pl. 4, Fig. 1.		S. afric.-max.
— fusiformis.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 382, Pl. 68, Fig. 11.		S. runc.-fusif., pr. gr.

Salpa Garnotii.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 271, Pl. 6, Fig. 6.	?	S. cylindrica, pr. sol.
— gibba.	1802	Bosc, 2nd éd., 1827, p. 178, Pl. 20, Fig. 5.		S. scutig.-conf., pr. sol.
— gibbosa.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 508, Pl. 73, Fig. 13.		S. costata-Til., pr. sol.
— herculea.	1872	Dall, p. 158.	?	
— hexagona.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 505, Pl. 73, 3. Fig.	*	
— informis.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 510, Pl. 74, Fig. 8.	?	
— infundibuliformis.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 508, Pl. 73, Fig. 13.		S. costata-Til., pr. gr.
— lævis.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 273, Pl. 6, Fig. 3.	?	S. scutig.-conf., pr. gr.
— lineata.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 268, Pl. 6, Fig. 5.	?	S. hexagona, pr. gr.
— lingulata.	1810	Blumenb., Nr. 30 (Thalia lingulata).		S. democr.-mucron., pr. gr.
— longicauda.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 507, Pl. 73, Fig. 8.		S. democr.-mucron, pr. sol.
— maxima.	1775	Forsk., p. 112, Tab. 35, Fig. A (A 1 excl.) etc.		S. afric.-max., pr. gr.
— microstoma.	1827	Quoy & Gaim., Nr. 4, p. 226, Pl. 8 A, Fig. 7—9.		S. cordif.-zonaria, pr. gr.
— moniliformis.	?	Mc Culloch, p. 187.		S. runc.-fusif., pr. sol.
— mucronata.	1775	Forsk, p. 114, Tab. 36, Fig. D.		S. democr.-mucron., pr. gr.
— neapolitana.	1841	Delle Chiaje, Nr. 2, p. 40, Tav. 76, Fig. 1.	?	S. costata.-Til., pr. gr.
— nephodea.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 275, Pl. 5, Fig. 1.		S. scutig.-conf., pr. gr.
— octophora.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 379, Pl. 68, Fig. 7.		S. scutig.-conf., pr. gr.
— pelasgica.	1802	Bosc, Nr. 1, p. 181, Tab. 20, Fig. 4.	?	S. pinnata, pr. sol.
— pinnata.	1775	Forsk., p. 113, Tab. 35, Fig. B.	*	
— polycratica.	1775	Forsk., p. 116, Tab. 36, Fig. F.		S. cordif.-zonaria, pr. gr.
— polymorpha.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 512, Pl. 73, Fig. 3—4.	?	Rimeligvis ingen Salpe.
— proboscidalis.	1830	Lesson, Nr. 1, p. 95, Pl. 33, Fig. 2.		S. pinnata, pr. gr.
— punctata.	1775	Forsk., p. 114, Tab. 35, Fig. C.	?	
— pyramidalis.	1826-34	Quoy & Gaim., Nr. 5, p. 593, Tab. 89, Fig. 15—18.	?	S. democr.-mucr.
— pyramidalis.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 271, Pl. 6, Fig. 2.	?	
— quadrangularis.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 268, Pl. 6, Fig. 2.	?	S. cordif.-zonaria, pr. sol.
— rhomboïdes.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 510, Pl. 74, Fig. 3—4.	?	
— rubrolineata.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 272, Pl. 5, Fig. 5.	?	
— runcinata.	1819	Cham., p. 16, Fig. 5 A—J.		S. runc.-fusif.. pr. sol.
— runcinata-fusiformis.	1846	Krohn, p. 112—113.	*	
— scutigera.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 377, Pl. 68, Fig. 4—5.		S. scutig.-conf., pr. sol.
— scutigera-confoederata.	1854	Vogt, Nr. 3, p. 6.	*	

Salpa sipho.	1775	Forsk., p. 115, Tab. 43, Fig. C.	0	Clavellina sp.
— socia.	1802	Bosc, Nr. 1, p. 180, Pl. 20, Fig. 1—3.		S. scutig.-conf., pr. gr.
— solitaria.	1775	Forsk., p. 116, Tab. 41, Fig. E.	0	Hører til Asc. simplices.
— spinosa.	1823	Otto, p. 303, Tab. 42, Fig. 1 a—d.		S. democr.-mucron., pr. sol.
— suborbicularis.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 509, Pl. 74, Fig. 5—7.	0	
— thalia.	1816	Lam., p. 119 (cfr. L, Nr. 1 p. 657).		S. pinnata.
— Tilesii.	1804	Cuvier, Nr. 1, p. 375, Pl. 68, Fig. 3 og 6.		S. costata.-Til., pr. gr.
— triangularis.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 511, Pl. 74, Fig. 9—10.	?	S. hexagona, pr. gr.
— tricuspida.	1830	Lesson, Nr. 2, p. 272.	?	
— tricuspidata.	1824	Quoy & Gaim., Nr. 1, p. 503, Pl. 73, Fig. 6.	?	
— unicuspidata.	1827	Quoy & Gaim., ifl. Blainv., p. 116.		S. cordif.-zonaria, pr. sol.
— vaginata.	1819	Cham., p. 19, Fig. 7 A—G.	?	
— virgula.	1854	Vogt, Nr. 3, p. 11, Tab. 5, Fig. 12—13.		S. dolicosoma-virgula, pr. gr.
— vivipara.		Pér. & Les., Tab. 30, Fig. 3.		S. scutig.-conf., pr. sol.
— zonaria.	1774	Pallas, p. 26, Tab. 1, Fig. 17 A—C.		S. cordif.-zonaria, pr. gr.
Thalia, Nr. 1—3.	1756	Browne, p. 384, Tab. 43, Fig. 3—4.		S. pinnata.
— lingulata.	1810	Blumenb., Nr. 30.		S. democr.-mucr., pr. gr.
Thetys vagina.	1802	Tilesius, p. 150, Taf. 5—6.		S. costata-Til., pr.

Tavleforklaring.

a. Mundaabning.
b. Kloakaabning.
c. Blindtarm.
d. Fimrebuer.
e. Bugfure (Endostyl).
f. Fimreorgan.
g. Nerveknude.
h. Placenta.
i. Eleoblast (Fedtkugle).
k. Testikel.
l. Linieformigt Organ.
m. Svælg.
n. Fosterkjede.
o. Overlæbe.
p. Finneformigt Vedhæng.
q Hjærte.
r. Gjællerør.
s. Foster.
t Tarm.
u. Underlæbe.
v Anus.
x. Nucleus.
y. Basis af de Traade, hvormed Kjedesalper have været fæstede til deres Naboer i Kjeden.

Forklaringen af Bogstaverne, der ere vedføjede Fig. 42—47, findes under Forklaringen til Fig. 42.

Tavle I.

Fig. 1. *Salpa pinnata*, Forsk., en Kjedesalpe, set fra venstre Side. Det finneformige Vedhæng (*p*) til Forbindelse med de øvrige Medlemmer af Kjeden, den neden under Bugfuren (*e*) og Testiklen (*k*) liggende, udstrakte Tarmkanal (*t*) med Anus (*v*) helt fortil og desuden det linieformige Organ (*l*) gjør denne Form let kjendelig fra alle andre Salper. Individet er fremstillet med et lille Foster (*s*), der skinner igjennem fra Indrefladen af Kloakrummets høire Side.

— 2. Samme Art, en anden Kjedesalpe, set fra høire Side; Musklerne ere udeladte. Tarmkanal, Testikel, Bugfure og Fimrebuer ere tydeligere end paa foregaaende Figur; Fosteret (*s*) er paa et mere fremrykket Stadium. Tildels Kopi efter C. Vogt.

— 3. Samme Art, en enlig Salpe, ungt Individ set ovenfra.

— 4. Samme Individ, set fra venstre Side. De 5 linieformige Organer (*l*) foroven paa hver Side er det mest karakteristiske ved denne Form. Ligesom hos den enlige Salpe af *S. affinis* (Fig. 7 og 8) og *S. dolicosoma-virgula* (af hvilken der ikke existerer nogen Tegning) er Tarmkanalen lagt op langs Gjællerørets Rygside. Individet bærer endnu Fostermærkerne (*h* og *i*). Fosterkjeden (*n*) er endnu kun særdeles lille.

— 5. Samme Art, et voxent Exemplar af den enlige Salpe set fra høire Side. Kroppens Muskler ere udeladte paa denne Figur. Fosterkjeden er her tydelig, og Individet er i Færd med at føde en Kjede, hvis Medlemmer strax have grupperet sig i en Kreds. Tildels Kopi efter Vogt.

— 6. *Salpa affinis*, Cham., en Kjedesalpe set fra venstre Side. Den bøileformigt sammenkrummede Tarmkanal (*t*), som ligger i en stor, pukkelformig Udvæxt fra den bageste Del af Bugsiden, Mangelen af linieformige Organer og Kropmusklernes Konstellationer gjør den let kjendelig fra Kjedesalpen af *Salpa pinnata*, med hvilken den ellers i saa mange Forhold stemmer overens.

Fig. 7. Samme Art, en enlig Salpe set fra Ryggen. Ligesom hos Kjedesalpen mangle ogsaa her de for *Salpa pinnata* saa karakteristiske linieformige Organer.

— 8. Samme Individ set fra venstre Side. Som paa Fig. 4 af *Salpa pinnata* ses ogsaa her Fostermærkerne (*h* og *i*). Fosterkjeden er ligeledes paa dette unge Exemplar endnu kun svagt udviklet. Iøvrigt forholder Fosterkjeden sig ganske som hos *Salpa pinnata* i Henseende til Stilling og den gradvise Udvikling af Kjedesalperne, uden Spring i Udviklingen.

— 9. *Salpa dolicosoma-virgula*, Todaro-Vogt, en Kjedesalpe set fra høire Side. Det finneformige Vedhæng (*p*) har den tilfælles med Kjedesalperne af de to foregaaende Arter; med Hensyn paa Tarmkanalens (*t*) Leiringsforhold mindes man om *Salpa affinis*. Den skraat opad rettede, lange, stærkt tilspidsede, kegleformige Forlængelse af Kroppens Bagende, i hvilken Testiklen (*k*) har sit Leie og den rygstillede Kloakaabning (*b*) er særdeles karakteriske Kjendetegn for denne Form. Kopi efter Vogt.

— 10. *Salpa costata-Tilesii*, Quoy & Gaim. — Cuv., et Medlem af en Fosterkjede, udskaaret af en enlig Salpe, set fra Ryggen. De 5 Kropmuskler ses meget tydeligt.

— 11. Samme Individ set fra høire Side. Eleoblasten (*) ligger i en stor pukkelformig Udvæxt fra den bageste Del af Bugen lige under Tarmkanalen. Eiendommeligt for Fosteret er den særdeles stærkt fremspringende Overlæbe (*o*), det svære Gjællerør (*r*) og de forholdvis store Torne, der ses spredte omkring paa Kappens Overflade, og som i Reglen tabe sig paa det voxne Exemplar (smlgn. Fig. 40—41).

— 12. *Salpa democratica-mucronata*, Forsk. var. *flagellifera*, en enlig Salpe set fra Ryggen. De 6 næsten parallelt liggende Kropmuskler og Udstyrelsen med kun et langt, pidskeformigt Vedhæng paa hver Side af Kloakaabningen gjør den let kjendelig fra Hovedtypen (Fig. 25—26).

— 13. Et andet enligt Salpeindivid af samme Art set fra høire Side. Fra Fimreorganets (*f*) Basis rager som hos Hovedtypen en særdeles tydelig, svagt S-formigt krummet, ubevægelig, tentakelagtig Proces (*) ned i Mundhulen.

— 14. *Salpa hexagona*, Quoy & Gaim., en enlig Salpe set fra Ryggen. Denne Form skjelnes med stor Lethed fra alle andre Salper ved sin eiendommelige Muskulatur og sine talrige Længdelister paa Kappens Overflade. Nerveknuden (*g*) ligger længere tilbage end hos nogen anden mig bekjendt Salpe.

— 15. Kappen af et andet Individ af samme Art set fra Ryggen, til Oplysning om de karakteristiske Længdelister. α og α' tilhøre udelukkende Rygsiden, medens β og β' er den øverste Liste paa hver Side.

— 16. Samme Kappe set nedenfra, lidt fra høire; længst borte skimtes Listen β, midt paa Siden ses Listerne γ og δ, paa hver Side af Bugen ε og ε' og midt paa samme den eneste uparrede Liste ζ, ialt 11 Længdelister.

— 17. Samme Art, en Kjedesalpe, opklippet langs venstre Side og udbredt. Af de brede Kropmuskler konvergere 2den, 3die, 4de og 5te midt paa Ryggen. De 4 Fostre (*s*, *s'*, *s''* og *s'''*) ligge under 6te Kropmuskel.

— 18. *Salpa cordiformis-zonaria*, Quoy & Gaim. — Pall., en enlig Salpe set fra Ryggen.

— 19. Samme Individ set fra Bugen. Fosterkjeden (*n*) er endnu kun lille. Denne Form er let kjendelig ved sine 6 særdeles brede, parallele, saavel paa Ryg som paa Bug afbrudte Kropmuskler og sin spidst tilløbende, kegleformige Bagende.

— 20. Bagenden af et stort, gammelt Individ for at vise den fuldt udviklede Fosterkjede. Kopi efter Eschricht.

— 21. En Kjedesalpe af samme Art set fra Ryggen. Kropmusklerne ere til Stede i samme Antal — 6 — som hos den enlige Salpe; de ere brede, parallele, alle afbrudte paa Bugsiden, de 2 forreste tillige paa Rygsiden. Som hos *S. hexagona* (Fig. 17) findes her flere Fosteranlæg (*s*, *s'*, *s''* og *s'''*) imellem 5te og 6te Kropmuskel paa høire Side af Kloakrummet.

— 22. *Salpa cylindrica*, Cuv., et Medlem af en Fosterkjede, udskaaret af en enlig Salpe. Skjønt Exemplaret endnu ikke er bleven tenformigt (smlgn. Fig. 37), vil det dog let kunne skjælnes fra andre Salper paa Grund af den eiendommelige Muskelkonstellation.

Tavle II.

Fig. 23. *Salpa scutigera-confoederata*, Cuv. — Forsk., et ungt Exemplar af en enlig Salpe, set fra høire Side. Ligesom hos Kjedesalpen (Fig. 24) dannes af de 4 Kropmuskler to skjæve Kors paa Ryggen. De endestillede Aabninger og den kun lidt bag Bugens Midte liggende Tarmkanal gjør denne Form let kjendelig fra Kjedesalpen, selv om Fosterkjeden (*n*) som i dette Tilfælde endnu kun er svagt udviklet.

— 24. En Kjedesalpe af samme Art; hos denne er Kloakaabningen (*b*) rygstillet og Tarmkanalen (*x*) rykket helt bag ud. Fosteret (*s*) er i dette Tilfælde kun ganske lille.

— 25. *Salpa democratica-mucronata*, Forsk., en enlig Salpe set fra Rygsiden.

— 26. Samme Individ set fra Bugsiden. Denne Form lader sig paa Grund af sine Muskelkonstellationer og sine 7—8 Vedhæng omkring Kloakaabningen vanskelig forvexle med nogen anden Salpe. Ligesom Kjedesalpen er dennes Fimreorgan ved sin Basis udstyret med en ubevægelig, svagt S-formigt krummet tentakelagtig Proces, som imidlertid ikke ses paa disse to Figurer, men som er fremstillet paa Fig. 27 (*) af den herhen hørende Kjedesalpe og ligeledes maaske endnu tydeligere ses paa Fig. 13 (*), der gjengiver Varieteten *flagellifera*.

— 27. En Kjedesalpe af samme Art, set fra venstre Side.

— 28. Samme Individ set fra Rygsiden. Karakteristisk og let iøinefaldende ere de 4 Kropmuskler og deres særegne Konstellation. Fosteret (*s*) er hos dette Individ endnu kun lille.

— 29. *Salpa runcinata-fusiformis*, Cham. — Cuv., en enlig Salpe set fra Ryggen.

— 30. Samme Individ set fra Bugen. Af gode og sikre Kjendetegn for denne Form kan fremhæves de 9 Kropmuskler, af hvilke de tre forreste og de to bageste henholdsvis konvergere paa Midten af Ryggen, de stumpe Torne omkring den endestillede Kloakaabning og Fosterkjedens (*n*) eiendommelige Forløb.

— 31. En Kjedesalpe af samme Art set fra Ryggen. De 6 Kropmuskler ere grupperede som hos Kjedesalpen af *Salpa africana-maxima*, Forsk. (smlgn. Fig. 34), men medens 4de og 5te Kropmuskel hos *S. runcinata-fusiformis* konvergere paa hver Side af Ryggen, staa de samme Muskler langt fjærnede fra hinanden hos *S. africana-maxima*[1]).

— 32. *Salpa africana-maxima*, Forsk., et ungt Individ af den enlige Form, set fra den venstre Side; det bærer endnu Fostermærkerne, og dets Fosterkjede (*n*) er endnu kun svagt udviklet.

— 33. Samme Individ set fra Ryggen. De 9 smalle, oftest parallele Kropmuskler, Fosterkjedens Leiringsforhold og det særegent byggede Fimreorgan (smlgn. Fig. 45) gjør denne Form let kjendelig.

— 34. En Kjedesalpe af samme Art set fra Ryggen. Smlgn. Forklaringen til Fig. 31.

— 35. *Salpa cylindrica*, Cuv., en enlig Salpe set fra Ryggen.

— 36. Samme Individ set fra Bugen. Ligesom hos de enlige Former af *S. runcinata-fusiformis* og *S. africana-maxima* findes her 9 smalle Kropmuskler, men de 4 forreste hos nærværende *S. cylindrica* konvergere midt paa Ryggen, et Forhold man ikke finder hos de to andre. Endelig er Fosterkjedens (*n*) Leie og lige fremad rettede Forløb særegent for *S. cylindrica*.

— 37. En Kjedesalpe af samme Art set fra Ryggen. Medens Kjedesalperne af *S. runcinata-fusiformis* og *S. africana-maxima* have 6 Kropmuskler, forefindes her kun 5, samlede i to Grupper, der begge konvergere midt paa Ryggen. Den forskjellige Længde af de kegleformige Udvæxter fra Kappen i begge Ender af Kroppen, som findes hos Kjedesalperne af *S. cordiformis-zonaria*, *S. runcinata-fusiformis*, *S. africana-maxima* og *S. cylindrica* have ingen eller kun liden Betydning i systematisk Henseende.

— 38. *Salpa costata-Tilesii*, Quoy & Gaim. — Cuv., en enlig Salpe set fra Ryggen.

— 39. Samme Individ set fra Bugen. Foruden de to hornformigt krummede, fladtrykte Udvæxter, en paa hver Side af Kloakaabningen, afgive de særdeles talrige Kropmuskler (ca. 20) gode Kjendemærker. Denne Form minder i Henseende til Fimreorganet (*f*) om den enlige Salpe af *S. africana-maxima*, medens Fosterkjeden (*n*) omtrent har samme Form og Stilling som hos *S. runcinata-fusiformis*.

---

[1]) En Sammenligning mellem Figurerne paa den ene Side af Kjedesalperne af *S. africana-maxima*, *S. runcinata-fusiformis* og *S. cylindrica* og paa den anden Side af de samme tre Arters enlige Salper vil — forekommer det mig — let overbevise en om, at de staa i et nært Slægtskabsforhold til hinanden.

Fig. 40. En Kjedesalpe af samme Art set fra Ryggen.
— 41. Samme Individ set fra højre Side. De endestillede Aabninger, de 5 kun paa Ryggen udviklede, smalle Kropmuskler og deres indbyrdes Konstellationer og de tre Fosteranlæg (*s*) gjør denne Salpeform let kjendelig.
— 42. Skematisk Fremstilling af Fimreorganet af *Salpa runcinata-fusiformis*, den enlige Form, set fra venstre Side. *o*, Aabningen, som fører ind til Fimreorganets Hulhed; *f*, Hulhedens faste Bund; *g*, Nerveknuden med paasiddende Sanseorgan.
— 43. Det samme af *Salpa cylindrica*, den enlige Form.
— 44. Det samme af *Salpa africana-maxima*, Kjedesalpen.
— 45. Det samme af samme Art, den enlige Form.
— 46. Det samme af *Salpa scutigera-confoederata*, Kjedesalpen.
— 47. Det samme af *Salpa costata-Tilesii*, Kjedesalpen, af et Foster paa samme Trin som det ved Fig. 10 og 11 afbildede Individ.

Explication des Planches.

a. Orifice oral.
b. Orifice cloacal.
c. Cœcum.
d. Bandes ciliées.
e Endostyle.
f. Organe vibratile.
g. Ganglion nerveux.
h. Placenta.
i. Oléoblaste.
k. Testicule.
l. Organe liniaire.
m. Pharynx.
n. Chaîne d'embryons.
o. Lèvre supérieure.
p. Appendice pinniforme.
q. Cœur.
r. Tube branchial.
s. Embryon.
t. Canal intestinal.
u. Lèvre inférieure.
v. Anus.
x. Nucléus.
y. Base des fils par lesquels les salpes agrégés étaient liés entre eux dans la chaîne.

L'explication des lettres des Fig. 42—47 se trouve dans celle de la Fig. 42.

Planche I.

Fig. 1. *Salpa pinnata* Forsk. Salpe agrégé, vu du côté gauche. L'appendice pinniforme (*p*) servant à l'unir aux autres membres de la chaîne, le canal intestinal (*t*), qui s'étend avec l'anus (*v*) tout en avant sous l'endostyle (*e*) et le testicule (*k*), et en outre l'organe liniaire (*l*) distinguent facilement cette forme de tous les autres salpes. L'individu est représenté avec un petit embryon (*s*) qui luit à travers la face interne du côté droit de la cavité cloacale.

— 2. Même espèce, autre salpe agrégé, vu du côté droit; les muscles ne sont pas indiqués. Le canal intestinal, le testicule, l'endostyle et les bandes ciliées sont plus distincts que dans la figure précédente; l'embryon (*s*) est plus développé. En partie copiée d'après C. Vogt.

— 3. Même espèce, salpe solitaire; jeune individu vu d'en haut.

— 4. Même individu, vu du côté gauche. Les 5 organes liniaires (*l*) en haut de chaque côté sont ce que cette forme a de plus caractéristique. De même que chez le salpe solitaire du *S. affinis* (Fig. 7 et 8) et du *S. dolicosoma-virgula* (dont il n'existe aucun dessin), le canal intestinal est placé le long du côté dorsal du tube branchial. L'individu porte encore les marques de l'embryon (*h* et *i*). La chaîne des embryons (*n*) est encore très petite.

— 5. Même espèce, exemplaire adulte du salpe solitaire vu du côté droit. Les muscles du tronc ne sont pas indiqués dans cette figure. La chaîne des embryons est distincte, et l'individu est en train de produire une chaîne dont les membres se sont tout de suite groupés en cercle. En partie copiée d'après C. Vogt.

— 6. *Salpa affinis*, Cham. Salpe agrégé, vu du côté gauche. Le canal intestinal (*t*) recourbé sur lui-même, qui est placé dans une grande excroissance gibbeuse de la partie postérieure du côté ventral, le manque d'organes liniaires et les figures formées par les muscles du tronc le distinguent facilement du salpe agrégé du *Salpa pinnata*, auquel il ressemble d'ailleurs sous tant de rapports.

Fig. 7. Même espèce, salpe solitaire, vu du dos De même que chez le salpe agrégé, les organes liniaires si caractéristiques du *Salpa pinnata* manquent également ici.

— 8. Même individu, vu du côté gauche. Comme sur la Fig. 4 du *Salpa pinnata*, on voit aussi ici les marques de l'embryon (*h* et *i*). La chaîne des embryons n'est également encore que peu développée chez ce jeune exemplaire. Elle se comporte du reste absolument comme chez le *Salpa pinnata* sous le rapport de la situation et du développement graduel, sans saut aucun, des salpes agrégés.

— 9. *Salpa dolicosoma-virgula*, Todaro-Vogt. Salpe agrégé, vu du côté droit. L'appendice pinniforme lui est commun avec les salpes agrégés des deux espèces précédentes, et la manière dont est placé le canal intestinal (*t*) rappelle le *Salpa affinis*. Le long prolongement conique très effilé et dirigé obliquement vers le haut de l'extrémité postérieure du corps, où le testicule (*k*) est logé, et la situation de l'orifice cloacal (*b*) sur le dos, sont les signes caractéristiques de cette forme. Copiée d'après C. Vogt.

— 10. *Salpa costata-Tilesii*, Quoy & Gaim. — Cuv. Membre d'une chaîne d'embryons, détachée d'un salpe solitaire, vu du dos. Les 5 muscles du tronc sont très distincts.

— 11. Même individu, vu du côté droit. L'oléoblaste (*) se trouve dans une grande excroissance gibbeuse de la partie postérieure du ventre, juste sous le canal intestinal. Caractéristiques de l'embryon sont la saillie prononcée de la lèvre supérieure (*o*), la grosseur du tube branchial (*r*), les épines relativement grandes qui sont disséminées sur la surface de la tunique et disparaissent en général chez l'adulte (comp. Fig. 40—41) et l'oléoblaste

— 12. *Salpa democratica-mucronata*, Forsk. var. *flagellifera*. Salpe solitaire, vu du dos. Les 6 muscles presque parallèles du tronc et le long appendice flagelliforme dont il est seulement muni de chaque côté de l'orifice cloacal le distinguent facilement du type principal (Fig. 25—26).

— 13. Autre salpe solitaire de la même espèce, vu du côté droit. De la base de l'organe vibratile (*f*) descend dans la cavité orale, comme chez le type principal, un prolongement (*) tentaculiforme fixe, faiblement recourbé en S et très distinct.

— 14. *Salpa hexagona*, Quoy & Gaim. Salpe solitaire, vu du dos. Cette forme se distingue facilement de tous les autres salpes par sa musculature particulière et les nombreuses lames longitudinales de la surface de la tunique. Le ganglion nerveux (*g*) est placé plus en arrière que chez tout autre salpe à moi connu.

— 15. Tunique d'un autre individu de la même espèce, pour montrer plus clairement les lames longitudinales caractéristiques ci-dessus mentionnées. α et α' appartiennent exclusivement au côté dorsal, tandis que β et β' sont la lame supérieure de chaque côté.

— 16. Même tunique, vue d'en bas un peu du côté droit; au plus loin, on entrevoit β, au milieu sur le côté apparaissent γ et δ, de chaque côté du ventre, ε et ε', et à son milieu la seule lame impaire ζ, en tout 11 lames longitudinales.

— 17. Même espèce, salpe agrégé ouvert sur le côté gauche et étalé. Des larges muscles du tronc, les 2e, 3e, 4e et 5e convergent au milieu du dos. Les 4 embryons (*s*, *s'*, *s''* et *s'''*) sont sous le 6e muscle.

— 18. *Salpa cordiformis-zonaria*, Quoy & Gaim. — Pall. Salpe solitaire, vu du dos.

— 19. Même individu, vu du ventre. La chaîne des embryons (*n*) est encore petite. Cette forme se reconnaît facilement à ses 6 muscles du tronc, larges, parallèles et interrompus tant sur le dos que sur le ventre, et à son extrémité postérieure conique et terminée en pointe.

— 20. Extrémité postérieure d'un grand individu âgé, pour montrer la chaîne des embryons complètement développée. Copiée d'après Eschricht.

— 21. Salpe de chaîne de la même espèce, vu du dos. Les muscles du tronc sont au nombre de 6 comme chez le salpe solitaire; ils sont larges, parallèles, interrompus tous sur le côté ventral, et les 2 antérieurs en même temps sur le côté dorsal. De même que chez le *S. hexagona* (Fig. 17), on trouve chez cette espèce plusieurs embryons (*s*, *s'*, *s''* et *s'''*) entre le 5e et le 6e muscle, à droite de la cavité cloacale.

— 22. *Salpa cylindrica*, Cuv. Membre d'une chaîne d'embryons, détaché d'un salpe solitaire. Bien que l'exemplaire ne soit pas encore devenu fusiforme (v. Fig. 37), on le distinguera cependant facilement des autres salpes à cause de sa musculature particulière.

Planche II.

Fig. 23. *Salpa scutigera-confoederata*, Cuv. — Forsk. Jeune exemplaire d'un salpe solitaire, vu du côté droit. De même que chez le salpe agrégé (Fig. 24), les 4 muscles du tronc forment sur le dos deux croix obliques. Les orifices terminaux et le canal intestinal, placé seulement un peu en arrière du milieu du ventre, distinguent facilement cette forme du salpe agrégé, même si la chaîne des embryons (*n*) n'est, comme ici, que peu développée.

— 24. Salpe agrégé de la même espèce; l'orifice cloacal (*b*) est placé sur le dos, et le canal intestinal (*x*), rejeté tout en arrière. L'embryon (*s*) est ici tout petit.

— 25. *Salpa democratica mucronata*, Forsk. Salpe solitaire, vu du côté dorsal.

— 26. Même individu, vu du côté ventral. En raison de sa musculature et de ses 7—8 appendices autour de l'orifice cloacal, cette forme se laisse difficilement confondre avec tout autre salpe. Son organe vibratile, comme celui du salpe agrégé, est muni à la base d'un prolongement tentaculiforme fixe, faiblement recourbé en S, qui n'est pas indiqué sur ces deux figures, mais est représenté sur la Fig. 27 (*) et se voit peut-être encore plus clairement sur la Fig. 13 (*), qui reproduit la variété *flagellifera*.

— 27. Salpe agrégé de la même espèce, vu du côté gauche.

— 28. Même individu, vu du côté dorsal. Caractéristiques et sautant facilement aux yeux sont les 4 muscles du tronc et leurs figures. L'embryon (*s*) est encore petit.

— 29. *Salpa runcinata-fusiformis*, Cham. — Cuv. Salpe solitaire, vu du dos.

— 30. Même individu, vu du ventre. Comme bons et sûrs caractères de cette forme, on peut mentionner les 9 muscles du tronc, dont les trois antérieurs et les deux postérieurs convergent respectivement au milieu du dos, les épines émoussées qui entourent l'orifice cloacal terminal et la direction particulière que prend la chaîne des embryons (*n*).

— 31. Salpe agrégé de la même espèce, vu du dos. Les 6 muscles du tronc sont groupés comme chez le salpe agrégé du *Salpa africana-maxima*, Forsk. (comp. Fig. 34); mais, tandis que le 4e et le 5e muscle du tronc, chez le *S runcinata-fusiformis* convergent sur chaque côté du dos, les mêmes muscles sont bien éloignés l'un de l'autre chez le *S. africana-maxima*[1]).

— 32. *Salpa africana-maxima*, Forsk. Jeune individu de la forme solitaire, vu du côté gauche; il porte encore les marques de l'embryon, et la chaîne des embryons (*n*) n'est que peu développée.

— 33. Même individu, vu du dos. Les 9 muscles étroits du tronc, ordinairement parallèles, la situation de la chaîne des embryons et la structure particulière de l'organe vibratile (comp. Fig. 45) rendent cette forme facile à reconnaître.

— 34. Salpe agrégé de la même espèce, vu du dos. Comp. l'explication de la Fig. 31.

— 35. *Salpa cylindrica*, Cuv. Salpe solitaire, vu du dos.

— 36. Même individu, vu du ventre. De même que chez les formes solitaires du *S. runcinata-fusiformis* et du *S. africana-maxima*, on trouve ici 9 muscles étroits du tronc, mais les 4 antérieurs, chez le *S. cylindrica*, convergent au milieu du dos, ce qui n'est pas le cas chez les deux autres. Enfin, la place occupée par la chaîne des embryons (*n*) et sa direction droit en avant sont particulières au *S. cylindrica*.

— 37. Salpe agrégé de la même espèce, vu du dos. Tandis que les salpes agrégés du *S. runcinata-fusiformis* et du *S. africana-maxima* ont 6 muscles du tronc, il y en a ici seulement 5 formant deux groupes qui convergent tous deux au milieu du dos. La longueur différente des excroissances coniques de la tunique aux deux extrémités du corps, différence qu'on observe chez les salpes agrégés des *S. cordiformis-zonaria*, *runcinata-fusiformis*, *africana-maxima* et *cylindrica*, n'a aucune ou presque aucune importance au point de vue systématique.

— 38. *Salpa costata-Tilesii*, Quoy & Gaim. — Cuv. Salpe solitaire, vu du dos.

---

[1]) En comparant les figures des salpes agrégés du *S. runcinata-fusiformis* et du *S. cylindrica*, d'une part, et celles des salpes solitaires des mêmes trois espèces, d'autre part, on se convaincra, je crois, facilement qu'ils sont très voisins les uns des autres.

Fig. 39. Même individu, vu du ventre. Outre les deux excroissances cornées, déprimées et recourbées, dont une de chaque côté de l'orifice cloacal, les nombreux muscles du tronc (20 env.) fournissent de bons caractères. Sous le rapport de l'organe vibratile (*f*) cette forme rappelle le salpe solitaire du *S. africana-maxima*, tandis que la chaîne des embryons (*n*) a à peu près la même forme et la même position que chez le *S. runcinata-fusiformis*.

— 40. Salpe agrégé de la même espèce, vu du dos.

— 41. Même individu, vu du côté droit. Les orifices terminaux, les 5 muscles étroits du tronc seulement développés sur le dos et leurs figures mutuelles, et les trois embryons (*s*) rendent cette forme facile à reconnaître.

— 42. Représentation schématique de l'organe vibratile de la forme solitaire du *S. runcinata-fusiformis*, vu du côté gauche; *o*, orifice qui conduit dans la cavité de l'organe vibratil; *f*, fond fixe de la cavité; *g*, ganglion nerveux avec son organe des sens.

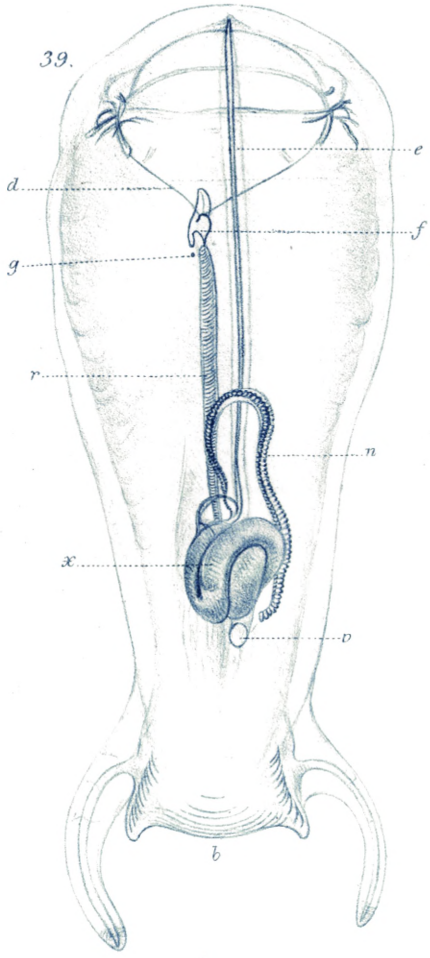
— 43. Même représentation du *S. cylindrica*, forme solitaire.

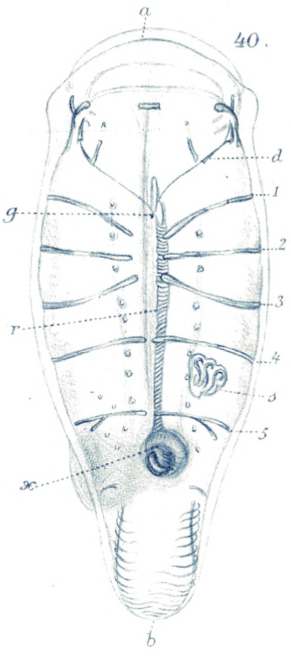
— 44. Même représentation du *S. africana-maxima*, salpe agrégé.

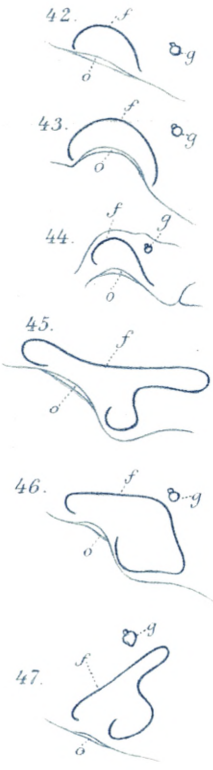
— 45. Même représentation de la même espèce, forme solitaire.

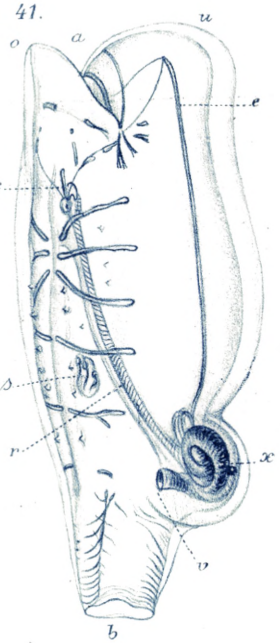
— 46. Même représentation du *S. scutigera-confoederata*, salpe agrégé.

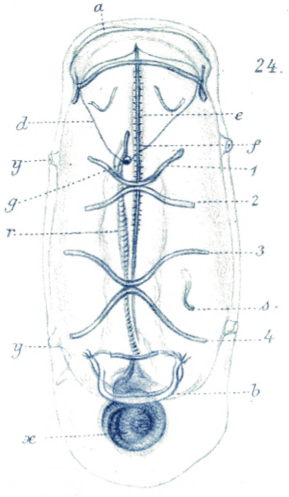
— 47. Même représentation d'un embryon du *S. costata-Tilesii*, au même degré de développement que l'individu reproduit Fig. 10 et 11.

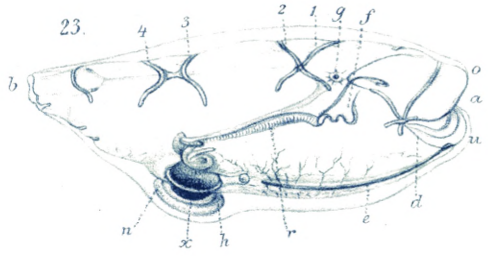


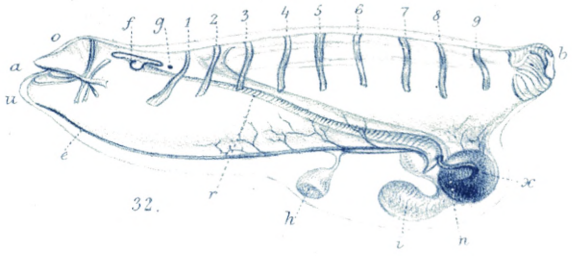


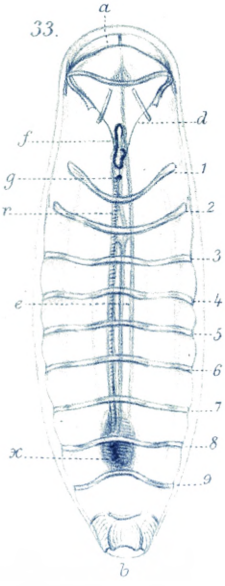




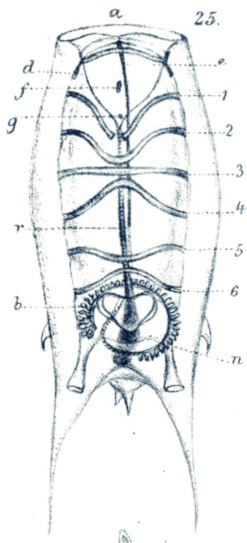


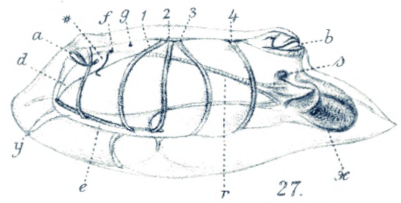


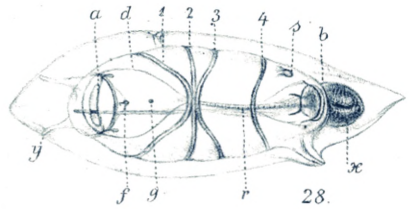


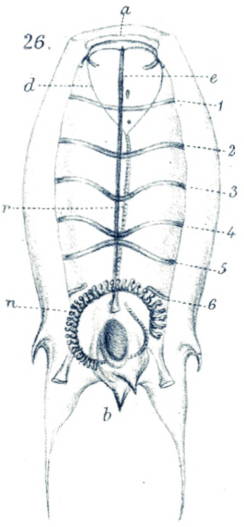


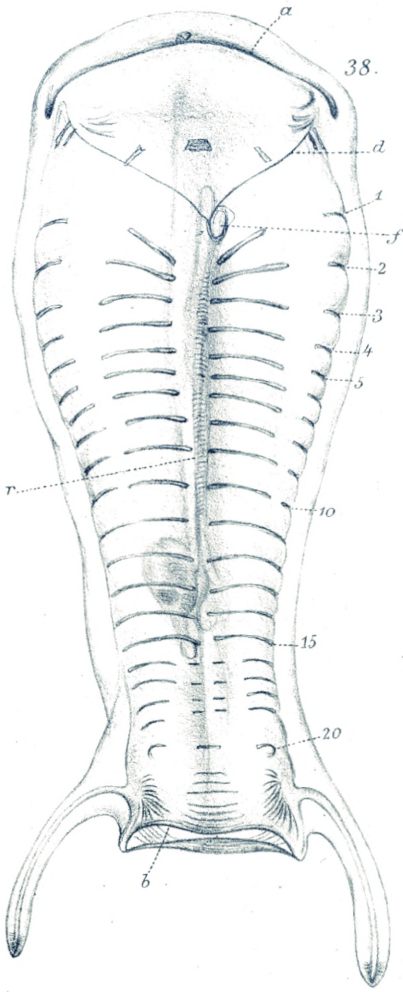
Trykt hos J.W. Tegner & Kittendorff.

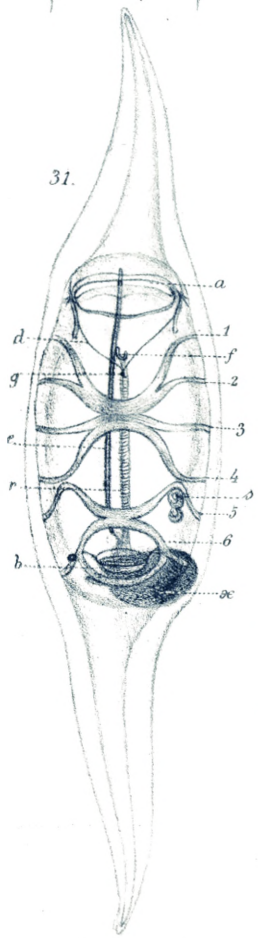


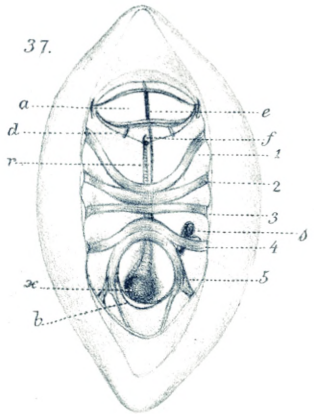


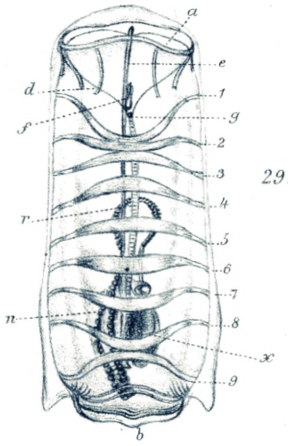


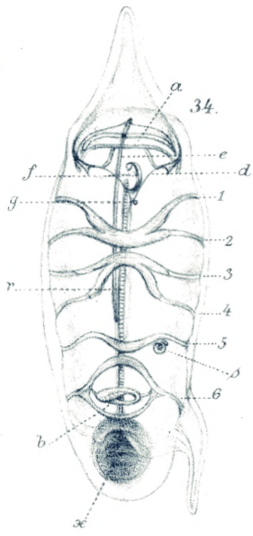


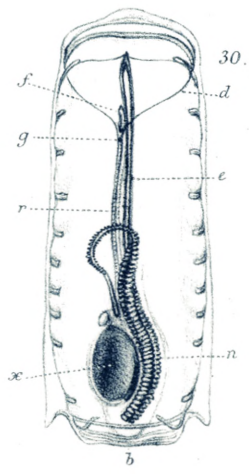


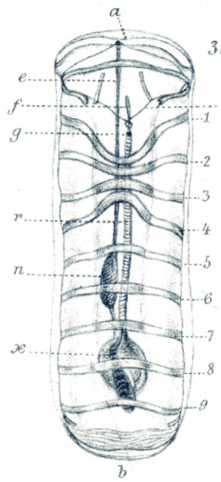


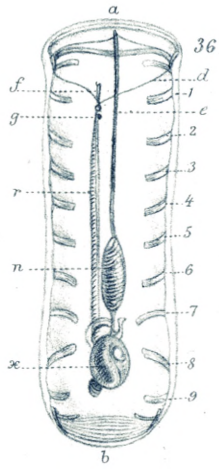




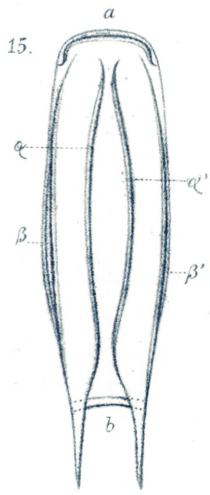


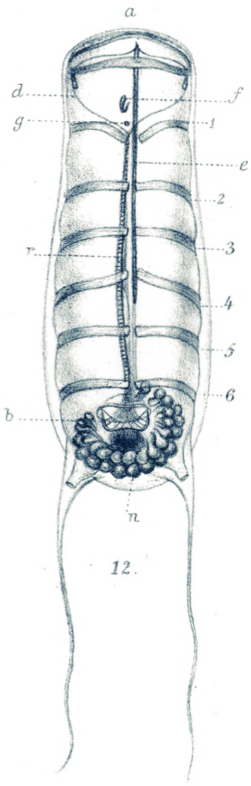




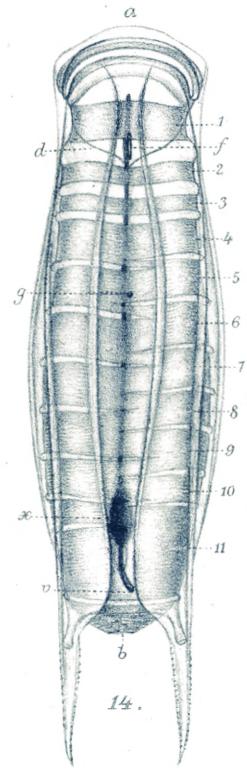


C.Cordts del & lith.

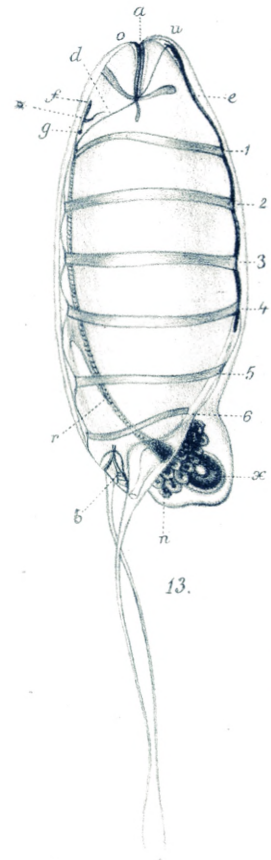




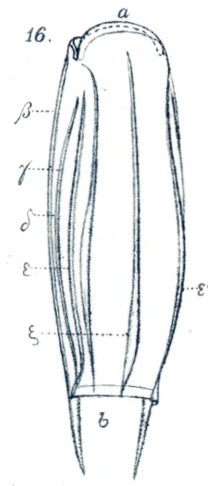
12.

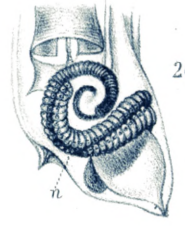


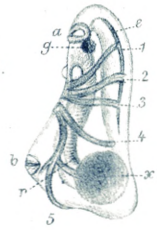
14.

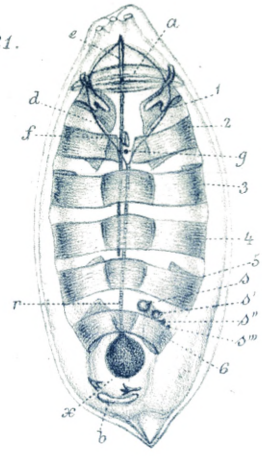


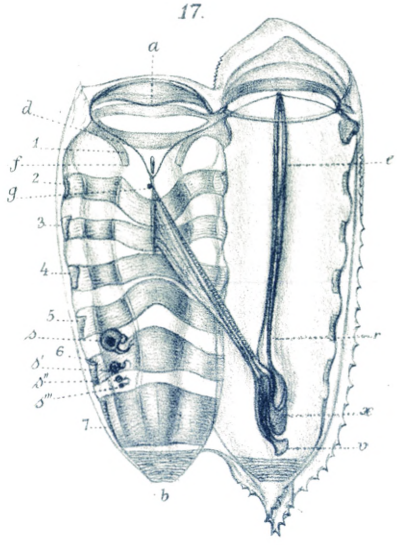
13.

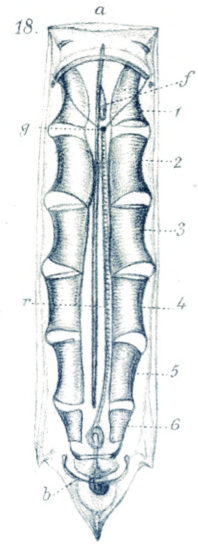


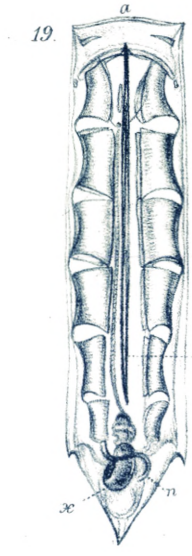




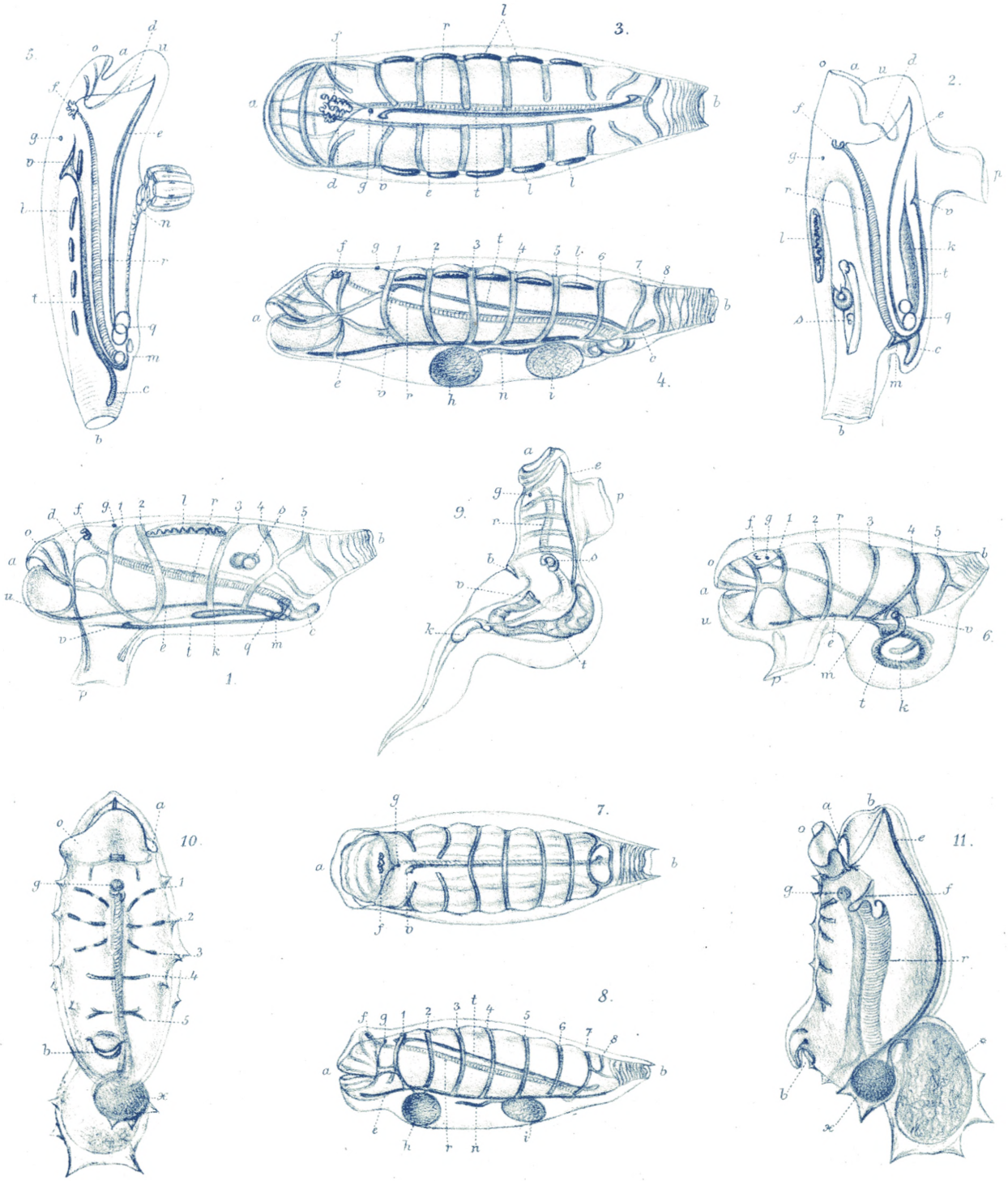








Trykt hos J.W. Tegner & Kittendorff



C.Cordts del & lith.

Om Iltens Afvigelse

fra den

Boyle-Mariotteske Lov

ved lave Tryk.

Af

Dr. **Christian Bohr.**

Med 1 Tavle.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 9.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1885.

Ved en Række absorptiometriske Undersøgelser, jeg i Løbet af de sidste Aar har anstillet over Dissociationen af den løst bundne Ilt i Oxyhæmoglobinet, viste der sig ved de under lave Ilttryk anstillede Forsøg stadig Uregelmæssigheder, der trods al anvendt Umage ikke lode sig fjærne eller blot forringe; jeg blev ved at undersøge Grunden til disse Uregelmæssigheder tilsidst saa godt som tvungen til at søge den i den for alle saadanne Forsøg nødvendige Omregning af Luftartens (i dette Tilfælde Iltens) Volumen fra det Tryk, hvorunder den før Absorptionen maaltes, til det efter Absorptionen indtrædende ringere Tryk. Denne Omregning var naturligvis foretagen efter den Boyle-Mariotteske Lov, og det gjaldt da om at prøve, med hvilken Nøjagtighed Ilten ved lave Tryk følger nævnte Lov, for derigjennem om muligt at vinde Data til Beregning af Dissociationsforsøgene. Saaledes fremkom den foreliggende Undersøgelsesrække, ved hvilken det formentlig utvivlsomt er paavist, at Ilten ved de omhandlede Tryk afviger betydelig fra den Boyle-Mariotteske Lov; der viste sig imidlertid under Forsøgene regelmæssigt det uventede Fænomen, at den Kurve, der udtrykker Afhængigheden mellem Volumen og Spænding, ved en bestemt Størrelse af sidstnævnte frembød en stærkt udtalt Discontinuitet, hvis hele Forhold syntes at maatte lede Tanken hen paa en her stedfindende Forandring i Iltens molekulære Sammensætning; til den nærmere Bestemmelse af dette Punkt i Kurven, der forekom mig at frembyde en Del Interesse, blev der derfor ved Forsøgene taget særligt Hensyn.

De i Literaturen foreliggende Meddelelser om den Boyle-Mariotteske Lovs Anvendelighed paa Ilt og Iltblandinger ved Tryk under én Atmosfære indskrænker sig, hvad den rene Ilt angaar, til nogle af Siljeström[1]) mellem c. 770^{mm} og 18^{mm} udførte Forsøg, der ved aftagende Tryk gav en større Tæthed af Luftarten end den Boyle-Mariotteske Lov forlangte; samme Resultat gav ogsaa Forsøg med den atmosfæriske Luft. De anvendte Methoder turde imidlertid neppe være fintmærkende nok til paa disse Forsøg at bygge videre Slutninger.

[1]) Siljeström: vorläufige Versuche zur Ermittelung des Verhältniss zwischen den Dichtigkeits- und Elasticitätsveränderungen der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre. Poggendorff Ann. Bd. 151. 1874.

For den atmosfæriske Lufts Vedkommende har Regnault[1]) udført 3 Bestemmelser mellem én Atmosfæres og c. 300$^{mm's}$ Tryk, der alle gav en i samme Retning gaaende Afvigelse fra den Mariotteske Lov; Størrelsen af denne Afvigelse laa dog efter den berømte Forfatters Anskuelse indenfor de mulige Fejlkilders Omraade. Yderligere Forsøg over dette Spørgsmaal har Regnault[2]) ikke udført; derimod har Mendeleff[3]) i 2 Afhandlinger offenliggjort en Række Undersøgelser over den atmosfæriske Lufts Tæthed ved forskjellige Tryk under én Atmosfære. Forsøgene, der ere udførte med omhyggelig Hensyntagen til mulige Fejlkilder, have stadig givet Afvigelser fra den Mariotteske Lov i saadan Retning, at Tætheden ved aftagende Tryk var større, end den vilde blive ved Beregning efter nævnte Lov. De i Mendeleffs Afhandlinger opførte Talværdier strække sig fra c. 650 til 15^{mm}. Ved endnu lavere Tryk har Krajewitsch[4]) for nylig ved en særegen Methode udført herhen hørende Bestemmelser, der, hvad det foreliggende Spørgsmaal angaar, gaa i samme Retning som Mendeleffs; Forfatteren bemærker selv, at de kvantitative Resultater af hans Forsøg ikke ere meget nøjagtige, hvorimod de kvalitative ikke tillade nogen Tvivl.

I Hovedtrækkene finder jeg for Iltens Vedkommende mellem 0,1 og 15$^{mm's}$ Spænding en Afvigelse fra den Boyle-Mariotteske Lov, hvis Retning er identisk med den, de to sidstnævnte Forfattere have angivet for atmosfærisk Luft.

Den Fremgangsmaade, jeg anvendte ved Forsøgene, var i Hovedtrækkene følgende: I et i det physiologiske Laboratoriums Kælderetage mod Nord beliggende Værelse med særdeles ringe Temperaturvariationer var i Grunden nedlagt en i Cement lejret Granitsten. I en i Stenen boret Fordybning var indstøbt et Jernrør, som ved Hjælp af Klemmer bar det i hosstaaende Figur afbildede Apparat med Undtagelse af Kuglen A, der var anbragt paa et udenfor Stenen stillet Stativ. Apparatet selv bestod af det 500^{mm} høje U-formede Rør B, der nedadtil var aflukket med Hanen C; det U-formede Rør var ved Kautchukslangen D sat i Forbindelse med den Kviksølv indeholdende Kugle A. Ved at hæve eller sænke Kuglen A, medens Hanen C aabnedes, var det muligt at indstille Kviksølvniveauet i B efter Behag. I hvert af det U-formede Rørs 2 Grene var anbragt et Barometerrør (α og β) af den i Figuren udviste Form. Disse Barometerrør var med Omhyggelighed udkogte paa sædvanlig Maade for den Hagenske Pumpe. I den ene nedenfor anførte Forsøgsrække var begge Rørs Diameter 18,5^{mm} (disse Rør benævnes i det følgende: Rør

[1]) Regnault: Relations des expériences etc. Mém. de l'Institut de France. Tome XXI. 1847 Pag. 139.

[2]) Regnault: l. c. pag. 415.

[3]) Mendeleff et Kirpitschoff: Notice préliminaire sur l'élasticité de l'air raréfié. Ann. de chim. et de phys. 1874 pag. 427.

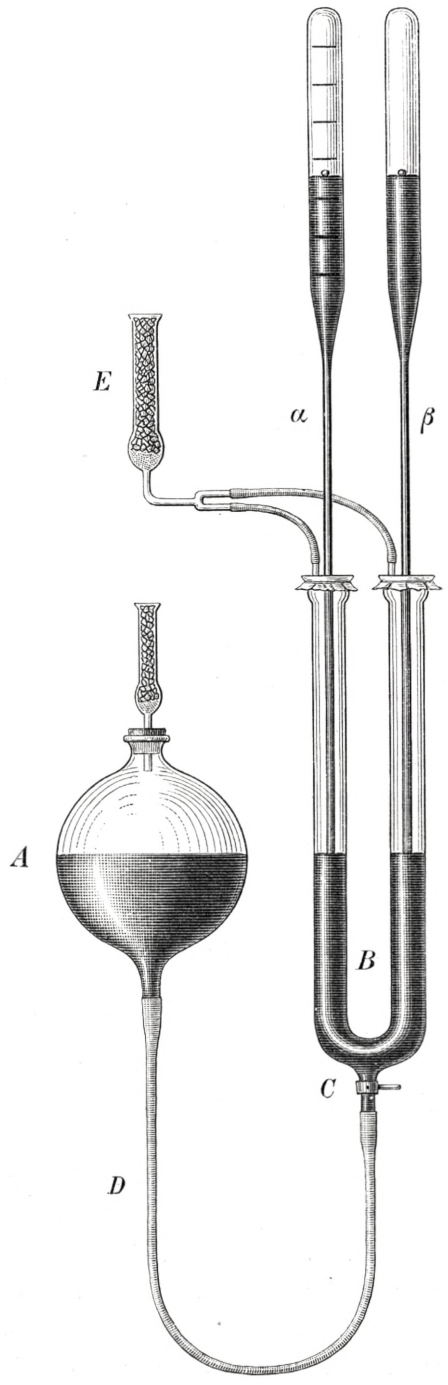
' Mendeleff et Hemilian: sur la compressibilité des gazes soumis aux faibles pressions. Ann. de chim. et phys. 1876 pag. 111.

[4]) Krajewitsch: Eine neue Methode die Spannkraft der Gase zu bestimmen. Journ. der russ. Chem-phys. Gesellsch. XIV. 1884. Citat efter Wiedemanns Beiblätter etc. Band IX pag. 315).

Nr. 1); i den anden Forsøgsrække var begge Rørs Diameter 32^{mm} (Rør Nr. 2).

Paa det ene af Rørene (α) fandtes en Inddeling, der delte Rør Nr. 2 i 7, Rør Nr. 1 i 4 omtrent ligestore Afsnit; for hver af Inddelingens Delstreger var Volumenet nøjagtigt bestemt. Paa den Maade, Figuren udviser, var Fugtighed fra Atmosfæren holdt ude fra Røret B, idet begge dets Aabninger var overbundne med Kautschukmembraner, hvori var anbragt Glasrør, der stod i Forbindelse indbyrdes og med den atmosfæriske Luft gjennem Chlorcalium-røret E.

Ved Forsøgets Begyndelse indførtes i Rør α nogle Blærer fuldstændig tørret Ilt, og efter at hele Apparatet havde været overladt længe nok til sig selv for med Sikkerhed at kunne vides at have antaget den omgivende Lufts Temperatur, bestemtes med et Kathetometer, der var opstillet paa samme Granitsten, som bar det ovenfor beskrevne Apparat, Højdeforskjellen mellem Kviksølvstanden i Røret α og Barometret β; samtidig aflæstes til Bestemmelse af Volumenet i Røret α Kviksølvmeniskens Afstand fra nærmeste Delstreg. Ved dernæst at forandre Kviksølvniveauet i det U-formede Rør B, indstilledes Kviksølvet i Rør α paa en anden Delstreg, og Højdeforskjellen mellem Standen i Rør og Barometer aflæstes atter. I det man paa denne Maade gik fra Delstreg til Delstreg, fandtes en Række af Tryk og tilsvarende Voluminer for samme Luftmængde. Derpaa indledes yderligere nogle Iltblærer i Rør α, og som nys beskrevet fandt man, nu for en anden Luftmængde, en ny Række af samhørende Tryk og Voluminer. Ved at indlede passende Mængder Ilt, lykkedes det paa denne Maade at faa fastsat Afhængigheden mellem Volumen og Tryk for en Værdi af sidstnævnte mellem 0,1 og 15^{mm}.



Saa simpel Fremgangsmaaden end synes, er der dog, saafremt Maalene som her skulle gjøre Fordring paa stor Nøjagtighed, Hensyn at tage til en Del Fejlkilder; disse ville sammen med Fremstillingen af Methodens Detailler blive behandlede i det følgende.

1. Den anvendte Ilt fremstilledes ved Opvarmning af rent Kviksølvtveilte; i dette Øjemed anbragtes Kviksølviltet som et nogenlunde jævnt Lag i et almindeligt Forbrændingsrør, hvis ene Ende var tilsmeltet, medens den anden ved Hjælp af en tykvægget Kautchukslange var sat i Forbindelse med et Kapillarrør, der med sin krumme Ende udmundede under Kviksølv.

Forbrændingsrøret blev, efter at være anbragt i Elementaranalyseovnen opvarmet paa et begrænset Stykke ad Gangen, idet man begyndte ved Rørets bagre Ende, indtil alt det i det opvarmede Stykke værende *Hg O* var forsvundet. Da Mængden af *Hg O* i hele Røret tilnærmelsesvis var bestemt, kunde man af Længden af det forbrugte Stykke faa et Skjøn over, hvormeget Ilt der alt var udviklet. Dette var nødvendigt for at vide, naar den i Apparatet værende atmosfæriske Luft kunde antages fordreven. Dette opnaaedes forøvrigt ret hurtigt paa Grund af den ringe Luftmængde, Apparatet indeholdt; der anvendtes intet særligt Forlag, da det bortdestillerede Kviksølv fandt tilstrækkelig Plads i Forbrændingsrørets forreste Ende. Naar nogle Liter af Ilten var undvegne, opsamledes den udviklede Luftart i et Bunsens Kviksølvgasometer af den Form, som beskrives i hans «Gasometrische Methoden» (1877 Pag. 23); kun var Kautchukforbindelsen ved Gasometrets øvre Ende omgiven af Kviksølvlaas. Det Rør, hvorigjennem den opsamlede Luft ved Benyttelsen ledtes ud af Gasometret, var et meget snævert Kapillarrør, saaledes at de langsomt udtrædende Blærer under Atmosfæretryk kun havde en Størrelse af c. 0,01 Cbcm. Imellem Gasometer og Kapillarrør var for at tørre Luften indskudt et noget videre Rør, der indeholdt Fosforsyreanhydrid. Den udtrædende Luft kom paa denne Maade længere Tid i Berøring med Fosforsyreanhydridet og kan antages at have været fuldstændig tør.

Skulde Ilten overføres fra Gasometret til Røret a, blev ved Forsøgene med det smallere Rør (Nr. 1), Røret taget ud af det U-formede Rør B og anbragt i en Jernskaal med Kviksølv, der med en Gasflamme opvarmedes til over 120° C. for saaledes at bortdrive Fugtighed fra Kviksølvoverflade og Skaal. Gjennem det opvarmede Kviksølv lededes først en Del Ilt fra Gasometret for at uddrive den atmosfæriske Luft af Forforsyreanhydridrøret, hvorpaa man lod et passende Antal Blærer stige op i Røret a. Efter Afkjøling til almindelig Temperatur overførtes det nævnte Rør atter fra Jernskaalen til det U-formede Rør, hvor Maalingerne foretoges. Ved Forsøgsrækken med Rør Nr. 2 var Fremgangsmaaden væsentlig den samme; kun udelodes her Opvarmningen til 120°.

2. Bestemmelsen af de til Rørets Delstreger svarende Voluminer er udført direkte for hver Delstreg ved gjentagen Udvejning med Kviksølv under Iagttagelse af de almindelige

Kauteler med Hensyn til Temperatur og med Anbringelse af en Korrektion for Meniskens Krumning udført efter Bunsens Methode (Gasometrische Methoden 1877 pag. 35). Naar, saaledes som det oftest var Tilfældet, Kviksølvstanden ikke nøjagtig svarede til en Delstreg, bestemtes Afstanden til nærmeste Delstreg ved Maaling med Kathetometret, hvorefter en til denne Afstand svarende Korrektion indførtes. — En særlig Prøve viste, at de anvendte Rør ikke kendelig forandrede deres Volumen ved en Variation af det indvendige Tryk paa næsten én Atmosfære. Volumenbestemmelserne kunne, udførte paa ovenstaaende Maade, antages kun at være behæftede med smaa Fejl, der i Sammenligning med de ved Trykmaalingerne indførte maa ansés for forsvindende.

3. Med Hensyn til Bestemmelsen af Temperaturen under Forsøgene bemærkes følgende: Det Værelse, hvori Apparatet var opstillet, og hvori, udenfor den korte Tid Aflæsningerne varede, ingen opholdt sig, havde en meget konstant Temperatur, der Dage igjennem kun varierede med nogle faa Tiendedele af en Grad; naar da flere Aflæsninger af samme Luftvolumen, foretagne med Timers Mellemrum, havde givet samme Værdi saavel for Kviksølvstanden i Røret som for Lufttemperaturen i Apparatets umiddelbare Nærhed, kunde hele Apparatet med Sikkerhed antages at have den aflæste Temperatur. At jeg ikke har anvendt den Betryggelse, som Omgivelse af Rørene med Vand synes at kunne give ved disse Forsøg, havde sin Grund i følgende Omstændigheder. Oprindelig havde jeg ved en længere Række indledende Forsøg anbragt den øverste udvidede Del af begge Rørene (α og β) i en med Glasrude forsynet Vandkasse; det lykkedes mig imidlertid ikke at faa en overalt saa egal Glasrude og en saa fuldstændig normal Indstilling af samme, at jeg ved Aflæsning med Kathetometret gjennem Glasset kunde være sikker paa at undgaa Fejl paa flere Hundrededel Millimeter. Naturligvis maa det være muligt, naar alt kan indrettes med særdeles Omhu, at faa fejlfri Bestemmelse af Kviksølvets Højdeforskjel i de to Rør, selv om man aflæser gjennem Glasrude; det er imidlertid særdeles vanskeligt, og man bør aldrig stole paa saadanne Maal, før man ved direkte Prøver paa forskjellige Steder af Glasruden har iagttaget, at ingen forstyrrende Forskydninger af Billedet finder Sted. Det var ved saadanne direkte Prøver, udførte ved at sammenligne Standen af to i Vandkassen anbragte Normalbarometre, at jeg blev opmærksom paa denne Fejl. Paa Grund af Usikkerheden ved Korrektion af Fejlen, der selvfølgelig kan være forskjellig paa forskjellige Steder af Glasset, opgav jeg Anbringelse af Rørene i Vand, saa meget mere som en sikker og fast Indstilling af Glasruden var forbunden med megen Vanskelighed ved Anvendelsen af det ovenfor beskrevne Apparat. Foreløbige Forsøg havde endvidere vist mig, at Luftens Udvidelseskoefficient ved lave Tryk ikke fjærnede sig særdeles betydelig fra den ved højere Tryk fundne Koefficient af $^1/_{273}$ for hver Grad; heraf fulgte, at jeg ved de højeste af de undersøgte Tryk (c. 15^{mm}) kunde taale en Variaton af 0,1 Grad, uden at de derved fremkaldte Forandringer af Trykket blive til at mærke ved Aflæsningerne, hvis Nøjagtighed ikke turde

sættes over $0{,}01^{mm}$, og saasnart Trykket naaede ned til et Par Millimetre, blev Variationer i Temperaturen paa en hel Grad umærkelige. Da nu ved Anvendelse af behørig Forsigtighed Værelsets Temperatur under en Aflæsningsrække ikke behøvede at svinge mere end knap 0,1 Grad, opnaaedes ved Omgivelse af Rørene med Vand ingen mærkelig Forøgelse af Forsøgenes Nøjagtighed; derfor var det naturligvis rigtigst ved at udelade Vandkassen at undgaa Faren ved de med den forbundne Fejlkilder.

4. Ved Bestemmelse af den indesluttede Lufts Spænding kommer først i Betragtning den Nøjagtighed, hvormed det overhovedet er muligt at maale med det anvendte Kathetometer. Har man tilstrækkelig Øvelse, vil det uden Vanskelighed med et godt Instrument lykkes at aflæse $0{,}01^{mm}$. Ved de her foreliggende Forsøg, hvor kun mindre Afstande have været at bestemme, har den indbyrdes Overénsstemmelse af Skalaen paa forskjellige Steder kunnet sikres ved Sammenligning med Nonien. Ved de mærkelige Punkters Bestemmelse er der sørget for, at Aflæsninger have fundet Sted paa forskjellige Steder af Skalaen.

Større Besværligheder end de med selve Maalingerne forbundne rejser sig imidlertid fra den Vanskelighed, man har ved bestemt at vide, naar Kviksølvmeniskens øverste Rand nøjagtig er indstillet i Kikkertens Focus. Naar ikke den største Forsigtighed anvendes, er man herved udsat for meget grove Fejltagelser. Nedenstaaende Fremgangsmaade har for det $18{,}5^{mm}$ vide Rør vist sig brugbar. Røret blev overalt, med Undtagelse af to smalle diametralt modsatte Længdestriber, beklædt med sort Papir. Den bageste Stribe, der vendte hen mod Lyskilden, var overklæbet med olieret Papir; bag ved dette kunde en Skærm bevæges op og ned langs Rørets Bagflade; denne Skærm indstilledes saaledes, at Afstanden mellem dens nederste skarpe Rand og Menisken kun var $c.\ 0{,}1^{mm}$. Man saa da i Kikkerten gjennem den forreste Stribe Menisken sort uden Spor af nogen Reflex, og dens øvre Rand dannede en skarp Modsætning til det mat oplyste olierede Papir. Ogsaa den forreste Stribe kunde, for at holde uvedkommende Lys borte, dækkes i forskjellig Udstrækning med en Skærm. Denne Belysningsmaade tillader en overmaade skarp Indstilling; kun maa man passe, at den allerøverste Del af Meniskens Hvælving dog ikke bliver belyst ved ovenfra kommende Lys, i hvilket Tilfælde den paa Grund af den spejlblanke Kviksølv-Overflade let kan oversés. Dette prøves nemmest ved at indstille Kikkertens Traadkors paa den formodede øvre Rand af Menisken og dernæst sænke den bageste Skærm yderligere et lille Stykke; dette maa ingen Forandring give i Menisk-Randens Stilling.

Ved det 32^{mm} vide Rør kom jeg imidlertid heller ikke paa denne Maade, paa Grund af Kviksølvets næsten plane Overflade, til noget Resultat. Trods længe fortsat Indøvning lykkedes det mig ikke ved nogen Belysningsmaade at faa paalidelige Bestemmelser; der lodes altid Spillerum aaben for Vilkaarlighed i en Udstrækning af nogle Hundrededele Millimeter, og undertiden kunde endnu grovere Fejl begaas uden strax at bemærkes. Jeg bragte da en lille Glaskugle op i hvert af Rørene α og β (sé Figuren) for derigjennem at

vinde et Indstillingsmærke for Kikkerten. Fremgangsmaaden herved var følgende: begge Rør anbragtes i en Jernskaal med Kviksølv, der opvarmedes til 120°; samtidig opvarmedes umiddelbart ved Siden heraf to smaa Glaskugler (hver af Vægt lig 0,04 Gram og af Volumen 0,07 Cbcm.) til henved 400°. Med en Jernpincet førtes nu hver af Glaskuglerne saa hurtig som mulig ned under det opvarmede Kviksølv, hvorpaa man lod dem stige op hver i sit Rør. Det gjaldt nu om at bringe Glaskuglerne, der svømmede paa Kviksølvet (hvis Overflade omkring dem ikke frembød nogen kendelig Afvigelse fra den øvrige næsten plane Overflade) til at ligge lige i Midten af Røret. Dette opnaaedes ved et Par Gange at stryge Rørets udvendige Side let med en ulden Klud. Efter nogen Tids Forløb stillede Glaskuglen sig nøjagtig midt i Røret og søgte stadig atter derhen, naar den ved smaa Rystelser bragtes i Bevægelse. Ved nu at indstille Kikkerten skarpt paa Kuglens Rand havde man Sikkerhed for at have Rørets Midte i Focus; den Overfladelinje, man samtidig saa tydeligt, var da Meniskens øverste Rand. Traadkorsets Indstilling lettedes forøvrigt ved det skarpe Sammenstød mellem Glaskuglerand og Menisk. Paa denne Maade lykkedes det at udføre Maalingen med god Nøjagtighed; efter Skøn formener jeg imidlertid, at Indstillingen i det snævrere Rør lod sig udføre med langt større Præcision.

Til den kapillare Depression var der for det 32^{mm} vide Rør intet Hensyn at tage. Hvad angaar det 18,5^{mm} vide Rør, viste Maalinger af Meniskens Højde i begge Rør under Forsøget (sammenholdt med en direkte Bestemmelse af Depressionen i et lige vidt Glasrør) at Korrektionen ikke naaede den uundgaaelige Aflæsningsfejl paa Kathetometret, hvorfor den hélt er udeladt. Dens Indførelse vilde iøvrigt bidrage til at forøge Afvigelsen fra den Mariotteske Lov.

Opmærksomheden har endvidere været henvendt paa den Fejl, der kunde indløbe, hvis Kviksølvsøjlerne i de to Rør havde forskjellig Varmegrad, idet en Forskjel i Temperaturen paa 0,1° C. ved en Længde af Kviksølvsøjlen paa 760^{mm}, frembringer en Forskjel af c. 0,01^{mm} i Tryk. Efter det ovenfor om Forsøgsværelsets Temperatur og om Aflæsningsmaaden fremsatte sés, at en saadan Fare ikke har været tilstede. Naar kunstig Belysning anvendtes, var Rørene altid dækkede af Skærme.

Barometrene ere før Ilttilledningen prøvede for mulig tilbagebleven Luft paa den Maade, at Kviksølvet i det ene Rør (α) ved Forandring af Niveauet i B blev indstillet i forskjellige Højder, medens Kviksølvet i det andet Rør (β) ved Hævning eller Sænkning af dette Rør stadig holdtes paa et bestemt Sted i Røret. Saafremt der i et af Rørene havde været en maalelig Luftmængde, kunde Kathetometeraflæsningen ikke, som Tilfældet var, overalt have givet nøjagtig samme Højde i begge Rør.

5. De i nedenstaaende Forsøgstabeller paa flere Steder anførte tilbagegaaende Kontrolforsøg (sé f. Ex. I. B. 6 og 18) vise med fuldstændig Sikkerhed, at Kviksølvet under Forsøget ingen Ilt har absorberet; herfor talte allerede den Omstændighed, at Kvik-

sølvoverfladen i det Ilt indeholdende Rør under hele Forsøget var fuldstændig blank, og at Kviksølvet, naar det bevægedes op og ned i Røret, overalt lagde sig til Væggen som Spejl. Under Passagen af Iltblærerne op gjennem Røret før Forsøgets Begyndelse, iltes derimod undertiden lidt Kviksølv, hvilket giver sig tilkjende ved en hist og her indtrædende lille Plet i Rørets Forløb.

6. Af de nys nævnte Kontrolforsøg kan ogsaa sés, at der, medens Forsøgene varede, ikke har fortættet sig kjendelige Mængder af Luft paa den indvendige Glasoverflade; iøvrigt findes blandt Forsøgene Afhængigheden mellem Volumen og Tryk, bestemt for samme Tryk, med god Overénsstemmelse under saa mange Variationer i Forholdet mellem Volumen og Glasoverflade, at Mistanke om en vildledende Overfladefortætning ikke godt kan finde Sted.

I de nedenfor anførte Forsøg anser jeg Trykbestemmelserne for gjennemgaaende ikke at have større Fejl end $0{,}01^{mm}$ paa Grund af de talrige Maalinger, hvorved hvert enkelt Tryk er bestemt. Som allerede ovenfor er bemærket, turde Forsøgsrækken med de smallere Rør i enhver Henseende være den nøjagtigste.

De ikke faa indledende Forsøgsrækker, jeg har anstillet, tildels med andre Apparater end de her beskrevne, har jeg udeladt, da de ikke kunne maale sig i Nøjagtighed med de senere udførte Forsøg, om de end stadig have givet Resultater, der i Hovedsagen stemme overens med de nedenfor anførte.

Nedenstaaende følger tabellarisk ordnet Resultatet af tvende Forsøgsrækker, udførte efter at Methoden var færdig uddannet og indøvet; den ene (I) med et $18{,}5^{mm}$ vidt Rør, den anden (II) med et 32^{mm} vidt Rør. Hver Forsøgsrække bestaar af flere Afdelinger (A, B o. s. v.), og i hver Afdeling er Luftmængden forskjellig, idet der stadig indførtes mere og mere Ilt i Røret. De i den første Kolonne af Tabellen opførte Numre angive den Orden, hvori de enkelte Iagttagelser indenfor Afdelingerne have fundet Sted. Den med p overskrevne Kolonne indeholder Trykkene; den med v overskrevne de tilsvarende Voluminer, og endelig er under Rubrikken pv opført Produktet af p og v.

Hvad angaar de enkelte Iagttagelser, saa er hver af dem Resultatet af flere med c. en Times Mellemrum udførte Rækker af Maalinger. Ingen af Trykkene ere observerede i kortere Tid end to Timer, og paa ikke faa Steder saavel blandt de høje som de lave Spændinger er Observationen af de enkelte Tryk fortsat gjennem 12 til 24 Timer med større og mindre Afbrydelser. Denne lange Observationstid viste sig nødvendig af Hensyn til Forhold, der først kunne finde Omtale, naar Forsøgsresultaterne ere anførte.

Endnu skal kun bemærkes, at i Forsøgsrække I uden Undtagelse alle observerede Tryk ere anførte. I Forsøgsrække II er mellem de iagttagne 27 Tryk to udeladte, henholdsvis paa 3,07 og $0{,}45^{mm}$. Disse to gave nemlig saa store Afvigelser fra de øvrige Observationer, at en grovere Maalefejl vistnok maa antages at ligge til Grund.

Tabel 1.

p er udtrykt i Millimetre, v i Cubiccentimetre.

De anførte Kviksølvhøjder have samme Temperatur som for Forsøgsrækken angiven.

Forsøgsrække I.

Rørets Vidde = 18.5mm. Temp = 14° C.

	№	p	v	pv
Afdeling A.	2	0.63	23.240	14.641
— —	5	0.34	39 872	13.557
— —	1	0.23	57.456	13.215
— —	3	0.17	66.184	11.251
— —	4	0.12	74.939	8.993
Afdeling B.	14	1.15	20.010	23.012
— —	6	1.14	20.145	22.965
— —	18	1.14	20.112	22.927
— —	8	1 135	20.174	22.897
— —	13	0.92	24.625	22.655
— —	11	0.84	26.629	22.368
— —	10	0.70	32 536	22.775
— —	17	0.695	34.421	23.922
— —	16	0.67	35.528	23.799
— —	15	0.62	37.707	23.378
— —	12	0.55	42.010	23.105
— —	9	0.40	56.901	22.761
— —	7	0.30	74.077	22 223
Afdeling C.	19	1.82	19.913	36.242
— —	26	1.795	20.200	36.258
— —	24	1.79	20.174	36.111
— —	20	0.88	38.669	34.029
— —	23	0.70	46.998	32.899
— —	25	0.70	52.412	36.688
— —	21	0.62	57.698	35.773
— —	22	0.48	73.588	35.323
Afdeling D.	27	7.45	18.786	139.958
— —	29	7.00	19.960	139.719
— —	30	3.38	40.468	136.781
— —	28	1.93	70.218	135.522

Tabel 1 (Fortsættelse).

Forsøgsrække II.

Rørets Vidde = 32mm. Temp. = 11.5° C.

	№	p	v	pv
Afdeling A.	9	1.03	25.863	26.639
— —	8	0.84	31.145	26.162
— —	7	0.71	34.723	24.654
— —	11	0.70	38.489	26.943
— —	10	0.70	38.264	26.785
— —	14	0.65	41.086	26.706
— —	12	0.61	42.960	26 205
— —	15	0.53	48.644	25.782
— —	13	0.46	56.534	26.006
— —	6	0.35	72.015	25.205
— —	5	0.28	86.386	24.188
— —	4	0.23	100.356	23.082
— —	3	0.19	116.810	22.194
— —	2	0.145	147.595	21.402
— —	1	0.085	206.488	17.551
Afdeling B.	17	1.415	56.494	79.940
— —	18	0.90	87.045	78.340
— —	21	0.72	101.720	73.238
— —	19	0.70	118,130	82.691
— —	20	0.54	146.778	79.260
Afdeling C.	25	15.02	20.761	311.829
— —	22	13.95	22.396	312.350
— —	23	5.07	61.017	309.357
— —	24	3.04	100.026	304.073

For at lette Oversigten over Forsøgene, har jeg paa vedføjede Kurvetavle fremstillet dem graphisk, idet de forskjellige Værdier af p ere afsatte som Abscisser og de tilsvarende Værdier af pv som Ordinater. Kurven Nr. 1 gjengiver Forsøgsrække I, Kurve Nr. 2 Forsøgsrække II. Da samme Trykværdier findes bestemte indenfor flere Afdelinger af samme Række, har Sammenføjningen af de enkelte Afdelinger til et Hele ingen særlig Vanskelighed frembudt; den er forøvrigt udført paa en Maade, der vil blive angivet længere nede (sé Side 14 og 16). Det bemærkes, at i begge Forsøgsrækker Afdeling *A*'s Punkter paa

Tryk til den ved lavere, behøves ingen eller i hvert Fald kun en meget ringe Tid, hvorimod der til Forandringen i modsat Retning medgaar flere Timer, naar Forsøgene udføres som ovenfor nævnt. At disse Forhold staa i Forbindelse med en indtrædende Forandring i Iltens molekulære Sammensætning, synes rimeligt. Forsøg ved højere Temperaturer end de her anvendte vilde vistnok være af Betydning for nærmere Belysning heraf; jeg har imidlertid endnu ikke naaet at faa saadanne anstillede.

En Betragtning af den graphiske Fremstilling af Kurverne sammen med nogle foreløbige Prøver gjorde det sandsynligt, at Forsøgsresultaterne med god Tilnærmelse kunde udtrykkes ved Ligningen

$$(p + a)\ v = k$$

hvor p er Trykket, v Volumenet og a en for samme Tilstandsform absolut Konstant, medens k kun er konstant for samme Luftmængde i samme Tilstandsform; k har altsaa, saalænge vi befinde os i samme Gren af Kurven, samme Værdi for samme Forsøgsafdeling, men skifter Værdi for de forskjellige Afdelinger.

Da en saadan Ligning, uden Hensyn til dens theoretiske Værd, vilde afgive et godt Hjælpemiddel ved Forsøgsresultaternes Anvendelse, er der foretaget en Udjævning af Kurven efter de mindste Kvadraters Methode, for derigjennem at finde den bedste Værdi af a. Idet samtidig Værdierne af k for hver Afdeling bestemtes, fik man de fornødne Oplysninger til en Sammenføjning af de enkelte Afdelinger indenfor Forsøgsrækken.

Da Forsøgene i Række I forménte at være de paalideligste, er denne Række alene benyttet ved Bestemmelsen af Konstanten a. Forsøgsrække II er kun anvendt til Sammenligning med de af Række I vundne Resultater; til den Ende er den af Række I fundne Værdi for a anvendt paa Række II, hvor dernæst Bestemmelsen af Værdierne for k er foretagen, for derigjennem at sammenføje de forskjellige Afdelinger. En Sammenligning af de to Rækker kan da foretages ved Sammenligning af de for Række II ved Hjælp af Formlen fundne Trykværdier med de i samme Række direkte iagttagne Tryk.

For Forsøgsrække I findes den bedste Værdi af a at være:

for den lange Gren: $a = 0{,}109$

for den korte Gren: $a = 0{,}070$.

Ligningerne for de enkelte Afdelinger findes for den lange Grens Vedkommende at være:

for Afdeling B: $(p + 0{,}109)\ v = 25{,}146$

for Afdeling C: $(p + 0{,}109)\ v = 38{,}368$

for Afdeling D: $(p + 0{,}109)\ v = 141{,}923$.

For den korte Grens Vedkommende findes

for Afdeling A: $(p + 0{,}070)\ v = 16{,}250$

for Afdeling B: $(p + 0{,}070)\ v = 26{,}321$

for Afdeling C: $(p + 0{,}070)\ v = 40{,}161$.

Kurvetavlen ere markerede rødt, Afdeling B's sort og Afdeling C og D's (der ikke kan forvexles) blaat.

Maalestokken for Kurven er valgt saaledes, at en Enhed af pv i Række I, Afdeling C, er sat lig 3^{mm}, medens en Enhed (1^{mm}) af p er sat lig 20^{mm}.

Af den graphiske Fremstilling ses, at Værdierne af pv istedetfor, saaledes som det vilde følge af den Boyle-Mariotteske Lov, at ligge i en med Abscisseaxen parallel ret Linje i Hovedtrækkene danner en med Konkaviteten mod Abscisseaxen vendt krummet Linje. For Værdien af $p = 0{,}70^{mm}$ har Kurven en tydelig Diskontinuitet, der deler den i to Grene, én svarende til Værdien af $p > 0{,}70^{mm}$ (kaldes i det følgende «lange Gren») og én svarende til Værdier af $p < 0{,}70^{mm}$ («korte Gren»).

(Med Hensyn til den graphiske Fremstilling bemærkes, at den optrukne Linje (der er identisk for begge Kurver) for begge Grenes Vedkommende er en Kurve, hvis Ordinater (pv) og hvis Abscisser (p) have Relationen

$$(p + a)\ v = k,$$

hvor Konstanterne for hver Gren ere forskjellige. Forskjellen i Nøjagtighed mellem Bestemmelserne i den korte og i den lange Gren sés af nedenstaaende Tabel 2 og 3 kun at være ringe; den graphiske Fremstilling kan imidlertid give det Indtryk, at Nøjagtigheden for Trykbestemmelserne i den korte Gren er betydelig mindre end for dem i den lange. Dette skyldes Multiplikationen af de smaa Tryk med relativt store Voluminer).

Selve Diskontinuiteten, der, som Kurven udviser, er bestemt ved talrige Iagttagelser, frembyder følgende mærkelige Forhold. Naar man ved en given Iltmængde i Observationsrøret først indstiller Kviksølvet saaledes, at Trykket har en Værdi noget mindre end $0{,}70^{mm}$, og naar man dernæst ved at forringe Volumen forøger Trykket til en Værdi af lidt over $0{,}70^{mm}$ (f. Ex. til $0{,}8^{mm}$), viser det sig, at dette Tryk ikke holder sig konstant, men under Forløbet af 3 til 5 Timer synker til en Værdi, der er en halv Snes Procent ringere end den oprindelige. Under Forløbet af denne Tid er Trykket mer eller mindre ustadigt, svingende, mellem Begyndelses- og Slutningsværdien. Om disse Svingninger frembyde nogen Regelmæssighed, har det af forhaandenliggende Grunde ikke været mulig at bestemme med det anvendte Apparat. Efter Forløbet af højst 5 Timer holder Trykket sig konstant, saalænge det har været observeret (24 til 36 Timer).

Hvis den blivende Værdi af Trykket netop er lig $0{,}70^{mm}$, viser der sig ved en passende Volumenforøgelse ikke, saaledes som man skulde vente, nogen Forringelse af Trykket; men dette vedbliver at være lig $0{,}70^{mm}$. Fortsættes Forøgelsen af Volumen yderligere, frembringes en Forringelse af Trykket. Disse aldeles regelmæssigt indtrædende Fænomener kunne gjentages, saa ofte det skal være.

Det forekommer mig herved godtgjort, at Ilten ved nævnte Tryk ($0{,}70^{mm}$) undergaar en Tilstandsforandring, saaledes at der for Overførelse fra Tilstandsformen ved højere

Nedenstaaende findes for Række I en Tabel til Sammenligning mellem de direkte iagttagne og de af Formlerne fundne Trykværdier.

Tabel 2.

Forsøgsrække I.

	№	p (iagttaget).	p (beregnet).	Differents.
Den lange Gren.				
Afdeling B.	14	1.15	1.1477	÷ 0 0023
— —	6	1.14	1.1393	÷ 0.0007
— —	18	1.14	1.1413	+ 0.0013
— —	8	1.135	1.1375	+ 0.0025
— —	13	0.92	0.9121	÷ 0.0079
— —	11	0.84	0.8353	÷ 0.0047
Afdeling C.	19	1.82	1.8178	÷ 0.0022
— —	26	1.795	1.7904	÷ 0.0046
— —	24	1.79	1.7929	+ 0.0029
— —	20	0.88	0 8832	+ 0.0032
— —	23	0.70	0.7074	+ 0.0074
Afdeling D.	27	7.45	7.4454	÷ 0.0046
— —	29	7.00	7.0012	+ 0.0012
— —	30	3.38	3.3979	+ 0.0179
— —	28	1.93	1.9121	÷ 0.0179
Den korte Gren.				
Afdeling A.	2	0.63	0.6292	÷ 0.0008
— —	5	0.34	0.3376	÷ 0.0024
— —	1	0.23	0.2128	÷ 0.0172
— —	3	0.17	0.1755	+ 0.0055
— —	4	0.12	0.1468	+ 0.0268
Afdeling B.	17	0.695	0.6947	÷ 0.0003
— —	16	0.67	0.6709	+ 0.0009
— —	15	0.62	0.6281	+ 0.0081
— —	12	0.55	0.5566	+ 0.0066
— —	9	0.40	0.3926	÷ 0.0074
— —	7	0.30	0.2853	÷ 0.0147
Afdeling C.	25	0.70	0.6963	÷ 0.0037
— —	21	0.62	0.6261	+ 0.0061
— —	22	0.48	0.4758	÷ 0.0042

Den angivne Formel sés heraf at være særdeles brugbar.

Hvad Forsøgsrække II angaar, er som ovenfor sagt Værdien for α taget fra Række I. Ligningerne for de enkelte Afdelinger indenfor Rækken blev da for den lange Grens Vedkommende

for Afdeling A: $(p + 0{,}109)\ v = 29{,}055$
for Afdeling B: $(p + 0{,}109)\ v = 86{,}656$
for Afdeling C: $(p + 0{,}109)\ v = 314{,}50$

for den korte Grens Vedkommende findes

for Afdeling A: $(p + 0{,}070)\ v = 29{,}785$
for Afdeling B: $(p + 0{,}070)\ v = 88{,}740.$

Følgende Tabel giver en Sammenstilling af de beregnede og iagttagne Trykværdier for Forsøgsrække II.

Tabel 3.

Forsøgsrække II.

	№	p (iagttaget).	p (beregnet).	Differents.
Den lange Gren.				
Afdeling A.	9	1.03	1.0144	— 0.0156
— —	8	0.84	0.8239	— 0.0161
— —	7	0.71	0.7278	+ 0.0178
Afdeling B.	17	1.415	1.4233	+ 0.0083
— —	18	0.90	0.8855	— 0.0145
— —	21	0.72	0.7420	+ 0.0220
Afdeling C.	25	15.02	15.040	+ 0.020
— —	22	13.95	13.934	— 0.016
— —	23	5.07	5.045	— 0.025
— —	24	3.04	3.035	— 0.005
Den korte Gren.				
Afdeling A.	11	0.70	0.7039	+ 0.0039
— —	10	0.70	0.7084	+ 0.0084
— —	14	0.65	0.6549	+ 0.0049
— —	12	0.61	0.6233	+ 0.0133
— —	15	0.53	0.5423	+ 0.0123
— —	13	0.46	0.4569	— 0.0031
— —	6	0.35	0.3436	— 0.0064
— —	5	0.28	0.2748	— 0.0052
— —	4	0.23	0.2268	— 0.0032
— —	3	0.19	0.1850	— 0.0050
— —	2	0.145	0.1318	— 0.0132
— —	1	0.085	0.0742	— 0.0108
Afdeling B.	19	0.70	0.6812	— 0.0188
— —	20	0.54	0.5346	— 0.0054

Resultaterne af Række II sés heraf i det væsentlige at stemme overéns med de af Række I fundne.

Efter det udviklede mener jeg at være berettiget til at resumere som følger:

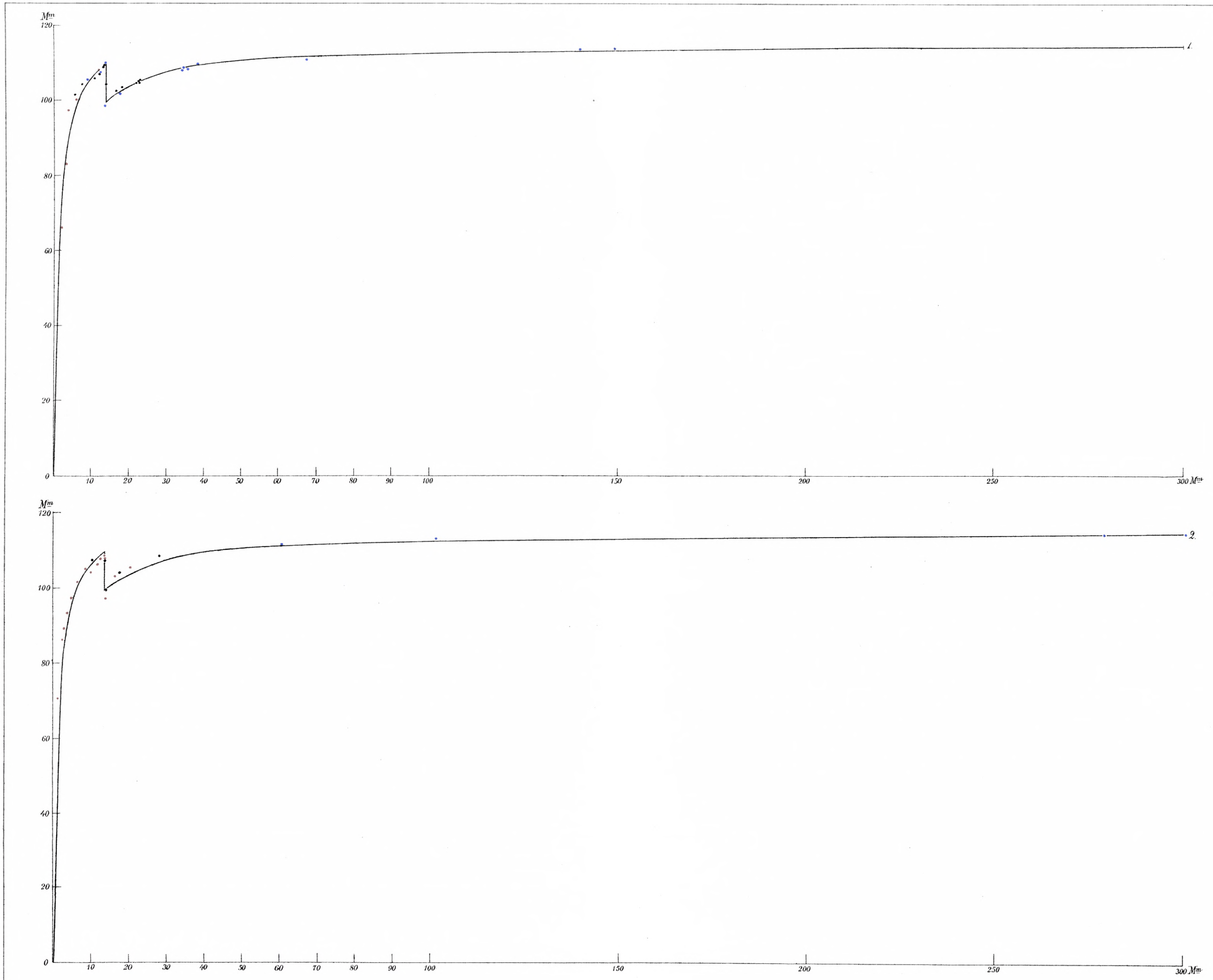
1. Ved en Temperatur mellem 11° og 14° C afviger Ilten indenfor de observerede Trykgrænser fra den Boyle-Mariotteske Lov. Afhængigheden mellem Volumen og Spænding for en Værdi af sidstnævnte større end $0{,}70^{mm}$ kan udtrykkes med Tilnærmelse ved Formlen:

$$(p + 0{,}109)\ v = k,$$

medens Formlen for Værdier af Spændingen mindre end $0{,}70^{mm}$ bliver:

$$(p + 0{,}070)\ v = k.$$

2. Synker Trykket under $0{,}70^{mm}$, undergaar Ilten en Tilstandsforandring; den kan atter ved Forhøjelse af Trykket til over $0{,}70^{mm}$ overføres til den oprindelige Tilstandsform.


Mm
120
100
80
60
40
20
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300 Mm
1.
Mm
120
100
80
60
40
20
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
250
300 Mm
2.

Undersøgelser

over den af

Blodfarvestoffet optagne Iltmængde

udførte ved Hjælp af

et nyt Absorptiometer

af

Dr. **Christian Bohr.**

Med 2 Tavler.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 10.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1886.

Indsendt til det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Møde den 20de November 1885.

Disse Undersøgelser ere paabegyndte i det physiologiske Universitetsinstitut i Leipzig i Foraaret 1883 og ere senere blevne fortsatte i det physiologiske Laboratorium i Kjøbenhavn. Ved ydre Omstændigheder er jeg bleven tvungen til foreløbig at udsætte den i dette Efteraar paabegyndte udførlige Fremstilling af mine Undersøgelser; men af forskjellige Grunde har jeg fundet det hensigtsmæssigt allerede nu at offentliggjøre en kort sammentrængt Meddelelse af Forsøgsresultaterne.

Indledning. Formaalet for mine Undersøgelser var at bestemme den Mængde Ilt, som Blodets dissociable Farvestof, Oxyhæmoglobinet, formaaede at binde under forskjellige Forhold. Den her foreliggende Afhandling omfatter den Del af Undersøgelserne, som det er lykkedes mig at bringe til en vis Afslutning, og angaar den af Hæmoglobinet ved en Temperatur af 15° under forskjellige Ilttryk optagne Iltmængde.

Grunden til at de, for Forstaaelsen af Respirationsprocessen særdeles vigtige Undersøgelser over Oxyhæmoglobinets Iltdissociation hidtil ikke har ført til noget fuldt tilfredsstillende Resultat trods det ikke ringe Arbejde, der af flere Physiologer er anvendt derpaa, maa vistnok søges i de Mangler, der klæbe ved de hidtil anvendte absorptiometriske Methoder. Beskrivelsen af et nyt Absorptiometer, hvorved forhaabentlig Hovedmanglerne ved de tidligere anvendte Apparater ere fjernede, udgjør derfor en Del af denne Afhandling.

Den stillede Opgaves Løsning har jeg forsøgt at opnaa ved at undersøge Absorptionen af ren Ilt i en ren Oxyhæmoglobinopløsning under forskjellige Betingelser. Det er som bekjendt forbundet med ikke ringe Vanskelighed at arbejde med ren Ilt; at jeg desuagtet ved de absorptiometriske Bestemmelser har foretrukket dette fremfor at benytte Luftblandinger og bagefter at beregne Iltens Partiartryk, har sin Grund i følgende Betragtning.

For det første frygtede jeg for derved at gjøre Forsøgene altfor complicerede; Forsøgsbetingelserne ere nemlig selv ved Arbejdet med en enkelt Luftart ikke ganske simple, idet det drejer sig om Iltens Optagelse af et dissociabelt Stof, der er opløst i en Vædske, som selv maa antages at kunne absorbere Ilt efter den Henry'ske Lov men med ubekjendt Absorptionscoefficient.

Desuden kunde man paa ingen Maade lade de ved Arbejde med Luftblandinger uundgaaelige Fejl i Luftanalysen ude af Betragtning, isærdeleshed ikke her, hvor man maa arbejde med meget smaa Partiartryk. Endelig maa ogsaa den Kjendsgjærning, som senere hen vil blive omtalt, at Ilten ved lave Tryk afviger betydelig fra den Boyle-Mariotteske Lov bringe os paa den Formodning, at Dalton's Lov ved lave Partiartryk ikke er tilstrækkelig nøjagtig til Beregning af absorptiometriske Forsøg, ved hvilke som bekjendt smaa procentiske Fejl i Trykket kunne faa ikke ringe Betydning.

Men naar man skulde arbejde med ren Ilt, maatte Absorptiometret, dersom det skulde anvendes ved disse Forsøg, for det første kunne arbejde ved meget lave Tryk (indtil 1 Mm. eller derunder), og desuden maatte Kviksølvet under ingen Omstændigheder blive rystet sammen med Vædsken. I saa Fald kan man nemlig, som Bunsen (Gasometrische Methoden 1877 Pag. 220) har vist, ikke udføre nøjagtige absorptiometriske Bestemmelser med ren Ilt, hvilket er Grunden til, at Iltens Absorptionscoefficient i Vand, saavidt jeg ser, indtil nu aldrig med tilstrækkelig Nøjagtighed er bleven direkte bestemt; i hvert Tilfælde ere de sædvanlig benyttede Værdier for Iltens Absorptionscoefficient, som skyldes Bunsen, fundne ad indirekte Vej (se Bunsen l. c. Pag. 225).

Ved de temmelig talrige indledende Forsøg, som jeg, førend jeg accepterede den neden for beskrevne Fremgangsmaade, har udført efter forskjellige Methoder og med forskjellige Apparater, blev jeg endvidere tvungen til at stille følgende Fordringer til Absorptiometret: Vædskens Udkogning maa finde Sted i selve Apparatet; for det første for at sikre sig den størst mulige Renhed under Arbejdet, idet det er særdeles vanskeligt at undgaa Forurensning af Vædsken, naar den skal indføres i Absorptiometret gjennem Kviksølv. Det turde desuden ikke være til at forhindre, at et saa let ilteligt Stof som Hæmoglobinet ved Indførelsen i Apparatet optager en kjendelig Mængde Ilt, og en saadan Iltoptagelse kan meget let gjøre Bestemmelserne ved lave Ilttryk illusoriske.

Det maatte fremdeles anses som meget ønskeligt, at man før hvert enkelt Forsøg kunde sikre sig, at Apparatet indenfor Iagttagelsesgrændsen (nogle Hundrededele Millimeter Tryk) var fuldstændig lufttomt. Naar man stiller denne Fordring, vil man snart komme til ved Udkogning af Vædsken kun at benytte den Hagenske Pumpe (eller i hvert Fald Luftpumper af lignende Konstruktion).

Desuden var det ogsaa nødvendigt at undgaa Indførelsen af i Forvejen afmaalte Mængder Ilt over Kviksølvet, fordi paa denne Maade mindre Kvantiteter let kunde gaa tabt, og Luftarten maatte derfor kunne maales efter Indfyldningen i Apparatet, men dog før Berøringen med Vædsken.

Sluttelig maatte der med samme Vædske kunne anstilles en hel Serie af Bestemmelser ved forskjellige Tryk i vilkaarlig Rækkefølge; thi kun paa den Maade var det muligt

at faa Oplysning, om der havde fundet et Tab af Ilt Sted under Forsøget, hvad der som bekjendt ikke sjældent kan indtræde.

Methodens Hovedtræk. Selve Absorptiometret har den i Figur 1 fremstillede Form. Det med en Inddeling forsynede, omtrent 1 Centimeter vide, meterlange Rør har ved *a* en Slibning, for at det kan forbindes med Luftpumpen, og rager med sin nederste aabne Ende ned i det med Kviksølv fyldte Glaskar *g*; *b* og *c* ere fuldstændig lufttæt slebne Haner; den til højre for Hanen *c* liggende Del af Apparatet indeholder i den circa 60 Cbc. store Kugle *d* Vædsken, hvis Absorptionsforhold skal undersøges. Paa den nedenfor nærmere beskrevne Maade bliver først Vædsken og det hele Apparat pumpet lufttomt; hvorved Kviksølvet stiger op i Røret *a*—*g*. Medens Hanen *b* er lukket, og Hanen *c* er aabnet, bliver dernæst Apparatets Lufttomhed kontrolleret. Dersom denne findes tilfredsstillende, bliver Hanen *c* lukket, og gjennem Kviksølvet i Glasset *g* indføres nogen Ilt i Røret *a*. Efter Aflæsning af Tryk, Temperatur og Volumen, (som er bestemt ved Vejning med Kviksølv) lader den Mængde Ilt, der findes i Apparatet, sig beregne. Nu bliver Hanen *c* aabnet, og Vædsken *d* bliver paa følgende Maade rystet stærkt sammen med Luften i Apparatet: Noget under Midten af Røret *a* befinder sig en med Røret ubevægelig forbundet Jernrulle *ff* (Formen af denne Rulle ses paa Figur 2*f*); den glider i en efter den tilpasset Klemme *e* (Fig. 1). Fra *f* udgaar 2 Snore, som (paa en senere beskreven Maade) kunne trækkes frem og tilbage og derved give Rullen *f* og med den Røret *a* en hurtig frem og tilbagegaaende Bevægelse om sin Længdeaxe.

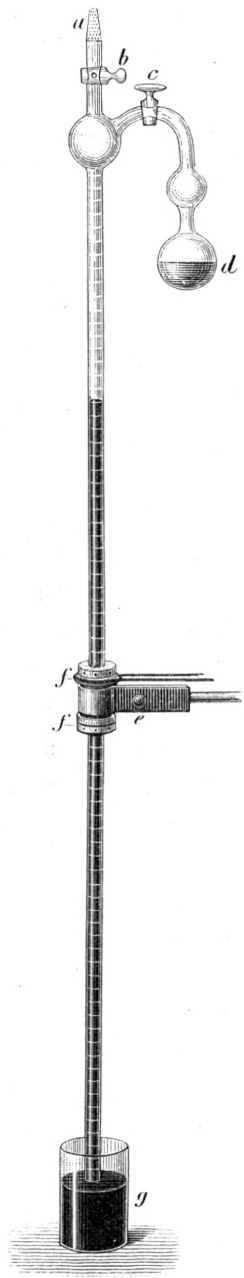


Fig. 1.

Kviksølvsøjlen i *a* bliver herved, naar Apparatet er rigtig indstillet, staaende helt rolig; der bemærkes kun en langsom Stigning af Kviksølvet paa Grund af den stedfundne Luftabsorption; derimod bliver Vædsken i *d*, ved den hurtig frem og tilbagegaaende Bevægelse af Kuglen, meget stærkt rystet, uden at dog en eneste Draabe af Vædsken sprøjter op til Hanen *c*. Efter nogen Tids Forløb stiger Kviksølvsøjlen i *a* ikke mere, og Absorptionen er da tilendebragt. Efter Aflæsningen af Tryk, Temperatur og Volumen (Vædskens Volumen bliver bestemt paa en nedenfor nærmere angiven Maade), lader Mængden af den i Apparatet værende Luft sig bestemme. Denne viser sig nu at være ringere end før Absorptionen, og Differensen er absorberet af Vædsken.

Man kan nu med samme Vædske paa følgende Maade udføre et Absorptionsforsøg ved højere Tryk: Umiddelbart efter Aflæsningen af Tryk og Temperatur ved Slutningen af Absorptionen bliver Hanen *c* lukket; da Volumenet i den til højre for *c* liggende Del af Apparatet er bekjendt, véd man nøjagtig, hvor stor en Luftmængde der befinder sig frit i de til højre for Hanen *c* liggende Afsnit (2 Kugler og Haneboringen ved *c*). Desuden ved man, hvormeget Luft Vædsken allerede har absorberet, og saaledes er hele Luftmængden tilhøjre for Hanen *c* bekjendt. Nu bliver der, imens Hanen *c* er lukket, indført Ilt i Røret *a*. Paa sædvanlig Maade (Bestemmelse af Tryk, Volumen og Temperatur) bliver dernæst hele Luftmængden i Røret *a* bestemt. Denne Luftmængde, adderet til den til højre for Hanen *c* værende Luftmængde, giver Summen af hele den i Apparatet tilstedeværende Iltmængde. Naar nu Hanen *c* bliver aabnet, og Vædsken rystes paa ovenfornævnte Maade, saa finder Absorptionen denne Gang Sted under et højere Tryk. Efter at Absorptionen er bleven tilendebragt, vise Maalingerne, hvor stor en Luftmængde der befinder sig frit i Apparatet, og hermed ere de nødvendige Forudsætninger givne til Beregning af Absorptionen under højere Tryk. Denne Fremgangsmaade kan naturligvis gjentages.

Naar man ønsker at foretage en Række Bestemmelser ved aftagende Tryk, lukker man paa samme Maade som ovenfor beskrevet Hanen *c* umiddelbart efter, at den absorptiometriske Bestemmelse er foretagen, og hele Luftmængden til højre for denne Hane bliver beregnet. Nu bringes Absorptiometret i Forbindelse med Pumpen ved Hjælp af Slibningen *a*, og efter at Hanen *b* er bleven aabnet, bliver Apparatets til venstre for Hanen *c* liggende Del gjort fuldstændig lufttom. Derefter lukkes Hanen *b*, Apparatet skilles fra Pumpen, og Hanen *c* aabnes; saaledes er hele den i Apparatet forekommende Iltmængde bekjendt, og man kan nu udføre en Absorptionsbestemmelse ved et lavere Tryk end før, idet man subtraherer den Luftmængde, der ved Slutningen af denne Absorption findes frit i Apparatet, fra den bekjendte totale Luftmængde. Nu kan Hanen *c* igjen lukkes, de til venstre for den liggende Dele atter udpumpes, og paa denne Maade kan der foretages en ny Bestemmelse.

Vandforsøg. Med dette Apparat har jeg foruden Forsøgene over Iltoptagelsen i forskjellige Oxyhæmoglobinopløsninger tillige foretaget Forsøg over Iltens Absorption i destilleret Vand. Dels vilde jeg derved undersøge Apparatets Nøjagtighed; dels vilde jeg ved lave Tryk prøve Rigtigheden af den Henryske Lov, for hvilken jeg ved Forsøgene med Hæmoglobin havde Anvendelse. Fremgangsmaaden ved Vandforsøgene var i det Hele den samme, som ved Hæmoglobinforsøgene, kun maatte ved disse sidste anvendes nogle Kauteler i Betragtning af Oxyhæmoglobinopløsningens temmelig store Tilbøjelighed til Decomposition. Det synes mig hensigtsmæssig først senere at gjøre Rede for disse Forsigtighedsregler, og jeg vender mig nu, for at tydeliggjøre Detaillerne ved Methoden, først til de Absorptionsforsøg, der ere anstillede med destilleret Vand.

Den anvendte Ilt blev altid fremstillet ved Opvarmning af ren Kviksølvilte, den blev udviklet umiddelbart før, den skulde bruges, og blev opsamlet i et Bunsen'sk Kviksølvgasometer paa den Maade, som nærmere er angivet i en Afhandling om den Boyle-Mariotte'ske Lov, der er optaget i Vidensk. Selsk. Skr. 6te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 2det Bind Nr. 9. Ilten kan, naar den fremstilles paa denne Maade, faas meget ren. Vandet destillerede jeg selv under Hensyntagen til de Oplysninger, R. Bunsen (Gasometrische Methoden 1877, Pag. 222) har givet om de herhenhørende Fejlkilder.

Efter at Absorptiometret var bleven fuldstændig renset og tørret, og Hanerne vare blevne omhyggelig indsmurte med en Blanding af Vox og Fedt, saaledes at intet Fedt kunde komme ind i Haneboringen, blev Vandet fyldt i paa følgende Maade:

Paa et Glasrør *e* (Fig. 4, Side 440) bliver et Stykke godt fransk Katheter *g* befæstet ved Hjælp af en Kautschukslange *f*; Røret bliver indført paa en saadan Maade, at Katheteret igjennem Haneboringen *n* (Fig. 4) rager ind i den øverste Kugle paa Absorptiometret. [Da alle de øvrige i Figur 4 afbildede Apparatdele tjene til andre Formaal, maa man her tænke sig dem fjærnede.] Ved Hjælp af en Tragt, som er anbragt paa Røret *e*, bliver Vandet bragt ind i Absorptiometerkuglen, uden at de andre Dele af Apparatet blive befugtede, og Indledningsrøret bliver dernæst fjernet.

Derpaa bliver Absorptiometret anbragt for den Hagen'ske Pumpe ved Hjælp af Slibningen *c* Fig. 2 (*a* Fig. 1); den nederste Del af Absorptiometret rager ned i den med Kviksølv fyldte Skaal *g*.

I Figur 2 betegner *a* Svovlsyrebeholderen paa den Hagen'ske Pumpe; *b* er en Hane, ved Hjælp af hvilken Vædskens Fordampning i Absorp-

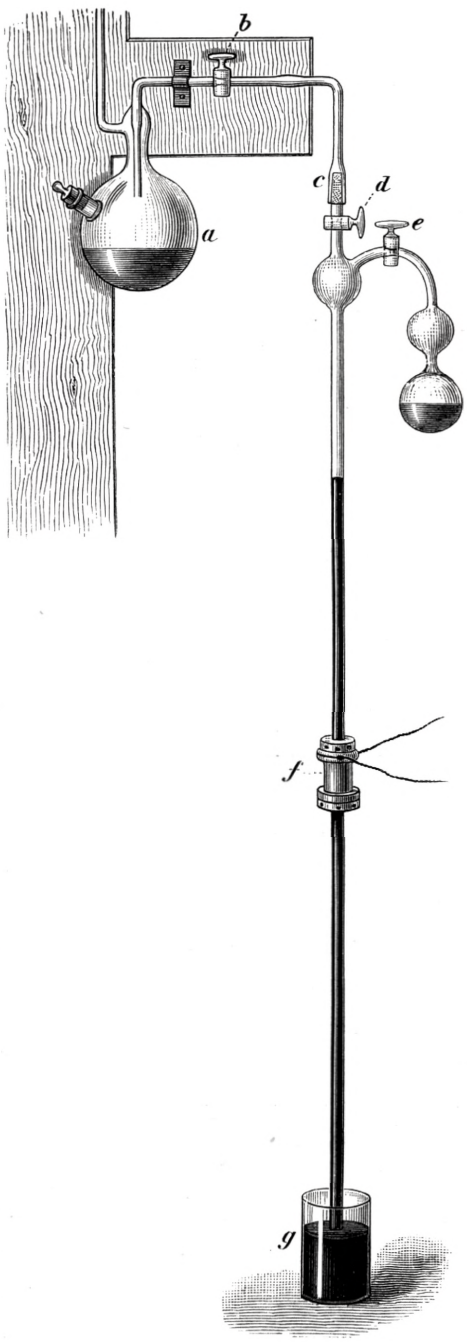


Fig. 2.

tiometret under Udpumpningen bliver reguleret; Hanerne *d* og *e* blive paa dette Tidspunkt ikke benyttede. Ved for hyppig Brug blive de indfedtede Haner nemlig let mindre paalidelige i deres Virkning, isærdeleshed naar, som det er Tilfældet her, Glasvæggene under Udpumpningen af og til beslaa sig med Dug. Hanerne blive derfor skaanede til det egenlige Forsøg.

Den største Del af den i Vandet optagne Luft lader sig som bekjendt let uddrive ved Udpumpning; de Spor, som endnu blive tilbage, efter at den i Begyndelsen meget livlige Kogning af Vædsken er ophørt eller kun finder Sted sjeldent og stødvis, ere derimod meget vanskelige at skaffe bort. Det lykkes dog at befri Vandet fuldstændig for Luft paa følgende Maade:

Naar Vædsken har hørt op at koge, bliver Pumpen og det derpaa befæstede Absorptiometer hurtig gjort muligst lufttomme og Hanen *b* (Fig. 2) lukket; man griber nu Absorptiometret med den højre Haand tæt under Hanen *d* (Fig. 2), medens man med den venstre Haand støtter Slibningen *c* (Fig. 2) paa den Hagen'ske Pumpe. Idet man nu trykker Absorptiometret fast ind i Slibningen *c* (Fig. 2), drejer man det hurtig frem og tilbage om Kviksølvsøjlens Axe; paa denne Maade bliver Vædsken i Kuglen meget stærkt rystet, hvorved der bliver noget Luft fri, som, efter at Hanen *b* (Fig. 2) er bleven aabnet, udbreder sig i Pumpen. Den størst mulige Luftfortynding bliver nu frembragt i Absorptiometret, derpaa rystes Vædsken igjen, og denne Proces bliver gjentaget, indtil der ikke mere ved Rystningen træder nogen Luft over i Pumpen. Paa denne Maade fortsættes Pumpningen i Almindelighed i 24 Timer eller endnu længere med større eller mindre Mellemrum. Saa bliver Hanen *d* (Fig. 2) lukket, og Absorptiometret fjærnes fra Pumpen, hvorved man naturligvis maa sørge for, at den nederste Ende ikke bliver løftet op af Glasset *g*; det Hele bliver dernæst anbragt paa Stativet *hh* Tavle I, og dette bliver fastgjort i Vandbeholderen *AAA*. Højden af den Støbejerns Vandbeholder er noget over 1 Meter, og dens Diameter c. 40 Cm. Paa Beholderens Væg er der i hele dens Højde anbragt et c. 10 Cm. bredt Glasvindu, for at gjøre det muligt herigjennem at aflæse de Apparater, der findes i Beholderen. I Bunden er denne forsynet med 2 Haner *x* og *y*. Gjennem den ene kan Beholderen efter Behag sættes i Forbindelse med Vandledningen eller et Afløbsrør, gjennem den anden kan der føres varmt Vand ind fra et Reservoir. Paa Tavle I betegner den punkterede Linie *z* Vandstanden i Beholderen under Forsøgene.

Stativet *hh* stikker med Tappen *i* (Tavle I) i en passende Fordybning i Bunden af Vandbeholderen og bliver oppe ved Randen skruet fast med den paa Figuren kun antydede Klemme *s*. Paa denne Maade staar Stativet urokkeligt fast i Beholderen, og lader sig dog let tage ud og igjen fastgjøre paa det rigtige Sted. Som man kan se af Tavle I, bærer en Jernplade paa Stativet Absorptiometrets Kviksølvglas *k*; Absorptiometerrøret selv bliver ved Hjælp af Rullen *f* (Fig. 2) og Klemmen *l* (Tavle I cfr. *e* Fig. 1) fastholdt paa en saadan Maade, at det kan dreje sig om sin Axe, saaledes som det allerede overfor er fremstillet;

Klemmen m, hvori Absorptiometret let kan dreje sig, tjener som Fører. Paa Absorptiometrets Rulle er der befæstet 2 Snore; hver af disse glider over en paa Stativet anbragt Tridse n (Tavle I), og derfra føres de videre over to paa Vandbeholderens Rand befæstede Tridser. I Snoren p er der ophængt en Vægt, medens den anden Snor q excentrisk er fastgjort paa Skiven r. Medens Skiven r, som drives af en Motor, gjør en halv Omdrejning, trækker den i Snoren q og drejer derved Absorptiometret om dets Axe et Stykke henimod den ene Side. Ved den næste halve Omdrejning af Skiven r slappes Snoren q, og den ved p hængende Vægt trækker saa Absorptiometret hurtig til den anden Side. Paa denne Maade bliver den i forrige Afsnit beskrevne Rystning af Vædsken tilvejebragt.

Undersøgelse paa Lufttomhed. Efter at Absorptiometret er bleven anbragt i Vandbeholderen, bliver først dets Lufttomhed prøvet ved Bestemmelse af det deri herskende Tryk, idet dette sammenlignes med Vanddampenes Spænding ved den foreliggende Temperatur. Naar denne Prøve falder tilfredsstillende ud, bliver Hanen c (Fig. 1) lukket og Absorptiometret taget op af Vandbeholderen. Nu bliver en passende Mængde Ilt bragt ind i Absorptiometret fra det Bunsen'ske Kviksølvgasometer gjennem et kapillært Tilledningsrør. Stativet hh, som bærer Absorptiometerrøret, bliver igjen anbragt paa sin Plads i Vandbeholderen, og de nødvendige Maalinger udført for at bestemme Mængden af den Ilt, der nu findes i Absorptiometerrøret. Forsøget fortsættes derpaa ganske som anført Side 423 idet Hanen c (Fig. 1) bliver aabnet, og Vædsken ved Hjælp af en Motor rystes meget heftigt frem og tilbage (3 Gange i Sekundet), indtil Kviksølvsøjlens Højde i Absorptiometerrøret ikke mere forandrer sig, hvorpaa atter den frie Luftmængde, der nu befinder sig i hele Apparatet, bestemmes paa sædvanlig Maade. Man har da, som man ikke nærmere behøver at forklare, de nødvendige Data til Beregning af den i Vædsken absorberede Luftmængde, og kan nu, som beskrevet ovenfor Side 424, føre Forsøget videre, idet man, efter at have lukket Hanen c (Fig. 1), enten paa ny leder Ilt ind, eller gjør den Del, der ligger til venstre for Hanen c, fuldstændig lufttom. Et Exempel, der er meddelt længere nede, vil forhaabentlig bidrage til Forstaaelse af Forsøgsmaaden.

Bestemmelse af Spænding og Temperatur i Absorptiometret. Endnu staar tilbage at beskrive, hvorledes Spændingen og Temperaturen i Absorptiometret kan foretages med tilbørlig Nøjagtighed, ligesom ogsaa paa hvilken Maade Bestemmelsen af Vædskemængden i Absorptiometret udføres.

Bestemmelsen af Trykket i Absorptiometret sker paa følgende Maade: Et i Vandbeholderen (se Tavle I) befæstet Stativ tt bærer ved Hjælp af en Jernplade Kviksølvglasset u, hvori Barometerrøret bb var anbragt; Glasset u var anbragt i samme Højde som Absorptiometrets Glas k. Efter at Absorptiometret var bleven befæstet paa sin Plads i Vandbeholderen, blev paa en Maade, som strax skal beskrives, Glasset u sat i Forbindelse med Glasset k, hvorved Kviksølvoverfladerne i de to Glas indstillede sig i samme horizontale

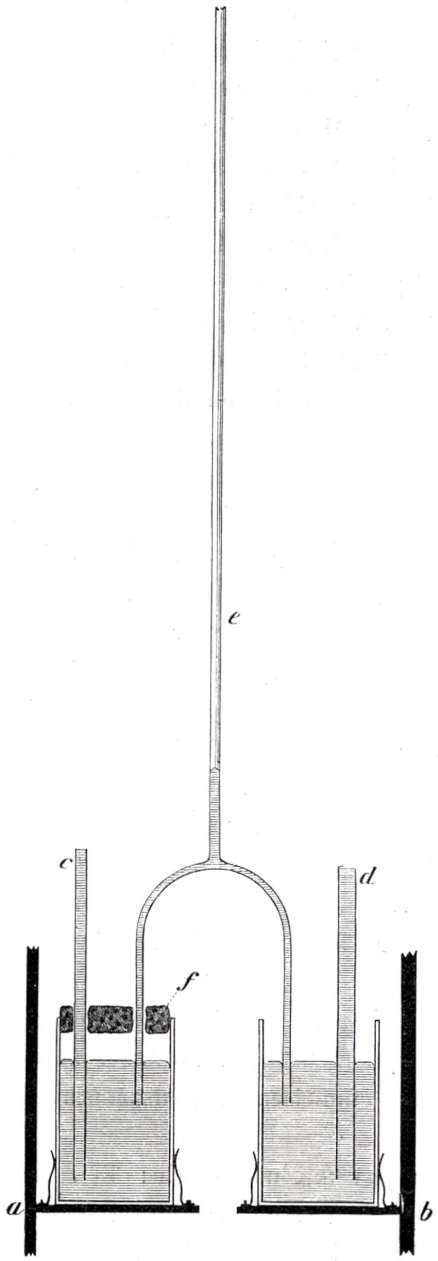


Fig. 3.

Niveau; Trykket i det indre af Absorptiometret kunde da maales ved den vertikale Afstand mellem Kviksølvoverfladen i Barometret *bb* og i Absorptiometerrøret *aa* (Tavle I). Denne Afstand blev maalt ved Hjælp af et Kathetometer, der var opstillet foran Vandbeholderens Glasvindue. Foruden de almindelige Korrektioner med Hensyn til Kviksølvsøjlens Temperatur og Vanddampspændingen i Absorptiometret, blev der stadig foretaget Correction med Hensyn til Haarrørs-Depressionen efter Mendelejeffs Tabeller. For at kunne udføre den sidste Rettelse var Barometerrørets og Absorptiometerrørets Diameter nøjagtig bestemt, og ved hver Trykbestemmelse blev Højden af begge Menisker maalt.

Begge Karrene *u* og *k* bleve satte i Forbindelse med hinanden paa en Maade, som for det Første tillod at bringe Communicationen hurtig og sikkert i Stand og paa den anden Side gjorde det muligt lige saa hurtig at bringe Karrene ud af Forbindelse med hinanden, naar, som det skete ved hvert Forsøg, Absorptiometret skulde løftes op af Vandbeholderen.

Et simpelt meterlangt Gaffelrør af Glas, hvis Form og Størrelse ses af *e* Fig. 3 og *c* Tavle I blev med Gaflen vendende nedad, og medens dets øverste Ende holdtes lukket med Pegefingeren, stukket ned i Vandbeholderen, saaledes at den ene Gren af Gaffelen førtes ned i Glasset *k* og den anden i Glasset *u*. Da Rørets øverste Ende var lukket, medens det sænkedes ned i Vandet, trængte der sig kun en lille Vandsøjle ind i det; efter at Glasrøret var bleven anbragt paa sin Plads, som Figur 3 viser, blev Fingeren fjernet fra den øverste Ende, og det næsten meterhøje Vandtryk, som hvilede paa Kviksølvoverfladerne i *k* og *u* (Tavle I), drev nu Kviksølvet op til over Gaffeldelingen i Røret; herved blev en hævertformig Forbindelse tilvejebragt mellem Kviksølvet

i de to Kar *u* og *k*. Naar Forbindelsen skulde ophøre, blev Gaffelen simpelt hen trukket op af Kviksølvet.

(I Figur 3 betyder *a* Barometrets Stativ, *b* Absorptiometrets Stativ, *c* den nederste Ende af Barometerrøret, *d* den nederste Ende af Absorptiometerrøret, *e* Gaffelrøret, *f* er en gjennemboret Korkprop, der uden at slutte vandtæt, letter Anbringelsen og Fastholdelsen af Glasrøret.)

Temperaturen blev bestemt ved Hjælp af Normalthermometret *d* Tavle I. Beliggenheden af Nulpunktet paa dette, af mig selv kalibrerede Thermometer, blev hyppig kontrolleret. For at tilvejebringe ensartet Temperatur i den temmelig høje Vandbeholders forskjellige Lag blev en Blander med halvmaaneformet Plade *ee* (Tavle I) uafbrudt bevæget op og ned i Føringen *f* ved Hjælp af en Motor.

Bestemmelse af Vædskemængden i Absorptiometret. Bestemmelsen af den absorberende Vædskemængde, som her, da Udkogningen foregaar i selve Absorptiometret, nødvendigvis maa foretages ved Slutningen af Forsøget, kan ske, ved at man først vejer hele Absorptiometerrøret ved Begyndelsen af Forsøget, før man hælder Vædsken i, og saa igjen, naar Forsøget er endt. Hvor ingen tilstrækkelig fin Vægt af passende Dimensioner staar til Raadighed, kommer man ogsaa med temmelig stor Nøjagtighed til Maalet paa følgende Maade:

Efter Forsøget bliver Kviksølvet fuldstændig fjernet fra Absorptiometerrøret, og dette bliver, om fornødent, aftørret indvendig ved Hjælp af Trækpapir. Derpaa bliver Hanen *b* (Fig. 1) lukket, Hanen *c* (Fig. 1) aabnet, og efter at Absorptiometret er blevet stillet med Slibning *a* (Fig. 1) nedad, bliver den aabne Ende, der nu vender opad, ved Hjælp af en Kautschukslange sat i Forbindelse med en Vandluftpumpe, og Indholdet af Kuglen *d* (Fig. 1) suget op i den kugleformede Udvidelse paa Absorptiometerrøret. Hanen *c* (Fig. 1) bliver derpaa lukket og Absorptiometret skilt fra Vandluftpumpen. Hovedmassen af Vædsken bliver nu, idet Apparatet vendes om, heldt over i en Kolbe af bekjendt Vægt og derpaa vejet; hvad der endnu bliver hængende paa Væggene af Apparatet, bestemmes paa den Maade, at en Glasmanchet *k* (Fig. 4 Side 440) hurtig og uden at der gaar en Draabe af Vædsken tilspilde, bliver skudt hen over den nederste Ende af Absorptiometerrøret og dér lufttæt befæstet ved en Kautschukprop (se Fig. 4); saa bliver et langt Glasrør *e* (Fig. 4), paa hvilket et fransk Katheter *g* (Fig. 4) er bundet fast ved Hjælp af et Stykke Kautschukslange *f* (Fig. 4) skudt ned i Absorptiometret, og derpaa ved Hjælp af en Kautschukprop lufttæt forbundet med Glasmanchetten paa den Fig. 4 fremstillede Maade. Medens Absorptiometrets Kugler ere nedsænkede i et Vandbad, bliver nu en Luftstrøm, der iforvejen er bleven fuldstændig tørret over Svovlsyre ved Hjælp af en Aspirator, indsuget gjennem Røret *i* (Fig. 4) paa Glasmanchetten. Efter at Luftstrømmen paa Vejen igjennem Apparatet er bleven mættet med Vanddamp, bliver den igjen suget ud gjennem Røret *e* (Fig. 4); derefter pas-

serer Luftstrømmen tre forud afvejede Rør med Svovlsyre, til hvilke den afgiver al sin Fugtighed, og hvis Vægtforøgelse, naar Absorptiometerrøret er blevet fuldstændig tørt, angiver hele den i Røret tilbageblevne Vædskemængde.

Iltens Afvigelse fra den Boyle-Mariotte'ske Lov. Før jeg gaar over til Fremstillingen af de ved Forsøgene over Vandets Absorption af Ilt fundne Resultater, vil jeg, som ovenfor berørt, ved et Exempel med gjennemført Beregning, gjøre Brugen af Apparatet saa tydelig som mulig. Jeg maa herved bemærke, at de fornødne Omregninger fra et Tryk til et andet ikke ere foretagne efter den Boyle-Mariotte'ske Lov; Ilten afviger nemlig (hvad jeg for kort Tid siden har vist i en i Vidensk. Selsk. Skr., 6te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 2det Bind. Nr. 9 offentliggjort Afhandling) især ved lave Tryk temmelig meget fra den omtalte Lov.

Her kan jeg under Henvisning til den citerede Afhandling indskrænke mig til den Bemærkning, at for Iltens Vedkommende Afhængigheden mellem Spænding p og Volumen v med meget stor Tilnærmelse lader sig udtrykke ved Formlen $v\ (p + 0{,}109) = k$, naar Trykket er over 0,7 Mm. Denne Formel er derfor benyttet ved de følgende Beregninger.

Forsøg over Iltens Absorption i destilleret Vand.

I det Følgende betyder:

p Trykket i Mm. Kviksølv ved 0°, efter at samtlige Correctioner ere indførte, og efter at Vanddampenes Spænding ved den foreliggende Temperatur er fradraget.

T Temperaturen beregnet i Grader efter Celsius.

v Rumfanget af de til venstre for Hanen c Fig. 1 liggende Dele af Absorptiometret.

v_1 Rumfanget af de til højre for Hanen c Fig. 1 liggende Dele af Absorptiometret.

Samtlige Rumfang ere angivne i Cubiccentimeter.

V betyder Luftens Rumfang ved 0° og 760^{mm} Kviksølvtryk.

0 betyder Ilt.

abs. betyder absorberet.

Vægtangivelserne ere reducerede til Vacuum.

Vædskemængde i Gram . . . . . = 47.602.
do. i Cbc. ved 20° . . = 47.683.
v_1 (efter Fradrag af 47.683) . . . . = 36.016.

I. Før Forsøget.

$p = -0.03$ $T = 20°1$.

II. 1ste Tilledning af 0.

$p = 37.74$ $v = 38.834$ $V = 1.8008$ $T = 20°12$.

III. 1ste Absorptionsbestemmelse.

$p = 19.71$ $v + v_1 = 73.306$ $V = 1.7796$ $T = 20°17$.

abs.: 1.8008 — 1.7796 = 0,0212.

Af v_1 kan man beregne den fri Iltmængde, der ved Hanen c's Lukning findes i de til højre liggende Kugler til 0.8744. De hermed analoge Størrelser betegnes i det Følgende med K.

IV. 2den Tilledning af 0.

$p = 145.51$ $v = 48.584$ $V = 8.6666$ $T = 20°15$.

Samtlig 0 i Apparatet = 8.6666 + 0.0212 + 0.8744 = 9.5622.

V. 2den Absorptionsbestemmelse.

$p = 95.36$ $v + v_1 = 80.253$ $V = 9.3850$ $T = 20°18.$
abs. $= 0.1772$ $K = 4.2116.$

VI. 3dje Tilledning af 0.

$p = 510.95$ $v = 81.047$ $V = 50.7355$ $T = 20°17.$
Samtlig 0 i Apparatet $= 50.7355 + 0.1772 + 4.2116 = 55.1243.$

VII. 3dje Absorptionsbestemmelse.

$p = 409.47$ $v + v_1 = 108.223$ $V = 54.2975$ $T = 20°16.$
abs. $= 0.8268$ $K = 18.0696.$

VIII. Udpumpning af de til venstre for Hanen *c* liggende Dele af Absorptiometret.

Samtlig 0 i Apparatet $= 18.0696 + 0.8266 = 18.8964.$

IX. 4de Absorptionsbestemmelse.

$p = 173.89$ $v + v_1 = 87.025$ $V = 18.5465$ $T = 20°20.$
abs. $= 0.3499$ $K = 7.6752.$

X. Udpumpningen som omtalt under VIII.

Samtlig 0 i Apparatet $= 7.6752 + 0.3499 = 8.0251.$

XI. 5te Absorptionsbestemmelse.

$p = 81.27$ $v + v_1 = 78.840$ $V = 7.8590$ $T = 20°17.$
abs. $= 0.1661$ $K = 3.5902.$

XII. Udpumpning (se VIII).

Samtlig 0 i Apparatet $= 3.5902 + 0.1661 = 3.7563.$

XIII. 6te Absorptionsbestemmelse.

$p = 39.60$ $v + v_1 = 75.234$ $V = 3.6591$ $T = 20°20.$
abs. $= 0.0972$ $K = 1.7517.$

XIV. Udpumpning (se VIII).

Samtlig 0 i Apparatet $= 1.7517 + 0.0972 = 1.8489.$

XV. 7de Absorptionsbestemmelse.

$p = 19.88$ $v + v_1 = 73.493$ $V = 1,7994$ $T = 20°20.$
abs. $= 0.0495$ $K = 0.8818.$

XVI. Udpumpning (se VIII).

Samtlig 0 i Apparatet $= 0.8818 + 0.0495 = 0.9313.$

XVII. 8de Absorptionsbestemmelse.

$p = 10.22 \quad v + v_1 = 72.618 \quad V = 0.9187 \quad T = 20°22.$

abs. = 0.0126.

Nedenfor ere Forsøgets Absorptionsbestemmelser tabellarisk angivne. De absorberede Luftmængder ere beregnede for 100 Cbc. Vand og udtrykte i Cbc. ved 0° og 760mm.

Nr. 1—3, hvor Trykket ved den foregaaende Absorptionsbestemmelse var mindre end ved den efterfølgende Bestemmelse, gave til Resultat:

		Tryk.	abs. af 100 Cbc. Vand.
Absorptionsbestemmelse	1	19.7	0.044
—	2	95.4	0.372
—	3	409.5	1.734.

Nr. 3—8, hvor Trykket stadig var større ved det foregaaende end ved det efterfølgende Forsøg, gave til Resultat:

		Tryk.	abs. af 100 Cbc. Vand.
Absorptionsbestemmelse	8	10.2	0.026
—	7	19.9	0.104
—	6	39.6	0.204
—	5	81.3	0.348
—	4	173.9	0.734
—	3	409.5	1.734.

Paa Tavle II *A* er givet en graphisk Fremstilling af det ovenfor meddelte Forsøg, idet Abscisserne fremstille Trykkene ($1^{mm} = 2^{mm}$ Kviksølvsøjle) og Ordinaterne de ved disse Tryk af 100 Cbc. Vand absorberede Iltmængder ($1^{mm} = {}^{2}/_{100}$ Cbc. Ilt ved 0° og 760mm).

Henrys Lov. De ved Forsøgets Nr. 1 og 2 bestemte Punkter ere paa Tavlen mærkede ved en lille Cirkel, og man vil se, at disse Punkter og Forsøgets Nr. 3 ligge i en ret Linie, ligesom ogsaa at Punkterne Nr. 3, 4 og 5 ligge i en ret Linie, som tilmed gaar nøjagtig gjennem Coordinaternes Begyndelsespunkt. Punkterne 5, 7 og 8 ligge fordelte omkring denne Linie, dels noget over, dels noget under den. Altsaa ligge alle de Punkter, som høre til Rækken af Bestemmelser med voxende Tryk (Nr. 1, 2, 3), paa en ret Linie, og denne Linie danner en meget lille Vinkel med den Linie, som følges af samtlige Punkter (Nr. 3—8) i Rækken med aftagende Tryk. Da denne sidste Linie tillige gaar igjennem Begyndelsespunktet, har Rækken med aftagende Tryk vist en saa godt som fuldstændig Overensstemmelse med Henry's Lov, da de smaa Afvigelser, der vise sig ved Tryk fra 40—17mm, ikke kunne komme i Betragtning paa Grund af den ringe absolute Størrelse af Absorptionen ved disse Tryk, og da de tilmed ikke afvige til samme Side af Linien. Naar Hensyn tages til den Maalestok, i hvilken Ordinaterne ere afsatte, kunde man vel rejse det Spørgsmaal,

om man overhovedet bør lægge nogen Vægt paa den Afvigelse, som Linien for voxende Tryk viser fra den nys omtalte Linie; Hovedsagen er imidlertid den, at man har fundet den absorberede Luftmængde lidt mindre ved voxende end ved aftagende Tryk; herved er det nemlig godtgjort, at man med dette Absorptiometer kan udføre en hel Række (i dette Tilfælde 8) Bestemmelser, uden at mærke endog blot Spor af Iltab, og det skjønt Iltens Tryk har naaet en saa betydelig Højde som 400mm. I denne Henseende viste Apparatet sig altsaa meget hensigtsmæssigt. Naar man nu fremdeles betænker, at disse Iltabsorptionsforsøg, som udførtes med kun circa 50 Cbcm. Vand ved Trykhøjder af mellem 400mm og 80mm, have givet indbyrdes saa godt som fuldstændig overensstemmende Resultat, og at Absorptionsbestemmelserne udførte ved c. 10mm Tryk endnu have vist sig brugbare, maa ogsaa Apparatets Nøjagtighed betegnes som tilfredsstillende.

Iltens Absorptionscoefficient. Efter at vi nu have sét, at Henrys Lov ved de undersøgte Forsøg kan ansés for exact, og at vi altsaa uden Betænkelighed kunne anvende den ved Hæmoglobinforsøgene, ville vi betragte Størrelsen af den fundne Absorptionscoefficient. Denne er ved 20°2 fundet = 0.03218, altsaa ikke ubetydelig større end den af Bunsen fundne Coefficient 0.02834. Anordningen af Forsøgene og den Maade, hvorpaa de ere udførte, gjør, at man, som alt ovenfor omtalt, ganske kan se bort fra den ellers nærliggende Tanke, at Forurensninger af Vandet, eller Dele af Apparatet, kan have bundet Ilt. Ikke heller kunne tilfældige Fejl i Bestemmelse af Apparatkonstanterne (Volumen etc.) forklare Uoverensstemmelsen. En ny Bestemmelse, ved hvilken ikke blot Ilten og Vandet var tilberedt paa ny, men hvor ogsaa Apparatet var et andet, gav nemlig (i god Overensstemmelse med den ovenfor fundne Værdi) Coefficientens Størrelse = 0.03272 ved 20°.

Forskjellem mellem disse Resultater og det af Bunsen fundne, hidrører maaske snarere derfra, at den nævnte Forsker var nødt til at gjøre Brug af Daltons Lov, som sandsynligvis ikke gjælder nøjagtig under de givne Omstændigheder.

Hæmoglobinforsøg. De Hæmoglobinforsøg, som her skulle meddeles, ere udførte ved 15° C. under forskjellige Illtryk. Da samtlige Forsøgsfactorer (Hæmoglobin, Ilt, absorptiometrisk Apparat) herved have varieret, uden at dette har haft nogen kjendelig Indflydelse paa Forsøgenes indbyrdes Overensstemmelse; kunne de ved Forsøgene opnaaede Resultater vel ansés for tilstrækkelig fastslaaede, og man kan ikke tage i Betragtning, at jeg ikke her har naaet en saa stor Nøjagtighed som ved Forsøgene med Vand. Dette følger allerede deraf, at den opløsende Vædskes Absorptionscoefficient indgaar som Led i Beregningen af den af Hæmoglobinet optagne Iltmængde. Bestemmelsen af denne Coefficient er imidlertid, som vi nedenfor skulle se, ikke uden Vanskelighed og lader sig næppe udføre fuldstændig exact.

Hæmoglobinets Fremstilling. Fremstillingen af det anvendte Hæmoglobin udførtes væsenlig efter den af Hoppe-Seyler angivne Methode; kun fortjener det at bemærkes, at Blodlegemerne, førend Hæmoglobinet blev adskilt fra deres Stroma, bleve fuldstændig renvadskede i Kogsaltopløsning ved Hjælp af Centrifugen.

Hæmoglobinet blev flere Gange omkrystalliseret; for at fremskynde Filtrationsprocessen, filtreredes gjennem Glasuld under Anvendelse af højt Tryk; kun Filtrationen af den sidste Opløsning udførtes ved Hjælp af godt Filtrerpapir.

For at kunne anvende det samme Hæmoglobin til flere Forsøg, bleve Opløsningerne opbevarede i smaa tilsmeltede Kolber (*a* Fig. 4); ved Hjælp af denne af Hoppe-Seyler angivne Methode holder Opløsningerne sig brugbare i en ubegrændset Tid. Naar en saadan Kolbe aabnes efter længere Tids Forløb, bemærker man ikke sjælden en mer eller mindre stærk aromatisk Lugt, som forsvinder ved energisk Udpumpning af Vædsken. Indheldningen af Hæmoglobinopløsningen i Absorptiometret, hvor den blev udpumpet inden Forsøget, foretoges, saaledes som det nedenfor nærmere skal beskrives, i en Brintstrøm.

Vædskemængden i Apparatet. Efter hvert absorptiometrisk Forsøg blev den anvendte Vædskemængde stadig bestemt, saaledes som det ovenfor er angivet under Vandforsøgene; ved Hæmoglobinforsøgene var det tillige hver Gang nødvendigt efter Forsøget at gjøre en særlig Bestemmelse af Opløsningens specifiske Vægt, samt at bestemme dens Indhold af Tørsubstans. Opløsningens specifiske Vægt blev bestemt, for derved at kunne omregne den i Gramvægt bestemte Vædskemængde til Cbcm. ved Forsøgstemperaturen; denne Størrelse maa nemlig kjendes, for at man skal kunne bestemme det af Luften i Absorptiometrets Kugle indtagne Volumen.

Tørsubstans. Bestemmelsen af Tørsubstans blev hver Gang udført saaledes, at 10—20 Gram af Opløsningen efter det absorptiometriske Forsøg blev afvejet i dertil egnede smaa Glasbeholdere, der lode sig lukke med tilslebne Laag, og derpaa strax inddampedes over Svovlsyre i Luftpumpens Klokke; ved tilstrækkelig stærk Luftfortynding (næsten Vacuum) udførtes Inddampningen af Vædsken i de temmelig brede Glasbeholdere i omtrent 12—24 Timer, uden at der fandt nogen Decomposition af Vædsken Sted. Tørringen over Svovlsyre fortsattes til fuldstændig konstant Vægt, og derpaa tørredes Resten atter i Varmekasse ved 115° til konstant Vægt. Denne Fremgangsmaade giver nøjagtig samme Resultater, som den af v. Noorden beskrevne Tørring i Brintstrøm, hvilket jeg har overbevist mig om ved Kontrolforsøg, anstillede med specielt Hensyn hertil. Efter hvert Forsøg blev Tørsubstansen bestemt i to forskjellige Prøver; Overensstemmelsen var som Regel fuldstændig tilfredsstillende.

Hæmoglobinets Krystalvand. Vægten af det over Svovlsyre tørrede Hæmoglobin, sammenholdt med det Vægttab, som de paagjældende Prøver undergik ved længere Tids

Opvarmning til 115°, kan benyttes til en Beregning af Hæmoglobinkrystallernes Krystalvand. Denne har jeg da ogsaa udført.

Da Hoppe-Seyler nemlig havde fundet, at forskjellige Dyrearters Hæmoglobinkrystaller indeholde en forskjellig Mængde Krystalvand (mellem c. 9 og 3 pCt.), saa syntes det mig hensigtsmæssigt at forsøge ogsaa Anvendelsen af saadanne Bestemmelser til Kontrollering af det anvendte Hundeblod-Oxyhæmoglobins Renhed; det syntes mig nemlig ønskeligt at kunne kontrollere Renheden paa saa mange Punkter som muligt. Ved disse Prøver viste det sig nu, at Mængden af Krystalvand i Hundeblod-Oxyhæmoglobin kan variere betydeligt, saaledes som det fremgaar af den nedenfor meddelte Tabel.

Tallene i første Kolonne giver de enkelte Forsøgsnumre, medens den 2den Kolonne indeholder en eller to Bestemmelser af den procentiske Krystalvandmængde (udtrykt i Gram for 100 Gram over Svovlsyre tørret Hæmoglobin) for hver Hæmoglobinprøve, den 3dje Kolonne giver Middeltallet af de to Bestemmelser i 2den Kolonne.

Tabel.

I.	II.	III.
1	6.022	6.022
2	6.479 6.098	6.289
3	4.432 4.627	4.529
4	4.681 4.116	4.642
5	1.375 1.116	1.246
6	6.227	6.227
7	6.227	6.227
8	3.514 3.457	3.486
9	5.285 5.511	5.398
10	5.474 5.446	5.460
11	3.310 3.240	3.280
12	5.36 4.78	5.07
13	2.875 3.164	3.019

Man ser af denne Tabel, at den procentiske Mængde af Krystalvand i Hundeblod-Oxyhæmoglobin kan variere imellem c. 6,3 og 1,2. Forskjellige Omstændigheder bragte

mig til at søge Grunden til denne Variation deri, at Vanddamptensionen under Fordampningen over Svovlsyre var forskjellig ved de forskjellige Prøver, alt eftersom Svovlsyren havde været anvendt længere eller kortere Tid og derfor allerede havde optaget mer eller mindre Vand. Denne Formodning fandt jeg bekræftet ved følgende Forsøg:

En Prøve af samme Hæmoglobinopløsning blev tørret til fuldstændig konstant Vægt ved samme Luftfortynding i to forskjellige Exsiccatorer, hvor Svovlsyrens Vandholdighed var noget forskjellig. Bestemmelsen af Krystalvandet gav i den ene Prøve 4,485 %; i den anden 2,426 %; et paa samme Maade udført Forsøg gav for en anden Hæmoglobinprøve 3,659 % Krystalvand i den ene Exsiccator og 1,573 i den anden. Den direkte Bestemmelse af Vanddamptensionen i Exsiccatorerne lod sig ikke udføre i de af mig benyttede Apparater, og jeg har derfor ikke videre forfulgt Undersøgelsen af dette Forhold, der ligger den foreliggende Meddelelse noget fjernere; men en Revision af Krystalvandsbestemmelserne i de forskjellige Dyrearters Oxyhæmoglobin synes mig dog herefter ikke uden Interesse.

Specifisk Vægt. Da der ved hvert Forsøg er gjort en nøjagtig Bestemmelse af den specifiske Vægt, saa bliver det muligt ved en Sammenstilling af alle disse Bestemmelser at prøve, om de af forskjellige Krystalfremstillinger tilberedte Hæmoglobinopløsninger viser samme Forhold mellem Hæmoglobinholdighed og specifisk Vægt, samt at undersøge, hvilken Indflydelse en langvarig Opbevaring af Opløsningerne i tilsmeltede Glas har herpaa. Der viste sig herved stadig en meget nøje gensidig Overensstemmelse i Bestemmelserne, saa at det endog var muligt omtrentlig at beregne Opløsningernes Hæmoglobinholdighed ved Hjælp af en Bestemmelse af den specifiske Vægt alene.

For nærmere at belyse Sagen anfører jeg nedenfor en Række tabellarisk ordnede Bestemmelser; de dèr anførte Forsøg stamme fra tre forskjellige Hæmoglobinfremstillinger, og Hæmoglobinholdigheden er bestemt dels i frisk Tilstand, dels efter længere Tids Opbevaring i tilsmeltede Glas.

Samtlige i Tabellen opførte specifiske Vægtangivelser ere reducerede til en Temperatur af 15° C.; for at kunne udføre dette, bestemte jeg Hæmoglobinopløsningernes Udvidelsescoefficient i Nærheden af denne Temperatur, og fandt, at den ikke i nogen kjendelig Grad var forskjellig fra Vandets.

For Fuldstændigheds Skyld bemærker jeg endnu, at Bestemmelserne ere udførte med et Pyknometer, der rummede omtrent 10 Cbc., og som var forsynet med Thermometer og Stigerør, og at jeg ved «specifisk Vægt for en bestemt Temperatur» forstaar Forholdet mellem Vægten af et Volumen af Vædsken ved denne Temperatur og Vægten af det samme Volumen Vand ved 4° C.

Tabel.

Nr.	I. Specifisk Vægt.	II. Iagttagne pCt. Hbg.	III. Beregnede pCt. Hbg.	IV.
1	1.0012	0.886	0.876	1.303
2	1.0027	1.497	1.514	1.310
3	1.0033	1.738	1.761	1.311
4	1.0053	2.655	2.611	1.300
5	1.0066	3.077	3.155	1.316
6	1.0078	3.736	3.653	1.297
7	1.0081	3.834	3.874	1.309
8	1.0084	3.986	3.908	1.298

Tabellens Kolonne I angiver den specifiske Vægt; Kolonne II det iagttagne procentiske Indhold af Hæmoglobin i de paagjældende Opløsninger (Gram i 100 Gram Opløsning); i Kolonne III har jeg opført det paa nedenanførte Maade af den specifiske Vægt beregnede Hæmoglobinindhold, og Tallene i Kolonne IV angiver for hver Opløsning Forholdet mellem den iagttagne Hæmoglobinmængde og den ved Opløsningen af det tørrede Hæmoglobin indtrædende Volumenforøgelse af det i 100 Gram Opløsning indeholdte Vand.

Et Exempel vil lettest vise, hvorledes Beregningen af disse Tal er udført. I Tabellen findes opført som Nr. 2 en Opløsning med 1,497 % Hæmoglobin; 100 Gram af Opløsningen indeholder altsaa 98,503 Gram Vand, som ved 15° indtager et Rumfang af 98,587 Cbc. Opløsningens specifiske Vægt er = 1,0027, og Volumen af 100 Gram Opløsning er altsaa ved 15° = 99,730 Cbc. Ved Opløsningen af det tørrede Hæmoglobin i Vand vilde altsaa 98,587 Cbc. Vand blive omdannet til 99,730 Cbc. Hæmoglobinopløsning, Volumenforøgelsen er altsaa 99,730 — 98,587 = 1,143; Forholdet mellem det procentiske Hæmoglobinindhold (1,497) og Volumenforøgelsen (1,143) er = 1,310. Disse Tal er opført i Kolonne IV.

Nu vise Tallene i Kolonne IV en saa stor Overensstemmelse, at man uden Betænkning kan betragte dem som konstante, navnlig da der ikke viser sig nogen af den procentiske Hæmoglobinholdighed afhængig Regelmæssighed i Afvigelserne fra Middeltallet. Følgende Forhold mellem en Opløsnings Hæmoglobinholdighed i Vægtprocent (x) og den specifiske Vægt ved 15° (K) lader sig da, som man let ser, opstille, naar Vandets specifiske Vægt ved 15° er = 0,99916

$$\frac{100 - x}{0{,}99916} + \frac{x}{1{,}306} = \frac{100}{K}.$$

Efter denne Formel er Værdierne af x i Kolonne III beregnede.

Den store Regelmæssighed i de nys omtalte physikalske Forhold ved de af forskjellige Krystaller fremstillede Opløsninger synes mig i høj Grad at tale for det benyttede Hæmoglobins Renhed, og derfor har jeg ogsaa her behandlet dette Punkt noget udførligere.

Spektralundersøgelse. Ved nogle af de første Forsøg har jeg før og efter de absorptiometriske Maalinger bestemt det anvendte Hæmoglobins Spektralkonstanter ved Hjælp af det Glahn'ske Photometer; de før og efter Absorptionsforsøgene fundne Værdier viste sig saa godt som identiske. Jeg saa mig imidlertid nødsaget til at opgive denne Undersøgelse, da jeg ikke kunde finde Tid til at udføre den samtidig med de mange Bestemmelser, der vare absolut nødvendige ved hvert enkelt Forsøg. Jeg maatte derfor nøjes med den simple, kvalitative Undersøgelse af Hæmoglobinspektret efter Tilendebringelsen af det absorptiometriske Forsøg. Hvor denne Undersøgelse viste en delvis Omdannelse af Farvestoffet til Methæmoglobin, blev Forsøget ikke benyttet.

Absorptiometriske Maalinger. Udførelsen af de absorptiometriske Forsøg med Hæmoglobinopløsninger foregik, som tidligere bemærket, i alt Væsentligt saaledes, som det er beskrevet ved Vandforsøgene. Kun Paafyldningen af Vædsken paa Absorptiometret og Fremgangsmaaden ved Udpumpningen var noget forandret, idet der blev sørget for, at de før Udpumpningen reducerede Hæmoglobinopløsninger aldeles ikke kom i Berøring med Ilt, medens Udkogningen for Luftpumpen fandt Sted. Dette viste sig nødvendigt for at forhindre den delvise Omdannelse af Hæmoglobin til Methæmoglobin under den temmelig langvarige Udkogning.

Paafyldning af Hæmoglobinopløsningen. Paa Fig. 4 findes gjengivet den Fremgangsmaade, der gjør det muligt at beskytte de i de tilsmeltede Kolber opbevarede reducerede Hæmoglobinopløsninger mod Iltens Adgang under Paafyldningen af Absorptiometret. Kolben a, der indeholder Hæmoglobinopløsningen, er med sin tilsmeltede Spids b indbundet i en Kautschukslange, der atter er lufttæt fastgjort til Tragten c. Tragten indeholder ved d noget Glasuld og staar ved Hjælp af en Kautschukslange i Forbindelse med det oftere omtalte Rør e; paa dette er ved f befæstet et Katheder g, der er ført ind i Absorptiometrets Kugle. Røret e er ved Hjælp af Glasmanchetten k lufttæt forbunden med Absorptiometerrøret paa en ved Hjælp af Figuren let forstaaelig Maade.

I Løbet af nogle Timer bliver der nu, medens Hanen m er lukket, ledet en renvadsket Brintstrøm ind i Apparatet gjennem det paa Tragten c fastsmeltede Rør h. Brinten passerer gjennem Røret e—g ind i Kuglen, gaar dernæst gjennem Haneboringen n, som naturligvis ikke helt udfyldes af g, og træder ved i ud af Apparatet. Efter at al athmosphærisk Luft er uddrevet af Apparatet, bliver den ved b indfilede Kolbehals brækket over og Kolbens Indhold hældt ud i Tragten h; Brinten trykker da Vædsken gjennem e og g ind i Kuglen. Naar dette er sket, bliver Røret e, uden at Apparatet tages fra hinanden, trukket et Stykke tilbage, indtil Enden af g er kommet ud af Haneboringen ved n, og Absorptio-

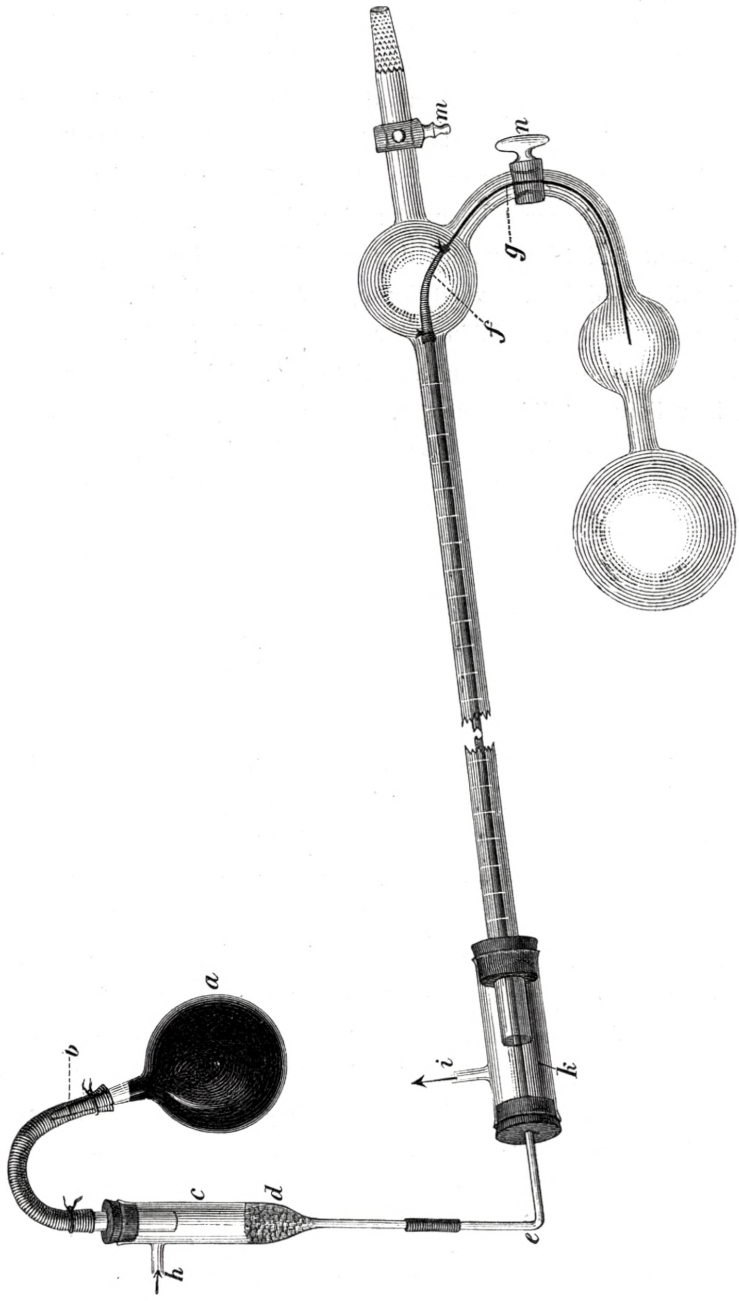


Fig. 4.

metret skilles, efter at Hanen *n* er lukket, fra de øvrige Dele. Absorptiometret bliver nu paa den i Fig. 2 gjengivne Maade sat i Forbindelse med Luftpumpen; imens forbliver Hane *n* Fig. 4 (*e* Fig. 2) lukket. Medens Hanerne *d* og *b* (Fig. 2) ere aabne, bliver dernæst Luftpumpe og Absorptiometerrør gjort fuldstændig lufttomme, saa først aabner man Hane *e* (Fig. 2), og Vædsken, der paa denne Maade slet ikke kan komme i Berøring med Ilten, bliver endelig udkogt.

Naar man anvender en frisk tilberedt Hæmoglobinopløsning, bliver den ved Hjælp af Røret *e* (Fig. 4) hældt ind i Absorptiometrets Kugle. Kuglen anbringes i Is, og en vedvarende Brintstrøm ledes gjennem *e* ind i Hæmoglobinopløsningen. Efter Reductionen bliver *e* trukket tilbage, Hanen *n* (Fig. 4) lukket og Vædsken derpaa ved Hjælp af Pumpen gjort lufttom, som ovenfor beskrevet.

Efter Udpumpningen bliver Absorptiometrets Lufttomhed prøvet paa det Omhyggeligste, Forsøget bliver dernæst udført ganske som ovenfor beskrevet under Vandforsøgene, og som det fremgaar af nedenstaaende Hæmoglobinforsøg, der exempelvis meddeles med alle Enkeltheder.

Det maa særlig fremhæves, at Forsøget, naar det engang er paabegyndt, maa føres til Ende uden Afbrydelse for at forhindre Hæmoglobinets Decomposition, hvilket dog ingenlunde altid er muligt, selv med Anvendelse af megen Omhu. I det Hele taget gaa af forskjellige Grunde ikke faa Forsøg tabt, hvilket jo ikke kan forundre ved saa complicerede Experimenter.

Bestemmelse af Damptensionen i Absorptiometret. Det maa endvidere bemærkes, at Damptensionen i Absorptiometret — som det fremgaar af derpaa særlig rettede Undersøgelser — er den samme som Vanddamptensionen ved tilsvarende Temperatur og ikke Hæmoglobinopløsningernes noget lavere Tension. (Denne sidstnævnte Tension er for en 2 pCt. Opløsning ved 15° henved $0{,}2^{mm}$ lavere end Vanddamptensionen ved 15°.) Selve Hæmoglobinopløsningens Tension er det temmelig vanskeligt at vedligeholde i længere Tid, og som det var at formode, indfinder den sig kun, naar Apparatets Vægge ere ganske tørre. Dette kan imidlertid ikke indtræde ved Forsøgene, da der altid bliver sørget for, at et begrændset Parti af Kuglen paa Absorptiometrets Rør er bedugget (hvilket f. Ex. kan opnaas ved at anbringe en Draabe Æther paa dens udvendige Væg, medens Hanen *c* Fig. 1 er aaben); paa denne Maade kan man være sikker paa, at ogsaa, naar Hane *c* Fig. 1 er lukket, Absorptiometerrørets Indre er opfyldt af mættede Vanddampe.

Undersøgelse paa Kulsyre. Sluttelig kan det anføres, at jeg af og til efter Forsøgene har prøvet Luften i Absorptiometret paa Kulsyre — dog stedse med negativt Resultat.

Forsøg over Iltens Absorption i en circa 2 pCt. Hæmoglobinopløsning.

Bogstaverne have samme Betydning som i Vandforsøgene Side 13.

Vædskemængde i Gram . . . . . = 36.655
Vædskemængde i Cbc. ved 15° . . . . . = 36.509
v_1 (efter Subtraction af 36.509) . . . . . = 49.047

Opløsningens Hæmoglobinholdighed i Vægtprocenter = $\begin{cases} 1.874 \\ 1.877 \end{cases}$ Middel = 1.876.

I 36.655 Gram Vædske 0.688 Gram Hæmoglobin.

I. Før Forsøget.

$p = -0.01$ $T = 15.0$.

II. 1ste Tilledning af O.

$p = 12.89$ $v = 0.5878$ $T = 15.0$.

III 1ste Absorptionsbestemmelse.

$p = 2.00$ $v + v_1 = 84.501$ $V = 0.2223$ $T = 15.0$
abs. $= 0.3655$ $K = 0.1291$.

IV. 2den Tilledning af O.

$p = 55.6$ $v = 38.015$ $V = 1.6861$ $T = 15.0$
Samtlig O i Apparatet $= 0.3655 + 0.1291 + 1.6861 = 2.1807$.

V. 2den Absorptionsbestemmelse.

$p = 12.16$ $v + v_1 = 85.201$ $V = 1.3036$ $T = 15.0$.
abs. $= 0.8771$ $K = 0.7509$.

VI. Udpumpning af de til venstre for Hanen *c* liggende Dele.
Samtlig O i Apparatet $= 0.8771 + 0.7509 = 1.6280$.

VII. 3dje Absorptionsbestemmelse.

$p = 7.64$ $v + v_1 = 84.709$ $V = 0.8183$ $T = 15.10$.
abs. $= 0.8097$ $K = 0.4741$.

VIII. 3dje Tilledning af 0.

$p = 463.37 \quad v = 72.808 \quad V = 42.0630.$

Samtlig 0 i Apparatet $= 0.8097 + 0.4741 + 42.0630 = 43.3466.$

IX. 4de Absorptionsbestemmelse.

$p = 308.24 \quad v + v_1 = 109.106 \quad V = 41.9440 \quad T = 15.04.$

abs. $= 1.4028 \quad K = 18.8674.$

X. Udpumpning som i VI.

Samtlig 0 i Apparatet $= 1.4028 + 18.8674 = 20.2702.$

XI. 5te Absorptionsbestemmelse.

$p = 157.49 \quad v + v_1 = 96.948 \quad V = 19.0526 \quad T = 15.0.$

abs. $= 1.2176.$

Hæmoglobin-Opløsningens Absorptionscoefficient. For at kunne bestemme den Iltmængde, som bindes af et Gram Hæmoglobin ved forskjelligt Tryk, mangle vi endnu Bestemmelsen af Hæmoglobinopløsningens physikalske Absorptionscoefficient. Denne er nødvendig for at kunne beregne, hvor meget af hele den absorberede Iltmængde, der ifølge Henry's Lov er opløst i Vædsken, og hvor meget der er optaget af Hæmoglobinet som dissociabel Forbindelse.

Hvis det var bekjendt, under hvilket Tryk Hæmoglobinet fuldstændig mættes med Ilt, saa lod den physikalske Absorptionscoefficient sig fastsætte gjennem en Række Forsøg udførte ved endnu højere Tryk. Det Tryk, under hvilket Hæmoglobinet opnaar sin højeste Iltmættelse, er imidlertid at betragte som ubekjendt, og man maa derfor prøve paa at slaa ind paa den modsatte Vej, idet man experimentelt søger at bestemme, ved hvilken Trykhøjde hele Absorptionen i Hæmoglobinopløsningen begynder at blive en retlinet Funktion af Trykkene; denne Trykhøjde kunde da med stor Sandsynlighed betragtes som den, ved hvilken Hæmoglobinet havde bundet det mest mulige Ilt, og af det retlinede Stykke kunde da Absorptionscoefficienten bestemmes ved Hjælp af den Henry'ske Lov[1]). Denne Methode kunde imidlertid ikke komme til Anvendelse, thi ved en Betragtning af samtlige Forsøg viste det sig, at den i Hæmoglobinopløsningen absorberede Iltmængde selv ved de højeste af de undersøgte Tryk ikke var nogen retlinet Funktion af Trykkene.

Kun ved et ganske enkeltstaaende men paa Grund af Mængden og Regelmæssigheden af Bestemmelserne (10 Enkeltbestemmelser) aldeles paalideligt Forsøg med en 2 pCt.

[1]) Man ser let, at den anvendte Betragtningsmaade, hvorefter den optagne Ilt tænkes bestaaende af 2 Dele (én i Vædsken absorberet og én af Hæmoglobinet bunden Del), ikke med Nødvendighed følger af Forsøgene, hvor disse 2 Dele ikke særskilt kunne observeres, men at den kan have sin Berettigelse, for saa vidt Forsøgsresultaterne derved fremstilles paa en overskuelig Maade.

Hæmoglobinopløsning, viste den Kurve, der udtrykker hele den absorberede Iltmængde som Funktion af Spændingerne, sig retlinet fra et Punkt af, der omtrent svarede til 70^{mm} Ilttryk. Ved dette Forsøg gave da flere Bestemmelser udførte ved Tryk mellem 70 og 460^{mm} overensstemmende Absorptionscoefficienten lig 0.02249, medens den af 1 Gram Hæmoglobin bundne Iltmængde var lig 1.56 Cbc. (maalt ved 0° og 760^{mm}).

Dette Tal svarer til den Iltmængde, der optages af det normale Hæmoglobin i en 2 pCt. Opløsning; imidlertid forholdt dette Hæmoglobin sig ikke paa sædvanlig Maade, thi det afgav, selv ved en Formindskelse af Trykket til henved 2^{mm}, kun en forholdsvis meget ringe Iltmængde og havde altsaa bundet Ilten fastere end sædvanligt. Det er endnu ikke lykkedes mig at komme fuldstændig paa det Rene med de Betingelser, under hvilke den fastere Forbindelse mellem Ilt og Hæmoglobin indtræder, og jeg skal derfor her ikke gaa nærmere ind paa dette Forsøg, som forøvrigt turde frembyde stor Interesse.

Jeg troer, at man uden Betænkelighed kan anvende den her fundne Absorptionscoefficient 0.02249 ved 15° paa normale 2 pCt. Hæmoglobinopløsninger, og jeg har derfor paa nedenstaaende Tabel benyttet den til Beregning af det ovenfor detailleret meddelte Forsøg.

Tabellens Kolonne I indeholder Numrene paa Enkeltbestemmelserne ordnede kronologisk. Kolonne II de Ilttryk, under hvilke Absorptionen har fundet Sted, Kolonne III den hele Mængde af den ved tilsvarende Tryk absorberede Ilt, udtrykt i Cubiccentimeter ved 0° og 760^{mm}; i Kolonne IV findes den ved Hjælp af den nysnævnte Absorptionscoefficient beregnede Mængde af physikalsk absorberet Ilt, medens Kolonne V angiver den af Hæmoglobinet bundne Iltmængde; Kolonne VI indeholder de samme Størrelser beregnede for et Gram Hæmoglobin; i Kolonne VII er Temperaturen opført.

I. Nr.	II. 0-Tryk.	III. Samlede Mængde absorb. 0.	IV. Physikalsk absorb.	V. 0 bunden til Hgb.	VI. 0 bunden til 1 Gram Hgb.	VII. Temperatur.
1	2.00	0.3655	0.0022	0.3633	0.5284	15.0
2	12.16	0.8771	0.0132	0.8640	1.2565	15.0
3	7.64	0.8097	0.0083	0.8014	1.1655	15.1
4	308.24	1.4028	0.3332	1.0696	1.5555	15.0
5	157.49	1.2176	0.1702	1.0474	1.5233	15.0

Idet jeg gaar over til at fremstille Resultaterne af Forsøgene over den Iltmængde, som Hæmoglobinet optager ved en Temperatur af 15° under forskjelligt Ilttryk, skal jeg bemærke, hvad alt forhen er antydet, at ikke faa Forsøg mislykkedes, væsenlig paa Grund af Oxyhæmoglobinets Tilbøjelighed til at decomponeres, men af og til naturligvis ogsaa

ved tilfældige Uheld under de mange Manipulationer, Forsøgene udkræver. Det har af de nævnte Grunde heller ikke været muligt at opnaa en Nøjagtighed, der svarer til den, som er opnaaet ved de ovenfor anførte absorptiometriske Forsøg med destilleret Vand. Nøjagtigheden er dog for de Forsøg, som overhovedet ere lykkedes, ret tilfredsstillende, saaledes som det fremgaar ved Sammenligning mellem de enkelte nedenanførte Forsøg.

I det Følgende betegner p Iltens Tryk i Millimeter Kviksølv ved 0°; v Volumenet af den af 1 Gram Hæmoglobin optagne Iltmængde udtrykt i Cubiccentimeter ved 0° og 760^{mm}. Temperaturen, ved hvilken Absorptionen finder Sted, er betegnet med T.

Forsøg med en circa 2 pCt. Hæmoglobinopløsning.

De tre første af de nedenstaaende Forsøg ere anstillede med Opløsninger, som hidrøre fra samme Hæmoglobinkrystal-Fremstilling; i Forsøg I var Opløsningen frisk tilberedt, i Forsøg II og III længere Tid opbevaret i tilsmeltede Kolber. De til de to sidste Forsøg IV og V benyttede Hæmoglobinkrystaller skreve sig fra en ny Krystalfremstilling.

Absorptionscoefficienten var = 0.02249 (se ovenfor Side 26).

Til Forsøgene ere tre forskjellige Absorptiometre benyttede.

Forsøg I.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 1.745, Vædskemængde = 34.925 Cbc. (ved 11° C.), heri 0.6115 Gram Hæmoglobin.

$p = 379.8 \quad v = 1.60 \quad T = 11.5$

$p = 388.4 \quad v = 1.55 \quad T = 20.4.$

Forsøg II.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 1.964, Vædskemængde = 37.807 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.7461 Gram Hæmoglobin.

$p = 461.7 \quad v = 1.56 \quad T = 15.2.$

Forsøg III.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 1.936, Vædskemængde = 38.774 Cbc. (ved 15°5 C.), heri 0.7538 Gram Hæmoglobin.

$p = 339.0 \quad v = 1.54 \quad T = 15.6.$

Forsøg IV.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 1.876, Vædskemængde = 36.509 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.6876 Gram Hæmoglobin.

$p = 308.2 \quad v = 1.56 \quad T = 15.0$

$p = 157.5 \quad v = 1.52 \quad T = 15.0$

$p = 12.2 \quad v = 1.26 \quad T = 15.0$

$p = 7.6 \quad v = 1.17 \quad T = 15.1$

$p = 2.0 \quad v = 0.53 \quad T = 15.0.$

Forsøg V.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = c. 1.8, Vædskemængde = 41.732 Cbc. (ved 15°4 C.), heri 0.76 Gram Hæmoglobin.

p	=	138.5	v =	1.52	T = 15.3
p	=	23.1	v =	1.35	T = 15.4
p	=	12.8	v =	1.25	T = 15.4
p	=	6.2	v =	1.15	T = 15.4
p	=	1.5	v =	0.50	T = 15.2.

Anmærkning:

De i Forsøg V anførte Værdier af v ere ikke de direkte iagttagne, idet de samtlige ere multiplicerede med 1.107. Værdien af v ved højt Tryk viste sig nemlig i Sammenligning med de fem ovenstaaende overensstemmende Bestemmelser, noget for lav; da dette ved det ellers gode Forsøg med stor Sandsynlighed maatte antages kun at ligge i en Fejl i Bestemmelsen af Hæmoglobinmængden (hvis 2 Værdier ikke viste nogen god Overensstemmelse), har jeg ikke villet udskyde Forsøget, men har indført nysnævnte Correction.

Paa Tavle II B ere Værdierne af Forsøgene IV og V graphisk fremstillede, idet Ilttrykkene ere opførte som Abscisser og de tilsvarende, af 1 Gram Hæmoglobin optagne Iltmængder, som Ordinater. 1^{mm} af Abscissen svarer til 2^{mm} Kviksølvtryk; medens 1^{mm} af Ordinaten svarer til 0.02 Cbc. Ilt ved 0° og 760^{mm}.

Punkterne ere markerede sort; igjennem dem er Kurve 1 trukket.

Forsøg med en circa 4 pCt. Hæmoglobinopløsning.

I de 3 nedenforstaaende Forsøg ere de benyttede Opløsninger tilberedte af Krystaller af samme Krystalfremstilling; det er de samme Krystaller, som ere benyttede ved Forsøgene IV og V med 2 pCt. Opløsning.

Af de ovenfor fremførte Grunde har den physikalske Absorptionscoefficient for den 4 pCt.'s Opløsning ikke direkte kunnet lade sig bestemme. Af Forsøgene fremgaar imidlertid, at den, som man kunde vente, maa være mindre end for den 2 pCt. Opløsning.

Ved Hjælp af de bekjendte Værdier for Absorptionscoefficienten for destilleret Vand og for en 2 pCt. Hæmoglobinopløsning har jeg (under Hensyntagen til de af Mackenzie i Wiedemanns Ann. Bind 1 givne Oplysninger om Absorption af Luftarter i Saltopløsninger) udledet Værdien 0.018, som den, der vistnok kan antages at ligge den virkelige Værdi nær.

Ved Benyttelsen af denne Coefficient ere nedenforstaaende Forsøg — hvor Bogstaverne have samme Betydning som ovenfornævnt — udregnede.

Forsøgene ere udførte med 2 forskjellige Absorptiometre.

Forsøg VI.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 3.834, Vædskemængde = 35.151 Cbc. (ved 15°7 C.), heri 1.359 Gram Hæmoglobin.

$p = 485.9 \quad v = 1.54 \quad T = 15.7.$

Forsøg VII.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 3.736, Vædskemængde = 35.698 Cbc. (ved 15° C.), heri 1.344 Gram Hæmoglobin.

$p = 204.4 \quad v = 1.46 \quad T = 15$
$p = 111.4 \quad v = 1.41 \quad T = 14.8$
$p = 63.0 \quad v = 1.38 \quad T = 14.8$
$p = 36.3 \quad v = 1.35 \quad T = 14.8.$

Forsøg VIII.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 3.587, Vædskemængde = 35.923 Cbc. (ved 15° C.), heri 1.298 Gram Hæmoglobin.

$p = 35.9 \quad v = 1.37 \quad T = 15.0$
$p = 21.9 \quad v = 1.26 \quad T = 15.0$
$p = 13.4 \quad v = 1.20 \quad T = 15.0$
$p = 9.3 \quad v = 1.08 \quad T = 15.1$
$p = 6.3 \quad v = 1.01 \quad T = 15.1.$

Paa samme Maade som ved Forsøgene med de 2 pCt.'s Opløsninger ere Forsøgene VI, VII og VIII graphisk fremstillede paa Tavle II *B*.

De til disse Forsøg hørende Punkter ere markerede med rødt, og den igjennem dem trukne Kurve er betegnet 2.

Som man ser af samtlige ovenstaaende Forsøg er der, imod hvad man paa Forhaand efter den gængse Anskuelse skulde vente, ved de undersøgte Tryk ikke opnaaet noget Maximum for Hæmoglobinets Iltoptagen; derimod synes den asymptotisk at nærme sig en Grændseværdi.

Fremdeles fremgaar af Førsøgene, at Hæmoglobinet ved samme Tryk optager mindre Ilt, jo mere concentreret Opløsningen er.

Forøvrigt fremgaar Afhængigheden mellem den af Hæmoglobinet optagne Iltmængde og det tilsvarende Ilttryk for en Temperatur af 15° tilstrækkelig tydelig af den graphiske Fremstilling, hvortil jeg derfor finder det tilstrækkeligt at henvise.

Foruden de ovenstaaende Forsøgsrækker har jeg endvidere antillet Forsøg med en Hæmoglobinopløsning af circa 0.9 pCt.

Forsøgene bekræfter i det Hele de ovenfor fremsatte Resultater; de mindre Afvigelser, der findes fra disse, troer jeg at maatte henføre til de herskende uheldige Forsøgsbetingelser. Ved disse Forsøg kunde nemlig kun en ringere Mængde Hæmoglobin anvendes, hvilket for de lavere Tryks Vedkommende bevirker Usikkerhed paa Grund af den ringe absolute Iltmængde, som optages, medens for de høje Tryks Vedkommende den Omstændighed, at en forholdsvis stor Brøkdel af den hele optagne Iltmængde physikalsk absorberes af Vandet, bevirker, at Fejl i Bestemmelsen af Absorptionscoefficienten faar en mere forstyrrende Indvirkning her, end ved de mere concentrerede Opløsninger.

Forsøg med en circa 0.9 pCt. Hæmoglobinopløsning.

I nedenstaaende Forsøg ere de anvendte Hæmoglobinkrystaller de samme, der ere benyttede i ovenstaaende Forsøg IV, V, VI, VII og VIII.

Den benyttede physikalske Absorptionscoefficient er paa samme Maade, som ved de 4 pCt.'s Opløsninger fremsat, omtrentlig bestemt til 0.025.

Forsøgene ere anstillede med 2 forskjellige Absorptiometre.

Forsøg IX.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 0.871, Vædskemængde = 39.473 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.3443 Gram Hæmoglobin.

$p = 270.5 \quad v = 1.69 \quad T = 14.8$

$p = 133.4 \quad v = 1.55 \quad T = 15.1.$

Forsøg X.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 0.886, Vædskemængde = 33.455 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.2968 Gram Hæmoglobin.

$p = 2.6 \quad v = 0.73 \quad T = 14.6$

$p = 2.0 \quad v = 0.55 \quad T = 14.9.$

Forsøg XI.

Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 0.903, Vædskemængde = 32,063 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.2900 Gram Hæmoglobin.

$p = 298.8 \quad v = 1.70 \quad T = 15.4$

$p = 11.4 \quad v = 1.07 \quad T = 14.6$

$p = 8.7 \quad v = 1.02 \quad T = 14.7$

$p = 2.3 \quad v = 0.60 \quad T = 14.4.$

Paa Tavle II *B* ere Forsøgene graphisk fremstillede paa samme Maade, som ved ovenstaaende Forsøgsrækker er angiven. Punkterne ere til Adskillelse fra de øvrige Forsøg omgivne med en lille Kreds. Paa Grund af de ved Begyndelsen af denne Forsøgsrække anførte Omstændigheder er der gjennem Punkterne ikke trukket nogen Kurve.

I et enkelt Forsøg, jeg har anstillet med en circa 0.9 pCt. Opløsning, fik jeg Værdier for Ilttrykket, der vare omtrent dobbelt saa store som de ovenfor anførte. Da det trods omhyggelig Eftersyn af Forsøgene ikke er lykkedes mig at finde noget, der kunde tale for en begaaet Fejltagelse, anfører jeg her Forsøget, skjøndt jeg ikke kan angive, under hvilke Betingelser Hæmoglobinet indgaar denne højere Forbindelse med Ilt.

Forsøg XII.

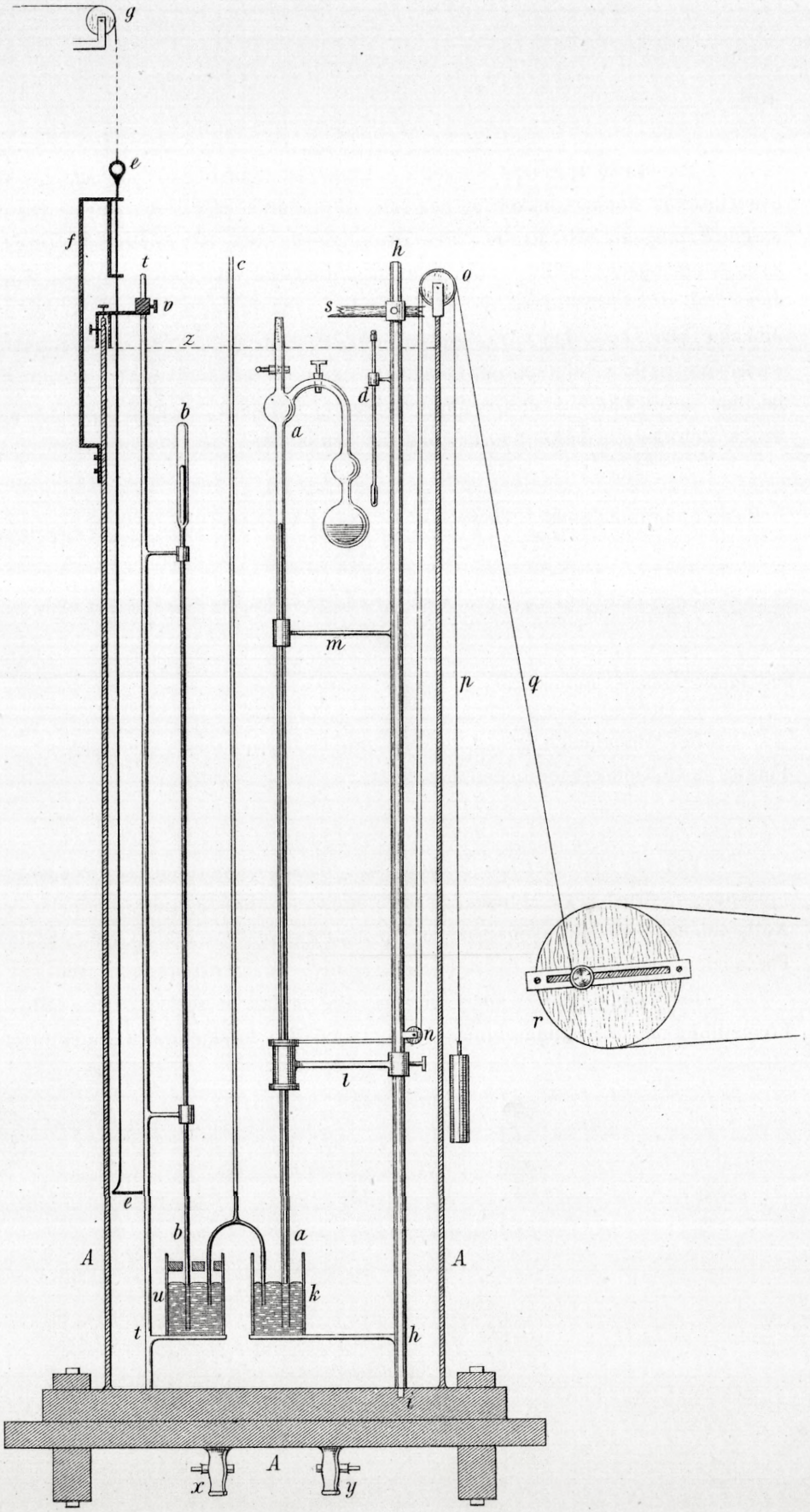
Hæmoglobinholdighed i Vægt-pCt. = 0.892, Vædskemængde = 36.741 Cbc. (ved 15° C.), heri 0.3282 Gram Hæmoglobin.

$p = 13.1$	$v = 2.745$	$T = 14.8$
$p = 7.58$	$v = 2.73$	$T = 15.1$
$p = 4.9$	$v = 2.62$	$T = 15.2$
$p = 3.0$	$v = 2.48$	$T = 15.2.$

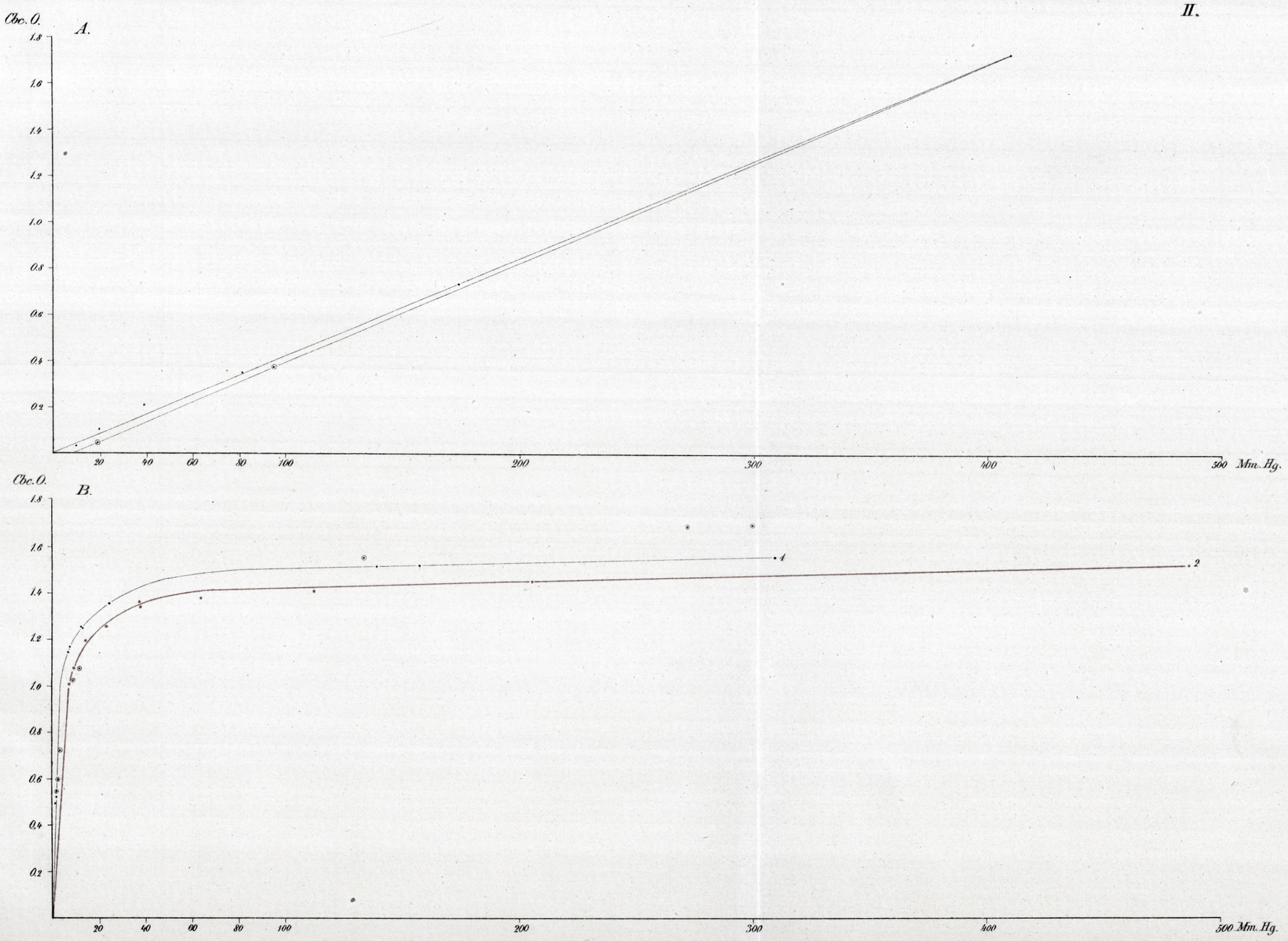
For Muligheden af en saadan højere Iltforbindelse maa man altsaa ved fremtidige Forsøg have Opmærksomheden henvendt.

Ved absorptiometriske Forsøg med en saa let foranderlig Vædske som Hæmoglobinopløsninger, troer jeg, at man vanskelig med de hidtil kjendte Methoder kan opnaa større Nøjagtighed, end de ovenstaaende Resultater frembyde, selv ved yderligere at gjentage Forsøgene; hvorfor jeg i hvert Fald foreløbig betragter Forsøgene ved 15° som afsluttede.

Jeg haaber, at det snart vil være mig muligt at fortsætte disse Meddelelser med en Fremstilling af Oxyhæmoglobinets Dissociation ved forskjellige Temperaturer.


g
e
f
t
v
c
h
o
s
z
d
a
b
m
p
q
r
n
l
e
b
a
A
A
u
k
t
h
i
A
x
y

II.


Cbc. O.
A.
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
200
300
400
500 Mm. Hg.
Cbc. O.
B.
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1
2
20
40
60
80
100
200
300
400
500 Mm. Hg.

Om Definitionerne

for

Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser.

Af

T. N. Thiele.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 11.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1886.

En skarpt formuleret Definition af Tallet er aabenbart den naturlige Begyndelse for en systematisk Fremstilling af Mathematiken. Saavidt jeg ved, finder man dog intet Steds en saadan Begyndelse i mathematiske Lærebøger, og dette har sine meget gode Aarsager, dels det pædagogiske Hensyn til ikke strax at skræmme Begynderen med alvorlige Vanskeligheder, dels den historiske Grund, at Tallets oprindelige Betydning som Størrelsens Bestemmelse efterhaanden har vist sig at være uholdbar eller dog uhensigtsmæssig, efter at man havde draget først de negative og senere de imaginære eller komplexe Tal ind under Mathematiken. At bygge paa Elevens tidlig erhværvede og uklare Fortrolighed med en af Tallenes Arter og efterhaanden at udvide Talbegrebet er dog en Fremgangsmaade, der ikke sømmer sig for den exakte Videnskab, og som ialtfald kun kunde taales, saa længe man ikke var udsat for at møde tallignende Bestemmelser, som ikke ere Tal, og som maa holdes ud fra Talbegrebet ved den skarpe Definition.

Men om man end tidligere med nogen Berettigelse har kunnet se bort fra Muligheden af at forvexle Tal med Ikke-Tal, saa synes en Grændseregulering nu at være paatrængende dels af Hensyn til Spørgsmaal om Mathematikens Anvendelighed paa forskjellige Videnskaber, dels fordi nu næsten enhver Mathematiker kommer til at arbejde med nogle af de farligere Ikke-Tal, som ligne Tallene. Jeg tænker nærmest paa, hvad man kalder symbolsk Regning, hvor man regner med Bestemmelser, der ikke ere Tal, næsten ganske som om de vare Tal, kun med nogle enkelte Undtagelsesregler. Men i Grunden hører der hertil og har altid hørt noget, som alle kjende, nemlig Exponenterne (og derunder Vinklerne). Det er bekjendt, at naar en Brøk staar som Exponent, er det ikke uden videre tilladt at forkorte den, og strængt taget vil det sige, at Exponenterne, saaledes som dette Begreb først kommer frem, nok ligne Tallene i højeste Grad, men dog ikke ere Tal. At man kan regne med Logarithmer, som man gjør, beror paa, at Vanskeligheden paa dette Punkt endnu lader sig omgaa; men i det, som man sædvanligt kalder for symbolsk Regning, er det virkelig nødvendigt at være paa det Rene med, at man er gaaet udenfor Tallenes Grændser.

Endnu et andet Exempel kan jeg finde indenfor det elementært bekjendte; skjønt dette rigtignok ligger saa langt tilbage i Børnelærdommen, at mange have ophørt at tænke

derpaa: Det er de benævnte Tal. Man ved jo, hvorledes den rene Mathematik plejer at skynde sig bort fra disse Begreber med saadan Hast, at man senere har ondt ved at faa fat paa dem igjen, naar man faar Brug for dem i Anvendelserne. De benævnte Tal ligne de egentlige, ubenævnte, Tal deri, at de have Addition og Subtraktion med ganske samme Regler; Manglen af Multiplikation er her det Kjendetegn, som viser, at de benævnte Tal kun kunne regnes for tallignende Bestemmelser, men ikke for egentlige Tal.

Vi skal da her søge Tallet defineret. Men er det nu ikke noget, som beror paa en ren Vilkaarlighed? Staar det os ikke frit at definere ganske efter Behag, naar vi blot fastholde den Definition, vi vælge? Ja og Nej! Vor Frihed faar af Hensyn til Sprogbrug og almindelig Vedtægt en Indskrænkning derved, at vi erklære at ville definere netop, hvad Tal er. Det vilde ikke være nogen logisk Fejl, men vel højst upassende, dersom Tallene ifølge vor Definition fik ganske nye Egenskaber, dersom det, som alle hidtil have været enige om at kalde Tal, blev udelukket, og Begreber, som ingen tidligere kunde falde paa at kalde Tal, blev tagne med. Ud af vor Definition bør man kunne bevise alle de velbekjendte almindelige Sætninger om Tallene, eller ogsaa kunde der være Tale om at benytte selve disse Sætninger som Definition.

I sidste Tilfælde vilde det være nødvendigt, i hvert Fald var det et ønskeligt Forarbejde for Definitionen, kritisk at undersøge de enkelte mathematiske Hovedsætninger. Man maatte udskyde ikke blot alle de Sætninger, som ikke gjælde for alle de gamle Tal, men ogsaa saadanne, hvis almene Gyldighed for disse kan bevises ved andre principale Sætninger. At optage bevislige Sætninger i Definitionen vilde være en Fejl, selv om de gjælde for alt, hvad vi nu kalde Tal, thi hvis de ikke skulde gjælde overfor en ellers mulig Udvidelse af Talbegrebet, vilde ogsaa dette kunne bevises, og saadant kunde da vel medføre en Inddeling af Tallene men ikke være en Hindring for denne Udvidelse. Endnu vigtigere er det Hensyn, at en saadan overflødig Definition vilde forstyrre Ordenen i Bevissystemet saaledes, at mange Beviser kunde føres paa flere Maader, noget som, selv om Beviserne føre til samme Resultater, ogsaa kunde tænkes at antyde, at Definitionen skjulte en Selvmodsigelse. Definitionen kan (smlgn. Side 8) næppe gives anderledes end i axiomatisk Form, men saa beror dens Styrke væsentlig paa, at Axiomernes Antal indskrænkes til det mindst mulige.

Angaaende denne Kritik af Mathematikens Sætninger kan her henvises til en Afhandling i Mathematisk Tidsskrift 1880 Side 33. Det var let nok at se, at Undersøgelsen, der anstilledes med de reelle Tal, kunde begrændses til følgende principale Sætninger, af hvilke de fleste gjælde baade om Additionen og om Multiplikationen; nemlig

1) Entydighedsprincipperne: Naar

$$a + b = c \text{ og } ab = c,$$

er c utvetydig bestemt ved a og b.

2) Omvendingsprinciperne: Til hver af de nævnte Regningsarter svarer en entydig Afhængighed $f(x)$ og $\varphi(x)$ af x, hvorved,

naar $a + b = c$, ogsaa haves $c + f(b) = a$ og $f(a) + c = b$; og

naar $ab = c$, ogsaa haves $c \,.\, \varphi(b) = a$ og $\varphi(a) \,.\, c = b$.

3) De associative Principer:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ og } (a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c).$$

4) De kommutative Principer:

$$a + b = b + a \text{ og } a \,.\, b = b \,.\, a$$

samt

5) Det distributive Princip, som gjør Forskjel paa Additionen og Multiplikationen, og kan dele sig i to Sætninger; nemlig Multiplikators distributive Princip,

$$(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c$$

og Multiplikandens distributive Princip,

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c,$$

der begge kunne haves samtidig, selv hvor Multiplikationen ikke besidder det kommutative Princip.

Endnu kunde nævnes nogle specielle Sætninger især Undtagelsessætningerne om Tallet 0.

Det er ikke vanskeligt at se, at alle Mathematikens øvrige almindelige Sætninger lade sig aflede af disse. Det kan ogsaa temmelig let skjønnes, at disse Sætninger ikke alle kunne være nødvendige for Tallets og Regningsarternes Definition; thi nogle af dem lade sig bevise ved de øvrige. Men det maatte gjøres klart, hvilke af disse Sætninger der skulde udskydes som bevislige. At Entydighedsprincipерne nødvendigvis maa bibeholdes, kan der dog ikke være Tvivl om; de kunne aabenbart ikke bevises. Omvendingsprincipерne og de alene definere Afhængighederne $f(x)$ og $\varphi(x)$. Ligeledes maa det distributive Princip enten i sin Helhed eller dog en Sætning, som hører ind derunder, bibeholdes, for at man ikke skal kunne forvexle Additionen med Multiplikationen. Vanskeligere er det at se, om de associative eller kommutative Principer fortjene Forrangen. Dette Spørgsmaal maa jeg i Henhold til den citerede Afhandling besvare saaledes, at, naar man ikke vil følge én Fremgangsmaade ved Additionen den modsatte ved Multiplikationen, bør de kommutative Principer vige, fordi der er Mulighed for at bevise dem ved de andre Principer særlig ved de associative, medens det ikke vil være muligt at bevise de associative Principer ved de andre.

Resultatet bliver, at Definitionen skal føre til eller bestaa af Entydighedsprincipерne, Omvendingsprincipерne og de associative Principer for begge Hovedregningsarterne, samt én af Formerne for det distributive Princip enten Multiplikators eller Multiplikandens. Herefter er det altsaa uafgjort, om der gives Tal, for hvilke Addendernes eller Faktorernes Orden ikke er ligegyldig, det bliver et Spørgsmaal, som maa afgjøres ved Bevis for eller imod.

Men endnu af en anden Grund end det nævnte historiske Hensyn er vor Definitionsfrihed begrændset. Vi kunne ikke bruge nogen indviklet Definition, som kunde passe, hvis Talen var om et kunstigt logisk Tankespil. Mathematiken bør have et Grundlag, som kan gjøre dens fremragende Vigtighed indlysende derved, at det strax bliver klart, at den netop handler om de simplest tænkelige, i Virkeligheden anvendte Arter af Bestemmelser. Tallets Definition bør give en saadan Beskrivelse af Tal-Bestemmelserne, at det ogsaa uden forudgaaende mathematisk Undersøgelse kan afgjøres, om denne eller hin virkelige Bestemmelse er Tal eller ikke, — om og hvorvidt en Videnskab er eller ikke er anvendt Mathematik. Og gives der simplere logiske Bestemmelser end Tallet, da have vi vel fuld Ret til at vælge Tallet til Gjenstand for vor Undersøgelse; men vi vilde ialtfald handle lidet klogt i, ikke at sikre os, at de simplere Bestemmelsesformer vare tilstrækkelig undersøgte af os eller andre, førend vi give os i Kast med de mere indviklede.

For nu at inddele Bestemmelserne og ordne dem efter deres Simpelhed maa vi være opmærksomme paa, at Bestemmelser kunne fremkalde den ønskede Forestilling og bestemme Tingene enten umiddelbart uden at knyttes til nogen anden Forestilling eller Ting, eller saaledes, at en eller flere forud tilstedeværende Forestillinger eller Ting ved Bestemmelsen omdannes til den ønskede. I første Tilfælde kalde vi Bestemmelsen absolut i andet relativ. Ved Afgjørelsen herimellem kan man ikke altid stole paa Bestemmelsens ydre Form, Sproget har en Forkjærlighed for den absolute Beskrivelse og anvender denne Form ogsaa ved relative Bestemmelser. Naar vi ved at nævne et Navn fremkalde Forestillingen om nogen eller noget, bruge vi den absolute Form for Bestemmelsen, uagtet den næsten altid i Virkeligheden er relativ, idet vi ubevidst benytte andre Forestillinger ved Bestemmelsen.

I Simpelhed ville aabenbart de virkelig absolute Bestemmelser være de relative overlegne, men de kunne desuagtet her kun faa underordnet Interesse. Virkelig absolute Bestemmelser synes for det Første at være meget sjældne, saa sjældne, at skjøndt jeg ikke tør benægte, at der gives mere end én saadan, saa kan jeg dog kun nævne den i Tallet 0 liggende Bestemmelse af Identiteten som Exempel paa en Bestemmelse, der har kunnet modstaa mine Forsøg paa ved en Analyse at paavise Relativitet ogsaa i den. Men selv om der gaves mangfoldige absolute Bestemmelser, vilde desuden deres videnskabelige Behandling ikke stille store Fordringer, netop fordi de saa umiddelbart og uimodstaaelig fremkalde den ønskede Forestilling.

Af relative Bestemmelser er der mange og mange Slags, vi kunne inddele dem paa naturlig Maade i enkelt relative, dobbelt relative, . . . flerdobbelt relative efter Antallet af de Forestillinger, som Bestemmelsen forudsætter. Rød som en Rose og sødere end Honning er en dobbelt relativ Bestemmelse, der forudsætter Forestillingen om Rosens Rødme og Honningens Sødme. Men denne Bestemmelse kan opløses i to enkelt relative, nemlig

Identitet i Farve og Fortrin i Sødhed. Det er ingenlunde alle dobbelt eller flerdobbelt relative Bestemmelser, som kunne opløses i enkelt relative; men man vil uvilkaarlig forøge saadan Opløsning, og derved anerkende, at de enkelt relative Bestemmelser ere de simpleste og de, der først bør undersøges. Her ville vi da begrændse os til dem.

Iblandt de enkelt relative Bestemmelser er der stor Forskjel paa den Klarhed, hvormed Relativiteten træder frem. Der synes at være én Bestemmelse, som kan anvendes saa at sige paa enhver Forestilling og Ting, nemlig Bestemmelsen ved Identitet: «uforandret det samme». Der gives Bestemmelser, der kunne anvendes paa de mangfoldigste Forestillinger ja endog paa flere Arter af Forestillinger, men ogsaa nogle, som alene kunne sættes i Forbindelse med en begrændset Samling af Forestillinger. Ved alle disse Bestemmelser er Relativiteten dog klar, fordi Bestemmelserne staa for os som selvstændige Forestillinger, der kunne sættes i Forbindelse med indbyrdes forskjellige, oprindelige Forestillinger eller Ting. Hvor derimod en Bestemmelse er uopløselig knyttet til én vis Forestilling, ved hvilken den bestemmer en anden saaledes, at den samme Bestemmelse ikke findes anvendelig mellem andre Forestillinger, der gjælder det samme som om absolute Bestemmelser, at en videnskabelig og almindelig Behandling bliver overflødig ved Bestemmelsens Umiddelbarhed og umulig, fordi hvert Tilfælde har sine egne Love. Disse Bestemmelser forudsætte vi altsaa, at være vel bekjendte, og holde os til saadanne enkelt relative Bestemmelser, som kunne sættes i Forbindelse med flere indbyrdes forskjellige Forestillinger. Ja skjønt vi ikke helt kunne undgaa at behandle saadanne Bestemmelser svarende til en Art af Forestillinger, hvor vel enhver Bestemmelse kan tjene til at forbinde mangfoldige Par af Artens Forestillinger, men hvor dog ikke enhver Bestemmelse kan anvendes med enhver Forestilling til Udgangspunkt (Mængder og Størrelser), ville vi fortrinsvis behandle saadanne Arter, Grupper af Forestillinger, hvor enhver Bestemmelse, som ved en hvilkensomhelst af Gruppens Forestillinger bestemmer en hvilkensomhelst anden, ogsaa ved en hvilkensomhelst tredie Forestilling i Gruppen maa bestemme en fjerde af dens Forestillinger. Saadanne Bestemmelser ville vi kalde ubetinget enkelt relative.

Det vil dog ikke være overflødigt at tilføje en skjærpende Bestemmelse af vor Brug af disse Ord «ubetinget enkelt relativ». Vi fordre af dem og af den Gruppe, paa hvis Bestemmelser de skulle kunne anvendes, at Bestemmelsen af den ene Forestilling ved den anden skal være én, eller at flere Bestemmelser mellem de samme Forestillinger skulle ved Abstraktion fra mulig formel og tilsyneladende Forskjel være at anse for én saaledes, at slige indbyrdes identiske Bestemmelser ogsaa fra forandret Begyndelsesforestilling vedblivende skulle fremkalde én Forestilling. Dette staar, som man vil se, i nær Sammenligning med følgende andet Hovedled af Definitionen.

Skjøndt man vel ikke med fuld Ret kunde bruge Ordet Bestemmelse, hvor man ikke — absolut eller relativt — faar en Forestilling fremkaldt med tilstrækkelig Skarphed

til at adskille den fra alle andre, altsaa uden al Tvetydighed og Ubestemthed, maa vi dog for Sikkerheds Skyld give saadanne Bestemmelser det særlige Navn af entydige Bestemmelser i Modsætning til tvetydige og flertydige ja delvis ubestemte Bestemmelser. Helt ville vi ikke bortvise de mindre skarpe Bestemmelser fra Omtale her, thi Mathematiken giver jo paa dens senere Trin Midler ogsaa til Behandling af disse saavel som til Behandling af visse sammensat relative Bestemmelser. Men fortrinsvis og foreløbig udelukkende holde vi os til de éntydige Bestemmelser som de simpleste, og vi gjøre tilmed et Udvalg af de simpleste iblandt dem.

Alle de entydige Bestemmelser ville, medens de ligefrem anvise os, hvorledes vi med en Begyndelsesforestilling fremkalde en Slutningsforestilling, tillige omvendt kunne tjene til at bestemme Begyndelsesforestillingerne, idet vi gaa tilbage ud fra Slutningsforestillingen. Da Begyndelsesforestillingen har fremkaldt denne, maa den være en af dem, som kan fremkalde den; men at den fremadgaaende Bestemmelse var entydig, sikrer os paa ingen Maade, at den tilbagegaaende Bestemmelse ogsaa er det, man kan endog meget let finde Exempler paa, at den tilbagegaaende Bestemmelse mangler saameget, at den bliver tvetydig eller ubestemt. Aabenbart finde vi de simpleste Forhold ved Bestemmelser, der ere saa fuldstændige — fuldstændig entydige —, at de ogsaa give entydig Anvisning angaaende den tilsvarende tilbagegaaende Bestemmelse.

Vi behandle altsaa kun saadanne Forestillinger, hvis Bestemmelser ere ubetinget enkelt relative og fuldstændig entydige; men til Skjærpelse af den sproglige Forbindelse af disse Ord bemærke vi endnu, at vi opfatte Forbindelsen mellem denne Definitions to Led saaledes, at idet den ubetinget enkelte Relativitet skal forstaas saaledes, at Bestemmelsen af den ene Forestilling ved den anden er én, saa skal dette i Forbindelse med den fuldstændige Entydighed forstaas saaledes, at ogsaa de tilbagegaaende Bestemmelser, hvis der synes at være flere, dog entydig føre til en og samme Begyndelsesforestilling ud fra enhver Slutningsforestilling, til hvilken man er kommet ved en af dem.

De ubetinget enkelt relative og fuldstændig entydige Bestemmelser ville vi fremtidig kalde Numeraler, idet vi med dette Navn antyde, at indenfor den dermed definerede Slags Bestemmelser findes alt, hvad der ligner Tallene — altsaa baade Tallene og de Bestemmelser, som der kan være Tale om at forvexle med Tal.

Da Numeralets Definition er flerleddet, uden at det kan bevises, at det ene Led ikke logisk udelukker det andet; da vi altsaa kun have en subjektiv erfaringsmæssig Sikkerhed for dens Berettigelse, maa vi betegne denne Definition som axiomatisk; og i endnu højere Grad vil dette gjælde om den senere Definition af Tallet, som bygges paa Numeralets Definition.

Identitetsbestemmelsen: uforandret det samme eller lig, er et Numeral. Det er en enkelt relativ Bestemmelse, thi den bestemmer ved én Forestilling; og det er en

ubetinget enkelt relativ Bestemmelse, thi Forestillingen om det uforandrede er selvstændig, kan kombineres med en hvilkensomhelst Udgangsforestilling. Det er fremdeles en entydig Bestemmelse, thi den giver den Forestilling, der bestemmes, med samme Sikkerhed som Udgangsforestillingen; det er endelig en fuldstændig entydig Bestemmelse, thi den tilbagegaaende Bestemmelse er lige saa entydig som den oprindelige. Identitetens Existens beviser, at der gives Numeraler; men Identitetsbestemmelsen er ikke det eneste Numeral.

I de benævnte Tal, som bestemme, hvad jeg i min «Afslutning af Regneundervisningen», Kjøbenhavn 1883, har kaldt «Tingpunkter» og «Led» forøvrigt ogsaa i Vinkler m. m. haves elementære Exempler paa Numeraler. De ere — eller rettere, de forudsættes ved Axiomer angaaende den specielle Forestillings Art at være — baade ubetinget enkelt relative og fuldstændig entydige Bestemmelser. Hvert af disse Numeraler er uden Undtagelse anvendeligt ud fra enhver Forestilling i den Gruppe af i videre Forstand mathematisk ensartede Forestillinger, hvortil den hører, men ordentligvis ikke udenfor denne Gruppe. Medens vi det Følgende forudsætte, at de Forestillinger og Numeraler, vi betragte, høre til én Gruppe, se vi bort fra denne Gruppes Navn og saadan særlig Beskaffenhed, som ikke udtaler sig i specielle Egenskaber ved Numeralerne. Vi maa derfor se bort fra, hvorledes den første Udgangsforestilling i en Gruppe fremkommer, og som os uvedkommende afvise Spørgsmaal, om den muligen reelt er mere eller mindre ubestemt: for os er den vilkaarlig og som saadan ganske ubestemt. Hvad der interesserer, er kun, at naar en Forestilling haves og de i dens Gruppe anvendelige Numeraler kjendes, saa ere alle Gruppens Forestillinger og dermed Gruppen selv bestemte; og naar vi abstrahere fra Gruppens Navn m. m., gaa Forestillingerne selv ud af Betragtning, saasnart vi ved deres Hjælp have faaet Numeralets Definition omsat til Sætninger om Numeraler.

Tegnsprog for Numeraler.

Som Grundlag for det senere og mere fyldige mathematiske Tegnsprog indføre vi Betegnelser for Numeralerne og Udsagn om dem. Selvfølgelig benytte vi derved Identitetsbetegnelsen $=$; ensartede Forestillinger betegne vi med gothiske Initialer, Numeralerne ved latinske, og det om de sædvanlige Additions- og Multiplikationstegn mindende $*$ skal betegne, at en Numeralbestemmelse finder Sted. Vi skrive

$$\mathfrak{B} = B * \mathfrak{A}$$

for at betegne, at Forestillingen $\mathfrak{B}$ er den, der bestemmes ved Numeralet B ud fra Udgangsforestillingen $\mathfrak{A}$, saavelsom for at betegne B som det Numeral, der bestemmer $\mathfrak{B}$ ved $\mathfrak{A}$.

Saadan Bestemmelse af Numeralet ved Udgangs- og Slutningsforestilling er den oprindelige; men ved Siden af denne bliver der i det Følgende Tale om, at ét Numeral er absolut bestemt, og at andre kunne afledes det ene af det andet (eller de andre) og saaledes faa relativ Bestemmelse. Lovene herom ere dog ikke længer vilkaarlige, men maa afledes

af Numeralets Definition samtidig med, at vi oversætte denne paa vort Tegnsprog. — Identitetsnumeralet, som vi betegne med O, er bestemt, reelt ved Forestillingernes blotte Art, formelt absolut. For hvilketsomhelst $\mathfrak{A}$ haves,

$$\mathfrak{A} = O * \mathfrak{A} \text{ synonymt med } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Ethvert andet Numeral, som altsaa er et Forskjelsnumeral, idet man i

$$\mathfrak{B} = B * \mathfrak{A} \text{ vilde have } B = O,$$

hvis ikke $\mathfrak{B}$ var forskjellig fra $\mathfrak{A}$, kræver til sin oprindelige Bestemmelse to forskjellige Forestillinger af samme Gruppe; men vi skulle nu se, at én saadan oprindelig Bestemmelse maa medføre en Mangfoldighed af relative Numeralbestemmelser, muligvis af alle, der høre til samme Forestillingsgruppe.

For alle Arter af Numeraler gives der to Operationer, ved hvilke et Numeral findes bestemt ved andre, vi ville kalde dem Modsætning og Tilføjelse.

Modsætning.

Naar det Numeral, N, som bestemmer Forestillingen $\mathfrak{B}$ ved den ensartede Forestilling $\mathfrak{A}$, er bekjendt, $\mathfrak{B} = N * \mathfrak{A}$, vil ogsaa det Numeral være bekjendt, som bestemmer $\mathfrak{A}$ ved $\mathfrak{B}$, altsaa $\mathfrak{A} = (\div N) * \mathfrak{B}$. Vi betegne dette ved $(\div N)$, for dermed at udtrykke, at det efter Definitionen er givet alene ved N og gjenfindes ved alle Forestillingspar, hvor N forekommer. $(\div N)$ siges at være N's modsatte Numeral; men tillige er N ogsaa $(\div N)$'s modsatte Numeral, $(\div (\div N)) = N$. Identitetsnumeralet O er sit eget modsatte Numeral, $O = (\div O)$.

Tilføjelse.

Har Forestillingen $\mathfrak{A}$ ved Numeralet A bestemt Forestillingen $\mathfrak{B}$, kan denne atter ved Numeralet B bestemme en Forestilling $\mathfrak{C}$. Som hørende til samme Gruppe som $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{A}$ maa $\mathfrak{C}$ da kunne bestemmes ud fra $\mathfrak{A}$ ved et Numeral C:

$$\mathfrak{B} = A * \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{C} = B * \mathfrak{B}$$
$$\text{altsaa } \mathfrak{C} = C * \mathfrak{A};$$

om end i Formen forskjellige, maa dog i Realiteten de to Bestemmelser af $\mathfrak{C}$ ved $\mathfrak{A}$ være identiske, den direkte C med den indirekte ved A og derefter ved B, det vil sige, anvendte paa hvilkensomhelst af Gruppens Forestillinger maa de bestandig føre til identiske Forestillinger. Der bestaar altsaa uafhængig af Begyndelsesforestillingen en Afhængighed af Numeralet C som bestemt ved Numeralerne A og B og disses indbyrdes Orden. Vi sige, at det direkte bestemmende Numeral C dannes ved Tilføjelse af Numeralet B til den forudgaaende numerale Bestemmelse A; og dette betegne vi med Ligningen

$$C = B * A.$$

Da baade Modsætningsafhængigheden og Tilføjelsen efter Definitionen ere entydige, vil Tilføjelsesafhængigheden ogsaa besidde Omvendingsprincipet (jvnfr. Side 5). Ved at bestemme en hvilkensomhelst af vore Forestillinger $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{C}$ ud fra hver af de to andre baade direkte og med den tredie til Mellemled faas samtidig med ovenstaaende Ligning tillige:

$$(\div C) = (\div A) * (\div B),$$
$$B = C * (\div A),$$
$$(\div B) = A * (\div C),$$
$$A = (\div B) * C,$$
$$\text{og } (\div A) = (\div C) * B.$$

Ere to af vore Forestillinger identiske, findes

$$A = O * A = A * O$$

og

$$O = A * (\div A) = (\div A) * A;$$

og omvendt: Naar $A * B = O$, vil $B = (\div A)$, $A = (\div B)$. — Intet Numeral forandres ved dets Tilføjelse til Identiten O eller ved Tilføjelse af denne. I dette Tilfælde er Ordenen ligegyldig for Tilføjelsens to Led, ligeledes, naar Tilføjelsens Resultat bliver O; men iøvrigt vil man vel ofte men ingenlunde altid finde det kommutative Princip gjældende for Numeralers Tilføjelse; og hvor dette ikke er Tilfældet, bør man heller ikke søge Modsætningsafhængigheden afløst af en til Subtraktionen og Divisionen svarende Afhængighed.

Tage vi foruden de ovenfor betragtede ensartede Forestillinger $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{C}$ endnu en til samme Gruppe hørende vilkaarlig Fremstilling $\mathfrak{D}$ med i Betragtning, saa at nu

$$\mathfrak{B} = A * \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{C} = B * \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{D} = C * \mathfrak{C},$$

medens den direkte Bestemmelse af $\mathfrak{D}$ ved $\mathfrak{A}$ betegnes med S,

$$\mathfrak{D} = S * \mathfrak{A},$$

samt $\mathfrak{C} = E * \mathfrak{A}$

og $\mathfrak{D} = D * \mathfrak{B}$,

saa følger af det Foregaaende

$$S = D * A = C * E$$

eller

$$(C * B) * A = C * (B * A).$$

Altsaa gjælder det associative Princip for Tilføjelsen; ved yderligere Benyttelse af ( ) Betegnelsen findes den gyldig for et hvilketsomhelst Antal Led deri.

De nævnte Sætninger om Numeralers Modsætning og Tilføjelse udtømme Numeralets Definition, og ere at opfatte som en Gjengivelse af den i et Tegnsprog, som tør anses for mere fuldkomment end det almindelige Sprog, der dog er uundværligt, hvor Talen er om Anvendelse paa konkrete Forestillinger.

I hver Art er altsaa Identitetsnumeralet absolut bestemt. Intet af Gruppens Forskjelsnumeraler behøves for at lære os O at kjende; det er kjendt som «ingen Forskjel af denne Art», saasnart i det Højeste Gruppens Navn og almindelige Indhold kjendes.

Af Bestemmelser med aabenbar Numeralskarakter mellem Numeraler i en hvilkensomhelst Gruppe have vi dernæst for det første Numeralers Identitet, $A = A$, for det andet giver Modsætningsafhængigheden et andet ligesaa almindeligt Numeralsnumeral, hvis Betegnelse er det $\div$, der ved at sættes foran Numeralets Tegn fremkalder Forestillingen om det modsatte Numeral.

Tilføjelsesafhængigheden bestemmer derimod vel det direkte Numeral paa relativ Maade og entydig, men Relativiteten er almindelig en dobbelt eller flerdobbelt, alle de enkelte partielle Numeraler ere jo hver en Udgangsforestilling. Men forsaavidt alle disse partielle Numeraler lade sig bestemme ved et eneste Numeral, vil Tilføjelsen blive en enkelt relativ Bestemmelse af det direkte Numeral ved dette sidstnævnte; og indenfor dette Tilfældes Grændser er der Mulighed for, at vi kunne træffe paa endnu andre Numeralsnumeraler, altsaa saadanne, som bero paa Tilføjelse. Men i denne Henseende staar der kun en frugtbar Udvej aaben nemlig Tilføjelse af flere eller færre indbyrdes identiske eller modsatte Numeraler.

Ved at gaa ud fra Forestillingen om Numeralet A som givet bestemme vi ved Tilføjelse af med A identiske Numeraler Numeralerne

$$A * A = \overset{2}{*} A$$

$$A * A * A = \overset{3}{*} A$$

$$A * (A * (\ldots . \quad * (A * A))) = \overset{n}{*} A$$

Bestemmelsen $\overset{n}{*}$, som vi benævne ved de tilføjede Leds Antal, er da enkelt relativ og tillige entydig.

Ved Tilføjelse af et hvilketsomhelst Numeral, $\overset{n}{*} A$, til et hvilketsomhelst af samme Slags, $\overset{m}{*} A$, fremkommer et Numeral, som ogsaa kan dannes ved Tilføjelse af lutter A'er.

$$\overset{p}{*} A = (\overset{n}{*} A) * (\overset{m}{*} A);$$

dette følger af Tilføjelsens associative Princip, f. Ex.

$$(\overset{3}{*} A) * (\overset{2}{*} A) = \{A * (A * A)\} * \{A * A\} = A * (A * (A * (A * A))) = \overset{5}{*} A.$$

Paa Grund af Tilføjelsens associative Princip og A'ernes indbyrdes Identitet gjælder ogsaa det kommutative Princip for Tilføjelse af hvilketsomhelst $\overset{n}{*} A$ og $\overset{m}{*} A$ og i hvilketsomhelst Antal,

$$(\overset{n}{*} A) * (\overset{m}{*} A) = (\overset{m}{*} A) * (\overset{n}{*} A).$$

Hvis de gjentagne Tilføjelser ske med $(\div A)$ i Stedet for A, fremkomme paa samme Maade Numeralerne $\overset{n}{*}(\div A)$, og man finder let at almindelig

$$\overset{n}{*}(\div A) = \div(\overset{n}{*} A);$$

ligeledes, at der ved Tilføjelse af $\overset{n}{*} A$'er og $\overset{m}{*}(\div A)$'er i hvilkensomhelst Sammensætning bestandig vil fremkomme enten O eller et Numeral $\overset{p}{*} A$ eller et Numeral $\overset{p}{*}(\div A)$, samt at det kommutative Princip gjælder for alle disse Numeralers Tilføjelser. Betegnelserne

$$O = \overset{0}{*} A, \quad A = \overset{1}{*} A \text{ og } \overset{n}{*}(\div A) = \overset{-n}{*} A$$

bemærkes.

De med det saaledes almindeliggjorte Tegn $\overset{n}{*}$ betegnede Bestemmelser kunne anvendes med et hvilketsomhelst til Gruppen hørende Numeral til Udgangsforestilling, er dette af Formen $\overset{m}{*} A$, føres man til et Numeral, som atter har den samme Form,

$$\overset{n}{*}(\overset{m}{*} A) = \overset{p}{*} A;$$

den entydige Bestemmelse $\overset{n}{*}$, er altsaa ikke blot enkelt relativ, men dens Relativitet er saa klar, at den, uden at Gruppens nødvendige Grændser overskrides, kan anvendes med ethvert af dens Numeraler til Udgangsforestilling, ja den kan anvendes paa et hvilketsomhelst Numeral fra hvilkensomhelst Gruppe, den er altsaa en ubetinget enkelt relativ og entydig Bestemmelse. $\overset{n}{*}$ mangler altsaa blot Entydighedens Gjensidighed i at være et Numeralsnumeral. Den vilde være dette, dersom eller forsaavidt Bestemmelsen af A ved $\overset{n}{*} A$ ogsaa var entydig. Men en almindelig Paastand herom vilde være faktisk urigtig, urigtig for nogle om end rigtig for andre Forestillingsgruppers Vedkommende.

Saavidt have vi kunnet behandle alle Slags Numeraler under ét, men her ere vi naaede til et kritisk Punkt; en Inddeling af Forestillingsgrupperne og deres Numeraler maa finde Sted. Saaledes slutter jeg fornemmelig deraf, at de Arter af Numeraler, som man paa erfaringsmæssig Maade har lært at kjende, vise indbyrdes Forskjel i deres yderligere Egenskaber. Bygger man paa Erfaringens Grundlag, kan man for Tid, Sted, Vægt, Værdi o. s. v., for mangfoldige, konkrete Forestillingsgrupper udvikle en Videnskab, iblandt hvis Axiomer man idelig vil finde alt, hvad der udfordres til at karakterisere dens Bestemmelser som Numeraler; alt, hvad vi endnu have udviklet, er fælleds for Geometrien, Kronologien og alle disse andre Videnskaber; men i deres videre Udvikling skilles deres Veje, og nogle af dem, men ingenlunde alle, forgrene sig netop overfor Spørgsmaalet om Entydigheden af den til $\overset{n}{*}$ svarende modsatte Bestemmelse.

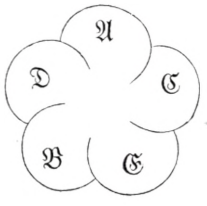
Til samme Resultat føres man ved Resultater af den formelle Mathematik. Antager man nemlig, at saadan Entydighed var almindelig gjældende, og tænke vi paa en vis Gruppe af Forestillinger, hvis Numeraler altsaa atter almindelig bestemmes ved Numeralsnumeraler, (og dette er

netop, hvad vi snart specielt skulle opstille som Tallenes Kjendetegn) saa vilde man ved yderligere at forestille sig Numeralsnumeralerne som Gjenstand for Bestemmelse se sig stillet overfor Tilfælde, Exponenter og andre symbolske Bestemmelser, hvor den omtalte Entydighed bevislig ikke er tilstede.

Men skal der paa dette Sted inddeles, saa er det Spørgsmaalet: Hvor finde vi Grundlaget for Inddelingen, i en ny erfaringsmæssig Definition eller i logiske Konsekvenser af den tidligere?

I Modsætning til de anvendt mathematiske Videnskaber burde formentlig vor Indledning til den rene Mathematik ud fra sine egne axiomatiske Definitionssætninger a priori ved en begrundet og udtømmende logisk Inddeling udvikle alle de sideordnede Muligheder hver med sine Konsekvenser, saaat Vejen banedes for hidtil ukjendte Anvendelser. Der burde ikke ske yderligere Laan fra Erfaringerne. Hvor Numeralbegrebet deler sig, der burde det almindelige Grundlag dog endnu afgive Kjendetegnene paa, hvilke Sætninger der kunde udsiges som Definitioner paa Numeralernes Underafdelinger, og hvilke Sætninger man ikke turde opstille som saadanne Definitioner. Jeg tror nu vel paa Muligheden af, at dette kan udføres; men for mit Vedkommende tør jeg ikke haabe at kunne finde Vejen gjennem denne Vanskelighed. Jeg kjender langtfra Numeralbegrebet i de fleste af dets logisk mulige Afskygninger, kan derfor ikke ordne a posteriori og derved vejledes til at finde Udgangspunktet for en Inddeling a priori; men saa maa jeg bekvemme mig til at laane af Erfaringen, dog saaledes, at jeg vil søge at gjøre Laanet saa lidet som mulig.

Ved Siden af velbekjendte Erfaringsresultater angaaende Forestillinger, der bestemmes ved benævnte Tal, vil jeg da hente Erfaringer fra et Par let overskuelige Forestillingsgrupper, og navnlig fra Kronbladenes Stilling hos regelmæssige Blomster, vild Rose og Lilie.



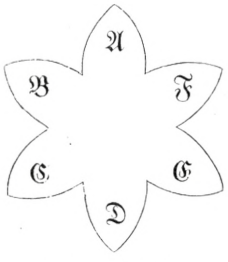
Lad os ved $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ tænke paa en Roses Kronblade og først vælge Forestillingen om $\mathfrak{A}$ til at gaa ud fra i Bestemmelserne B, C, D og E henholdsvis af $\mathfrak{B}$'s, $\mathfrak{C}$'s, $\mathfrak{D}$'s og $\mathfrak{E}$'s Stillinger, medens Identitetsnumeralet O tautologisk bestemmer $\mathfrak{A}$'s egen Stilling. Bestemmelserne B, C, D og E ere aabenbart Numeraler, de ere jo enkelt relative Bestemmelser, og hver Bestemmelse er saa selvstændig, at den kan anvendes ud fra en hvilkensomhelst af Gruppens Forestillinger; de ere fremdeles fuldstændig, nemlig ogsaa gjensidig entydige Bestemmelser.

Opfatte vi nu disse Numeraler som Forestillinger, der søges bestemte, er O her som altid absolut givet, de andre, B, C, D og E kunne alle indbyrdes bestemmes paa enkelt relativ Maade, og det ikke blot saaledes at $E = \div B$ og $D = \div C$. Thi ved Tilføjelsen af identiske Numeraler dannes, som man let i det enkelte kan eftervise, det fuldstændige System af Identiteter:

$$\begin{array}{l}
\overset{1}{*}B = \overset{3}{*}C = \overset{2}{*}D = \overset{4}{*}E = B \\
\overset{2}{*}B = \overset{1}{*}C = \overset{4}{*}D = \overset{3}{*}E = C \\
\overset{3}{*}B = \overset{4}{*}C = \overset{1}{*}D = \overset{2}{*}E = D \\
\overset{4}{*}B = \overset{2}{*}C = \overset{3}{*}D = \overset{1}{*}E = E \\
\hline
\overset{5}{*}O = \overset{5}{*}B = \overset{5}{*}C = \overset{5}{*}D = \overset{5}{*}E = O.
\end{array}$$

Det fremgaar for det første heraf, at man udfra hvert af Forskjelsnumeralerne kan bestemme ethvert af de andre ved Tilføjelser i ét vist Antal, altsaa ogsaa entydig bestemme det Forskjelsnumeral, som ved enhver af Bestemmelserne $\overset{2}{*}$, $\overset{3}{*}$ og $\overset{4}{*}$ bestemmer et givet Forskjelsnumeral. Forskjelsnumeralernes indbyrdes Bestemmelser ere her altsaa alle Numeralsnumeraler.

For det andet vil Bestemmelsen $\overset{5}{*}$ ud fra et hvilketsomhelst Forskjelsnumeral føre til Identitetsnumeralet, O, som altsaa fremkommer ved Tilføjelse af identiske Forskjelsnumeraler. Trods denne Frembringelses relative Form er dog her O ikkun bestemt paa absolut Maade, fordi det er aldeles ligegyldigt, hvilket af Gruppens Numeraler der tjener til Udgangsforestilling for den tilsyneladende relative Bestemmelse.



Betragte vi dernæst Bladenes Stilling i en Lilieblomst, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ og $\mathfrak{F}$, saa ere ogsaa her Forestillingerne om Bladenes Stilling overfor et af dem f. Ex. $\mathfrak{A}$ bestemte ved aabenbare Numeraler, Identitetsnumeralet O og Forskjelsnumeralerne henholdsvis B, C, D, E og F.

Men betragte vi saa disse Numeraler som Forestillinger, der søges bestemte, har O sin absolute Bestemmelse, og mellem Forskjelsnumeralerne gives der foruden Modsætningens Numeralsnumeral, $\div$, i $B = \div F$, $C = \div E$ og $D = \div D$, endnu ved Tilføjelse af identiske Numeraler andre ubetinget enkelt relative og entydige Bestemmelser. Men Schemaet:

$$\begin{array}{l}
\overset{2}{*}B = C,\ \overset{2}{*}C = E,\ \overset{2}{*}D = O,\ \overset{2}{*}E = C,\ \overset{2}{*}F = E \\
\overset{3}{*}B = D,\ \overset{3}{*}C = O,\ \overset{3}{*}D = D,\ \overset{3}{*}E = O,\ \overset{3}{*}F = D \\
\overset{4}{*}B = E,\ \overset{4}{*}C = C,\ \overset{4}{*}D = O,\ \overset{4}{*}E = E,\ \overset{4}{*}F = C \\
\overset{5}{*}B = F,\ \overset{5}{*}C = E,\ \overset{5}{*}D = D,\ \overset{5}{*}E = C,\ \overset{5}{*}F = B \\
\hline
\overset{6}{*}B = O,\ \overset{6}{*}C = O,\ \overset{6}{*}D = O,\ \overset{6}{*}E = O,\ \overset{6}{*}F = O,
\end{array}$$

overbeviser os snart om, at af Bestemmelserne $\overset{2}{*}$, $\overset{3}{*}$, $\overset{4}{*}$ og $\overset{5}{*}$ er kun denne sidste et Numeralsnumeral, og tilmed er denne $(\overset{5}{*}) = (\div)$; i andre ellers lignende Tilfælde kan der

være flere og selvstændige Numeralsnumeraler. Identiteterne $\overset{2}{*}B = \overset{2}{*}E$, $\overset{2}{*}C = \overset{2}{*}F$, $\overset{3}{*}B = \overset{3}{*}D = \overset{3}{*}F$, $\overset{4}{*}B = \overset{4}{*}E$ og $\overset{4}{*}C = \overset{4}{*}F$ vise at $\overset{2}{*}$, $\overset{3}{*}$ og $\overset{4}{*}$ ikke ere entydige i tilbagegaaende Retning, altsaa ikke Numeralsnumeraler.

Men ligesom ved Rosen vil ogsaa her Identitetsnumeralet kunne frembringes ved Tilføjelse af identiske Forskjelsnumeraler endog af et hvilketsomhelst Forskjelsnumeral, men medens Ligheden strækker sig saavidt, at et bestemt Antal identiske Tilføjelser her $\overset{6}{*}$ er O's absolute Bestemmelse, gives der her ogsaa virkelig relative Bestemmelser af Identitet ved Forskjel, nemlig $\overset{2}{*}D = O$, $\overset{3}{*}C = \overset{3}{*}E = O$ og $\overset{4}{*}D = O$.

Ved Siden af disse to Exempler skulle vi saa omtale den bedst bekjendte og ubetinget vigtigste Mangfoldighed af Forestillingsgrupperne, som bestemmes ved Numeraler — her sædvanlige benævnte og ubenævnte Tal, blandt hvilke Tiden og Stedet paa Linie atter indtage den allervigtigste Plads; altsaa Tingpunkterne. Her have vi ikke blot Grupper af Forestillinger med rene og klare Numeralbestemmelser i de benævnte Tal; men hver Gruppes Forskjelsnumeraler danne som Forestillinger betragtede selv en Gruppe, og bestemmes ved de sædvanlige ubenævnte Tal som alle Gruppernes fælleds Numeralsnumeraler, og ved Siden af disse optræder der ingen tilbagegaaende Bestemmelser af blot tvivlsom Entydighed, undtagen det ∞, som optræder som Modsætning til den absolute Identitetsbestemmelse, 0'et. Men medens vi altsaa her gjenfinde den Sætning, som mødte os ved Rosens Kronblade, at enhver Bestemmelse mellem Forskjelsnumeralerne er et Numeralsnumeral, maa vi tillige fæste Opmærksomheden paa Uligheden i Henseende til den anden Sætning; thi Tingpunkternes Forskjelsnumeraler kunne aldrig ved nogen Tilføjelse af identiske Numeraler frembringe Identitetsnumeralet.

Anderledes stille Forholdene sig, naar vi forestille os Retningerne fra et fast Punkt til et ubegrændset System af Punkter; thi medens ogsaa disse Forestillingers indbyrdes Bestemmelser, Vinklerne, ere Numeraler, ere Vinklernes indbyrdes Bestemmelser ikke saadanne, at $\overset{n}{*}$ giver entydig tilbagegaaende Bestemmelse uden for Tilfældene ($\overset{1}{*}$) og ($\div$). Vi have altsaa her i Almindelighed ikke Numeralsnumeraler. Heller ikke gives der noget bestemt Antal identiske Tilføjelser, som ud fra et vilkaarligt Forskjelsnumeral frembringer Identitetsnumeralet. Derimod gives der for et hvilketsomhelst Antal Tilføjelser af identiske Vinkler, saadanne Vinkler, som netop ved dette Antal Tilføjelser frembringe O.

Man kan dog paalægge Systemet af de Punkter, man forestiller sig, saadan Begrænsning, at det tilsvarende Vinkelsystem antager helt andre Egenskaber. Lad os saaledes indskrænke os til at betragte Punkter paa en Cirkel, hvis mellemliggende Buelængder ere = Radius. Her vil ingen Tilføjelse af noget Antal identiske Vinkler

føre tilbage til Udgangsretningen og derved frembringe Identitetsvinklen. Tillige ere disse Vinklers Bestemmelser i det væsentlige Numeralsnumeraler. Bestemmelsen af den Vinkel V, som i dette System ved Tilføjelse af m identiske Vinkler V frembringer en given Vinkel $\overset{m}{*} V$, er entydig, forsaavidt en saadan Vinkel V existerer som Numeral for et Par af disse Retningsforestillinger. Skjøndt nemlig Retningsforestillingerne ogsaa her danne en fuldstændig Gruppe, er dette ikke Tilfældet med deres Vinkler. Imidlertid kan vor Forestillingsgruppe fuldstændiggjøres saaledes, at ogsaa Vinklerne komme til at danne en fuldstændig Gruppe, og da have vi et System af Forestillinger med lutter Numeralsnumeraler. Denne Fuldstændiggjørelse maatte ske ved Halvering, Tredeling o. s. v. af bestemte Buer, f. Ex. den, hvis Længde er Radius; man faar herved Valg mellem en Flerhed af sideordnede Forestillingsgrupper, der alle omfatte hin førstomtalte. Men det afgjørende bliver, at i hver af disse Grupper ere Vinklernes indbyrdes Bestemmelser alle Numeralsnumeraler.

To Forhold, som indbyrdes synes at være nogenlunde uafhængige, ville ved Betragtningen af disse Exempler have frembudt sig som saadanne, efter hvilke man kunde inddele Numeralerne.

1) Der gives nogle Forestillingsgrupper, i hvilke alle Forskjelsnumeralernes indbyrdes Bestemmelser ere Numeralsnumeraler, og andre Grupper, i hvilke kun nogle Numeralbestemmelser have denne Egenskab.

2) Der gives nogle Forestillingsgrupper, i hvilke ingen Tilføjelse af identiske Forskjelsnumeraler frembringer Identitetsnumeralet O, andre, i hvilke et bestemt Antal Tilføjelser af ethvert Forskjelsnumeral giver O, atter andre, i hvilke saadan Frembringelse forekommer sporadisk.

Men endnu et tredie Forhold kan udledes af disse og lignende Erfaringer og anvendes ved Forestillingsgruppernes og Numeralernes Inddeling.

Bladet $\mathfrak{A}$ paa en Rose kan ganske vist neppe forvexles hverken med $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eller $\mathfrak{E}$, dog er, saaledes som disse Navne ere satte paa ovenstaaende Figur, $\mathfrak{D}$ og $\mathfrak{C}$ nærmere ved $\mathfrak{A}$ end $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{E}$; men for denne Egenskab, som dog ikke er uvæsentlig, haves intet Udtryk gjennem særlige Egenskaber ved Numeralerne B, $\overset{2}{*} B$, $\overset{3}{*} B$ og $\overset{4}{*} B$. Heller ikke, hvor Forestillingerne i Gruppen ere mere mangfoldige, optræde saadanne Kjendetegn gjennem de allerede udtalte Sætninger og deres Konsekvenser, og dog bliver Forestillingernes naturlige Orden i Gruppen til et meget væsentligt Moment, naar Gruppen er saa talrig, at der bliver Fare for Forvexling af de hinanden nærmest stillede Gjenstande. Forestiller man sig Delestregerne paa en fintdelt Kreds, til hvis Aflæsning Mikroskop er nødvendigt, og tænker man sig f. Ex., at der ialt er 10,800 Delestreger, saa vil man efter de hidtil nævnte Sætninger kunne udvikle Theorien for en saadan Gruppe med en Overensstemmelse, der strækker sig til de mindste Detailler, hvad enten man ved Udgangsnumeralet B be-

tegner Bestemmelsen af den Streg, der følger umiddelbart efter Nulstregen eller f. Ex. den 3,331te. I begge Tilfælde blive alle Kredsens Delestreger bestemte ved Numeraler $\overset{n}{*}B$, og de af dem, hvortil der paa den ene Maade knytter sig særlige Egenskaber, findes udrustede med de samme Egenskaber, naar de betragtes ud fra det andet Udgangsnumeral: den 5,400de Delestreg kommer i begge Tilfælde til at ligge ligeoverfor O-Stregen, og Stregerne for hele Grader vedblive at betegne hele Grader. I begge Tilfælde ordnes Stregerne efter Antallet af de til hinanden føjede B'er, og denne Ordning er tilstrækkelig for enhver exakt Behandling, men kun, hvis den falder sammen med den naturlige Ordning, hvor en Tilføjelse af B flytter Forestillingen hen til den nærmest paafølgende Streg, kan man drage Fordel af Sætninger, som gjøre visse Uopmærksomheder, Forvexlinger eller Fejl uskadelige.

Overfor en Gruppe som denne med diskrete Forestillinger kan Identitetsnumeralet holdes skarpt ud fra alle Gruppens andre Numeraler, og det er kun praktiske Grunde, som gjøre det tilraadeligt men ikke nødvendigt at fremhæve, at visse Numeraler betegne smaa, andre store Forskjelligheder, og at ringe Forskjel med ringe Fejl kan behandles tilnærmelsesvis som Identitet. Men ved andre Grupper af Forestillinger stiller Sagen sig helt anderledes. For de kontinuerte Forestillinger blive Begreberne om det smaa og det store og om Tilnærmelse af væsentlig Betydning for selve den exakte Theori.

Som Exempel paa de kontinuerte Forestillinger ville vi betragte Tiden. Begrebet om det næsten samtidige retter sig ganske efter den Grad af Opmærksomhed, med hvilken man betragter Tidsforestillingen. Snart anse vi Begivenheder for samtidige, naar de have fundet Sted i samme Aar eller paa samme Dag, snart anse vi os for meget omhyggelige, naar vi begrændse det Samtidige til, hvad der sker i samme Sekund. Men undtagelsesvis skjærpes vor Interesse og vor Opmærksomhed i langt højere Grad, saa at f. Ex. den Tusindedels Tidssekund bliver væsentlig, som adskiller de Momenter, da det dræbende Skud gjennembrød Karl den tolvtes højre og venstre Tinding, eller den Tusindmilliontedels Sekund, Lyset bruger for at passere en Kikkerts Glas. Ingen Erfaring har kunnet antyde en Grændse for Tidens Delelighed og skjælne imellem, hvad der er exakt samtidigt eller blot tilnærmelsesvis samtidigt. Og skjøndt det selvfølgelig ikke kan siges at være bevist ved Erfaring, at saadan Grændse overhovedet ikke existerer, er der dog næppe nogen iblandt os, som ikke anser sig for berettiget til at erklære Tiden for kontinuert, det vil sige til at paastaa, at Tidens Forandring sker ved ubetinget umærkelig og jevn Overgang uden Spring.

Ved Kontinuitet forstaa vi her almindelig den Egenskab ved Forestillinger af visse Slags, at der gives Forskjelsnumeraler, som nærme sig uden Grændse til Identitetsnumeralet, saa at de selv for en ideel Betragtning tilsidst kunne forvexles

med dette uden Fejl. En Konsekvens deraf er, at Forskjelsnumeralerne ogsaa indbyrdes maa flyde over i hinanden og kunne nærme sig hinanden saaledes, at de tilsidst kunne træde i hinandens Sted uden Forskjel i noget Resultat. Kontinuitet i den tilsvarende Forestillingsgruppe er saaledes Betingelse for, at irrationale Tal kunne opfattes som bestemte ved Tilnærmelse og indordnes blandt de rationale i naturlig Orden. En anden Konsekvens af Kontinuiteten er, at der kan tillægges den ved Tegnet ∞ betegnede Bestemmelse af et Forskjelsnumeral ved Identitetsnumeralet Betydningen af det uendelig store. Saafremt en Gruppes Forestillinger ikke ere kontinuerte, men diskrete, er det klart, at Bestemmelsen af en vis Forskjel ved selve Identiteten ganske simpelt er umulig; men denne Umulighed brydes, naar Bestemmelsens Udgangsnumeral kan opfattes som en til Identiteten grændsende Forskjel, som kaldes uendelig lille.

Som tredie og sidste fra Erfaringen hentede Forhold, der kan tjene til Forestillingernes Inddeling, optræder altsaa Kontinuiteten. Kontinuitetsaxiomet, at visse Forskjelsnumeraler nærme sig grændseløst til Identiteten, gjælder for de kontinuerede Forestillinger, men ikke for de diskrete.

Det sædvanlige Talbegrebs Stilling til alle disse tre Forhold er nu klar nok, de Forestillingsgrupper, som svare til disse uomtvistede Tal, ere saadanne, hvor

1) Enhver Bestemmelse mellem Forskjelsnumeraler (benævnte Tal) er et Numeralsnumeral (ubenævnt Tal).
2) Ingen Tilføjelse af indbyrdes identiske Forskjelsnumeraler giver Identitetsnumeralet, (d. e. Tælningen kan fortsættes uden Grændse).
3) Kontinuitetsaxiomet gjælder.

Men Spørgsmaalet er nu, om disse 3 Erfaringsaxiomer ere saaledes uafhængige af hinanden, at de alle tre maa optages i Tallets Definition, eller om det ikke meget mere forholder sig saaledes, at der er en indre Sammenhæng imellem dem, navnlig saaledes, at naar Nummer ét antages, ogsaa Nummer to og tre kunne bevises, om ikke for alle Tal, saa dog for en logisk nødvendig Afdeling af Tallene, medens samtidig ogsaa de øvrige Tals Forhold til Nummer to og tre lader sig bevise ved Nummer ét?

Hele Resten af dette Arbejde kan opfattes som mit Svar paa dette Spørgsmaal; men førend jeg gaar dertil, ønsker jeg at bemærke, at hvis man under Benægtelse af den førstnævnte af de tre Sætninger vil studere de Forestillingsgrupper, som have flertydige Bestemmelser af B ved $\overset{n}{*}B$, og tilsigte en almindelig Behandling af Numeralbegrebet fornemmelig i de Afskygninger, som falde udenfor Talbegrebet, da synes Sætningerne om Identitetens Frembringelse ved Tilføjning og maaske ogsaa om Kontinuiteten at maatte opfattes som selvstændige Axiomer.

Jeg har nemlig, hvad jeg dog ikke skal omtale udførligere, forsøgt at gjøre det andet af de tre Erfaringsresultater, Sætningerne om Identitetens Frembringelse ved Tilføjning,

til den principale Inddelingsgrund. Ogsaa ad denne Vej synes man at kunne udskille og behandle en vis Afdeling af Numeralbegrebet uden selvstændig Afgjørelse af de to andre Forhold gjennem Axiomer. Men den Afdeling af Numeralbegrebet, som derved træder i Spidsen (idet man nemlig inddeler efter det bestemte Antal identiske Forskjelsnumeraler, hvis Tilføjelse forudsættes at give O), har ialtfald udenfor de hele Tals Theori, maaske endog for denne, ikke saa stor Betydning som det sædvanlige Talbegreb. Og vil man gaa ud over denne Afdeling, maa der inddeles ogsaa efter Numeralsnumeralernes og Kontinuitetens Forekomst.

Og da endelig Kontinuitetsaxiomet alene utvivlsomt ikke er tilstrækkeligt som Inddelingsgrund, saa maa det mindst mulige Laan fra Erfaringen (Side 14), som vi bestemme os til at gjøre, blive det Axiom, at der gives Forestillingsgrupper, i hvilke enhver Bestemmelse af et Forskjelsnumeral ved et andet er et Numeralsnumeral. Den hertil svarende Definition af Tallet vil saa nær som mulig omfatte, hvad dette Ord sædvanlig betegner, dog saaledes, at de hele og rationale Tal faa en noget større Selvstændighed indenfor Begrebet, end man plejer at tillægge dem. Men der vil ikke heri kunne paavises nogen Grund til at undlade at bruge Navnet Tal for det saaledes definerede Begreb.

Tallet.

Ved ubenævnte Tal eller kort Tal forstaa vi altsaa dels Identitetsnumeralets absolute Bestemmelse, dels Forskjelsnumeralernes relative Bestemmelser[1]) i saadanne Forestillingsgrupper, hvor alle Forskjelsnumeralernes Bestemmelser ere Numeralsnumeraler. De Numeraler, der her bestemme selve Forestillingerne og bestemmes ved de ubenævnte Tal, kaldes benævnte Tal. I det Følgende ville de benævnte Tal blive betegnede ganske som almindelige Numeraler med latinske Initialer, Operationstegnene ville forebygge Muligheden af en Forvexling. Benævnte Tals Tilføjelser kalde vi specielt for Addition, derimod anse vi det for overflødigt at indføre et specielt Navn for deres Modsætningsafhængighed. Som Additionstegn bruge vi $+$ for $*$.

Af Tallets Definition følge nu direkte alle de Sætninger, som gjælde for alle ubenævnte Tal uden Hensyn til deres benævnte Tals og Forestillingers særlige Natur.

De ubenævnte Tal besidde dobbelte Sæt af Afhængigheder, idet de som Numeralsnumeraler baade selv ere Numeraler og bestemme Forestillinger, der atter ere Numeraler. De Afhængigheder, som tilkomme de ubenævnte Tal, fordi de selv ere Numeraler, kalde vi: deres Modsætning for Reciprocitet, deres Tilføjelse for Multiplikation. Til Betegnelse af de ubenævnte Tal anvende vi Taltegn og smaa latinske Bogstaver. Som Tegn

[1]) Se Note Side 22.

for benævnte Tals Bestemmelse ved ubenævnte anvende vi specielt (.) istedetfor (∗);

$$B = b \,.\, A$$

udsiger, at det benævnte Tal B er bestemt ud fra det ensbenævnte Tal A, Enheden, ved det ubenævnte Tal b. For det ubenævnte Tal, som betegner Identitet imellem to benævnte Tal, bruges Tegnet 1,

$$A = 1 \,.\, A.$$

For hvert ubenævnt Tal, a, giver Reciprociteten det reciproke Tal $\frac{1}{a}$, som i modsat Retning tjener til Bestemmelse mellem de samme to benævnte Tal som a; naar $A = a \,.\, E$, er $E = \frac{1}{a} \cdot A$. Specielt er $1 = \frac{1}{1} \cdot$

Multiplikationen, den specielle Tilføjelse af ubenævnte Tal,

$$p = c \,.\, b = cb,$$

hvorved Produktet p, der direkte bestemmer et benævnt Tal C ud fra det ensbenævnte A, findes bestemt ved Multiplikanden b, som bestemmer et tredie benævnt Tal B ved samme A og ved Multiplikatoren c, der bestemmer C ved B, er som enhver Tilføjelse i Besiddelse af Entydigheds- og Omvendingsprinciperne,

$$b = \frac{1}{c} \cdot p\,, \quad c = p \cdot \frac{1}{b}\,;$$

samt af det associative Princip,

$$(c \,.\, b) \,.\, a = c \,.\, (b \,.\, a),$$

derimod i Almindelighed ikke af det kommutative Princip. Specielt er dog

$$1 \,.\, a = a = a \,.\, 1 \quad \text{og} \quad 1 \,.\, 1 = 1.$$

At Identitetsnumeralet O, her altsaa det benævnte Tal «ingen saadan Forskjel», er absolut bestemt, betegnes paa en Maade, som i Formen ligner de andre benævnte Tals relative indbyrdes Bestemmelser, nemlig ved Tallet 0 i Formlen $O = 0 \,.\, A$; men da denne Formel altsaa giver den absolute Bestemmelse under relativ Form, maa der tillægges 0 Egenskaber, som afvige fra, ja stride imod, hvad der ellers gjælder for Tallene: Bestemmelsen i 0 maa gjøre Angivelse af Enheden for Bestemmelsen aldeles overflødig:

$$0 \,.\, A = 0 \,.\, B = O,$$

ogsaa naar A er forskjellig fra B; ja man maa endog have $0 \,.\, O = O$.

Intet Tal, hverken 0 selv eller noget af de relativt bestemmende ordinære Tal, kan være reciprokt Tal til 0. Et saadant skulde, hvis det existerede som et enkelt Tal, bestemme et vist benævnt Tal ud fra Identiteten O; $\frac{1}{0}$ kan da ikke være 0, fordi dette Tal bestemmer Identiteten selv og ikke nogensomhelst Forskjel; og $\frac{1}{0}$ kan ikke være a, det ubenævnte Tal, som bestemmer en vis Forskjel ved en anden, fordi dettes reciproke Tal $\frac{1}{a}$ ud fra enhver Forskjel bestemmer en anden Forskjel og ikke Identiteten. Fastholdes det, at

Gruppen ikke omfatter andre Forestillinger end dem, som efter Definitionen bestemmes som indbyrdes værende enten identiske eller forskjellige, saa kan Tegnet ∞, som bruges i $\infty = \frac{1}{0}$, ikke betegne andet end den ubetingede Umulighed. Kun derved, at Reciprocitetens formelle Lov medfører $\frac{1}{\infty} = 0$, altsaa ved Tilbageførelse til 0, kan ∞ faa Betydning i Ligninger. Man maa f. Ex. fortolke $x = \infty . a$ saaledes, at $0 . x = a$, $\frac{1}{a} . 0 = \frac{1}{x} = 0$, altsaa $\frac{1}{x} = 0$ og $x = \infty$.

Denne strenge Fortolkning af ∞ maa fastholdes, saalænge Kontinuitetsaxiomet ikke antages. Hvor Forestillingsgruppen derimod er kontinuert, saa at der gives benævnte Tal, som ikke ere Identitet, men flyde over deri, uden at det er muligt at adskille dem fra Identiteten, maa ∞ forstaas med en vis Modifikation. Til 0 grændser da en Mangfoldighed af grændseløst smaa ubenævnte Tal, til hvert af disse maa der svare et reciprokt Tal, og disse reciproke Tal maa ikke blot indbyrdes flyde over i hinanden med umærkelige Overgange, men ogsaa grændse op til ∞ som 0's reciproke Tal. For en Forestillingsgruppes Kontinuitet bliver det da en nødvendig Betingelse, at visse af dens Forestillinger maa grændse op til Forestillinger, en, flere eller en hel Gruppe, som ikke høre til selve hin Forestillingsgruppe og ligesaalidt (eller ligesaavel) kunne bestemmes ud fra dens ordinære Forestillinger, som en Forskjel inden for Gruppen kan bestemmes ved Identiteten. I disse Tilfælde faar da ∞ Betydning af det uendelig store (d. e. uopnaaelig) store. Uopnaaelig nemlig ved de Bestemmelser, som ellers kunne bestemme enhver Forestilling, som hører til Gruppen.

Multiplikation med 0 som Multiplikator gjør Produktet til 0, uden Hensyn til Multiplikanden. Dette fremgaar direkte af O's Definition, $O = 0 . A = 0 . B$. Bestemmes nemlig de benævnte Tal ud fra en fælleds Enhed E ved Tallene $A = a . E$, $B = b . E$ og erindres, at $O = 0 . E$, haves Sætningen i

$$0 = 0 . a = 0 . b.$$

Omvendt maa Multiplikator være 0, naar Produktet er 0, men Multiplikanden bestemmer en Forskjel, enhver anden Multiplikator vilde give et Produkt, som bestemte en Forskjel ud fra en anden.

Ogsaa naar Multiplikanden er 0, maa Produktet blive 0. Det maa forudsættes, at ethvert ubenævnt Tal, der jo efter Definitionen ud fra ethvert benævnt Tal, der betegner en Forskjel, igjen bestemmer et saadant, ogsaa ud fra Identiteten maa bestemme et til Gruppen hørende benævnt Tal, enten en Forskjel eller Identitet[1]). Men en Forskjel kan

[1]) Denne Forudsætning, der let nok kan verificeres for hver Talart især, forekommer mig efter sin Natur at skulle ligge i Tallets Definition. Paa Grund af Latituden i de enkelte Ord, kan jeg dog ikke anse denne Forudsætning som Konsekvens af Definitionen, som den her er formuleret, og det er ikke lykkedes mig at tilspidse Definitionen ved en saadan Ændring, som fyldestgjør paa dette Punkt uden at skade paa andre.

ikke bestemmes ud fra Identiteten, uden at det bestemmende Tal var reciprokt til 0, altsaa maa et hvilketsomhelst ubenævnt Tal bestemme Identiteten ud fra Identiteten, men er $O = a.O$, maa ogsaa $0 = a.0$, Den omvendte Sætning, at naar Produktet er 0, og Multiplikator forskjellig fra 0, maa Multiplikandus være 0, bevises paa samme Maade. — Naar et Produkt er 0, maa en af Faktorerne (eller begge) være 0.

Fra Sætningen, at Produktet er 0, naar en af Faktorerne er 0, maa der for kontinuerte Tals Vedkommende, naar ∞ anses som Tal, gjøres Undtagelse for det Tilfælde, at den anden Faktor var ∞.

I det Foregaaende have vi omtalt de Afhængigheder, der tilkomme Tallene som Numeralsnumeraler, som sagt maa vi dernæst tage i Betragtning, hvad Virkning det har for de ubenævnte Tal, at de benævnte Tal, som de bestemme, ligeledes ere Numeraler, og som saadanne besidde Modsætnings- og Additionsafhængighederne. Disse Afhængigheder fremkalde tilsvarende Afhængigheder mellem de ubenævnte Tal, idet vi betragte de indbyrdes afhængige benævnte Tal som bestemte ved ubenævnte Tal ud fra en vilkaarlig Enhed.

De Tal, hvorved indbyrdes modsatte benævnte Tal A og $\div A$ bestemmes i Sammenligning med det ensbenævnte, vilkaarlige E, maa være indbyrdes afhængige og kunne derfor siges selv at være modsatte ubenævnte Tal. $\div A$ er nemlig bestemmeligt ud fra A, og denne Bestemmelse af et benævnt Tal ved sit modsatte er som omtalt et Numeralsnumeral eller ubenævnt Tal, som vi betegne ved (-1),

$$\div A = (-1).A.$$

Er da $A = a.E$, vil $\div A = (-1).a.E = (-a).E$, idet vi med $(-a)$ direkte bestemme $\div A$ ud fra E; som Produkt

$$(-a) = (-1).a,$$

er da $(-a)$ afhængigt af a. Ligeledes er $a = (-1).(-a)$, ogsaa de ubenævnte Tals Modsætning er ikke blot entydig, men ogsaa gjensidig; fremdeles er specielt $(-1).(-1) = 1$ og $(-0) = 0$.

I enhver Addition af benævnte Tal $S = A + B$ ville de ubenævnte Tal a og b, som bestemme A og B ud fra en vilkaarlig ensbenævnt Enhed E, $A = a.E$ og $B = b.E$, bestemme det ubenævnte Tal s, hvormed S bestemmes ud fra samme Enhed $S = s.E$. Thi ved a og b og Additionsbestemmelsen vil der ud fra en hvilkensomhelst ogsaa forandret Enhed F være bestemt et ensbenævnt Tal, $a.F + b.F$, altsaa vil ogsaa, da ifølge Tallets Definition dette ligesom ethvert af Gruppens Numeraler bestemmes ud fra F ved et Numeralsnumeral, det ubenævnte Tal, der bestemmer $a.F + b.F$ ud fra F være givet uafhængigt af F; det kan da ikke være andet end det ubenævnte Tal s, som afgav Bestemmelsen ud fra E. Den Afhængighed, hvori saaledes s staar til a og b og til disses Orden, kaldes Addition af ubenævnte Tal og betegnes med

$$s = a + b.$$

For denne Afhængighed ligesom for de benævnte Tals Addition gjælde Entydigheds og Omvendingsprinciperne

$$a = s + (-b) \quad \text{og} \quad b = (-a) + s.$$

Specielt er $0 = a + (-a)$ og $0 + a = a + 0 = a$. Alt dette, fordi de benævnte Tals Addition som Numeralers Tilføjelse besidder de tilsvarende Sætninger. Ligeledes findes det associative Princip at maatte gjælde ogsaa for ubenævnte Tals Addition,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Derimod kan Spørgsmaalet om det kommutative Princips Gyldighed for ubenævnte Tals Addition ligesaalidt bevises i Almindelighed, som det kunde bevises for Numeraler i Almindelighed.

Men desuden vise de ubenævnte Tals Addition og Multiplikation sig at være sammenknyttede ved det ene af de distributive Principer. Vi lade i $S = A + B$ ligesom ovenfor de benævnte Tal A, B og S være bestemte ud fra Enheden E ved a, b og s, $s = a + b$; men desuden bestemme vi de samme benævnte Tal ud fra en anden Enhed F ved a', b' og s', altsaa $a' + b' = s'$. Er da $E = e.F$, vil $a' = a.e$, $b' = b.e$ og $s' = s.e$, altsaa haves for hvilkesomhelst a, b og e

$$a.e + b.e = (a + b).e,$$

hvorved det distributive Princip for Multiplikator som Sum er bevist for hvilkesomhelst ubenævnte Tal.

Hermed er nu udtømt, hvad der af Sætninger kan udsiges om de ubenævnte Tal i fuld Almindelighed; men disse Sætninger ere ogsaa netop tilstrækkelige til at danne Grundlaget for Beviserne for de øvrige Sætninger, altsaa navnlig for de to kommutative Principer og for det fuldstændige distributive Princip for de Talarter, for hvilke disse Sætninger overhovedet have Gyldighed. Vi maa da nu skride til at inddele Tallene, og herved ville de to Erfaringsprinciper om Identitetens Frembringelse ved Tilføjelse og om Kontinuitet, som have vist sig at være overflødige (undtagen Kontinuiteten for ∞'s Vedkommende) til Udledelse af de almindelige principale Sætninger, faa Betydning som Inddelingsgrunde, tildels dog saaledes, at deres erfaringsmæssige Karakter tabes, idet den derpaa grundede Inddeling viser sig logisk nødvendig.

Men ved Siden af den heraf følgende Inddeling bliver ligesom i de sædvanlige Fremstillinger en anden Inddeling nødvendig, og krydser den første. I hver af dennes Afdelinger maa vi sondre imellem, hvad vi ville kalde nødvendige Tal og Systemer af blot mulige Tal. Først maa vi nemlig behandle de Tal, som nødvendigvis aflede af 0 og 1 ved de fire Regningsarter, Modsætning, Addition, Reciprocitet og Multiplikation, de Tal nemlig, hvis Existens kræves af Gruppebegrebets Fordring, til de i snævrere Forstand mathematiske Forestillinger, at ikke blot Forestillingerne selv, men ogsaa deres Forskjelsnumeraler, her benævnte Tal, skulle udgjøre Grupper, at altsaa ethvert af Forestillingernes

Numeraler og Numeralsnumeraler skal kunne anvendes ud fra henholdsvis en hvilkensomhelst af Gruppens Forestillinger og Numeraler og bestandig bestemme henholdsvis en Forestilling og et Numeral i Gruppen. Indbegrebet af de i denne Forstand nødvendige Tal bestemmer Gruppens mindst mulige Omfang, og der gives konkrete Forestillingsgrupper, som ikke besidde større Mangfoldighed. Men derefter maa det saa undersøges, om der ved Siden af saadanne nødvendige Tal kan haves andre mulige Tal sammen med hine, og hvilke Betingelserne ere for saadan Mulighed. Disse mulige Tals Virkelighed beror paa, at man kan paavise konkrete Forestillingsarter af tilsvarende større Mangfoldighed.

Det vil bidrage til Fremstillingens Klarhed, at man gjør Inddelingen efter nødvendige og mulige Tal til den principale, og underordner Inddelingen efter hine Erfaringssætninger som en sekundær under den.

Nødvendige Tal.

Nødvendige Tal i enhver Gruppe af mathematiske Forestillinger ere foruden 0 og 1 i det mindste ogsaa de øvrige hele Tal, Antallene og disses modsatte hele Tal. Allerede for de almindelige Numeraler have vi ovenfor (Side 12) set, hvorledes et givet Numeral A ved Tilføjelse til dets identiske eller modsatte Numeraler frembringer en Række Numeraler, $\overset{m}{*}(\div A)$, 0, $\overset{n}{*}A$, som nødvendig høre til samme Gruppe, og for hvis Tilføjelser ogsaa det kommutative Princip kan bevises. Idet nu A antages at være benævnt Tal, bliver Tilføjelsesbestemmelserne $\overset{n}{*}$ Numeralsnumeraler, ubenævnte Tal, som her simplere kunne skrives n med Bortkastelse af $*$ Tegnet, $\overset{n}{*} = n$ og $\overset{n}{*}(-1) = -n$. Antallene og deres modsatte Tal, og for disses Addition gjælder det kommutative Princip; Modsætningsafhængigheden kunde altsaa her erstattes ved Subtraktion, $n + (-m) = n - m$.

At Multiplikation, naar Multiplikator er et Antal, sker ved Addition af samme Antal med Multiplikanden identiske Addender, bevises ved det distributive Princip; naar nemlig $n = 1 + 1 + \ldots + 1$, vil $na = a + a + \ldots + a$.

Denne Sætnings Udvidelse til alle hele Tal følger af, at $n.(-1) = -n = (-1).n$, saaat formedelst det associative Princip $(-n).a = n(-1).a = n(-a)$. Følgelig er ogsaa $(-n)(-a) = na$, nemlig forsaavidt n her betegner et Antal.

Naar baade Multiplikator og Multiplikanden ere Antal, gjælder Multiplikationens kommutative Princip og bevises ved Additionens kommutative Princip.

$$n \,.\, m = (1 + 1 + \ldots + 1)_m + \ldots + (1 + 1 + \ldots + 1)_m \ (n \text{ Addender}) =$$
$$= (1 + \ldots + 1)_n + (1 + \ldots + 1)_n + \ldots + (1 + \ldots + 1)_n \ (m \text{ Addender}) = nm.$$

Ifølge de nærmest foregaaende Sætninger maa dernæst Multiplikationens kommutative Princip ogsaa gjælde, naar Faktorerne ere hvilkesomhelst hele Tal.

Her og overalt, hvor det kommutative Princip for Multiplikationen findes gjældende, kan Division træde i Stedet for Reciprocitetsafhængigheden. Naar a og b ere kommutative,

$ab = ba = c$, vil $b = \frac{1}{a}c = c\frac{1}{a} = \frac{c}{a}$, denne sidste Betegnelse bliver da utvetydigt Udtryk for et Tal.

Naar overhovedet a er et nødvendigt Tal, maa ogsaa $\frac{1}{a}$ høre til Gruppens nødvendige Tal, og er b et hvilketsomhelst andet nødvendigt Tal, maa ogsaa saavel $b \cdot \frac{1}{a}$ som $\frac{1}{a} \cdot b$ $\left(\text{altsaa } \frac{b}{a}, \text{ hvis Multiplikationen er kommutativ}\right)$, være nødvendige Tal. Da de hele Tal altid ere nødvendige Tal i hver Forestillingsgruppe, og Kvotienterne $\frac{m}{n}$ af hele Tal ogsaa skulle være nødvendige Tal, afhænger Spørgsmaalet, om Gruppen har andre nødvendige Tal end de hele Tal, af, om $\frac{m}{n}$ i Almindelighed er helt Tal, naar m og n ere hele Tal. Dette Spørgsmaal maa vi særlig have for Øje ved den paafølgende nærmere Undersøgelse af de hele Tals Egenskaber.

Den ved bestandig Addition af 1 ordnede Række af Antallene

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad l,\ l+1,\ l+2,\ l+3\ \ldots,\quad m,\ \ldots\ n,\ \ldots,$$

vil enten bestandig opvise nye fra de forudgaaende forskjellige Tal, eller ogsaa maa Rækken være periodisk. Hvis man nemlig blot ét Sted, paa Pladsen $l+o$ gjenfandt det samme Tal, som staar paa Pladsen l, $l+o=l$; da vil ogsaa $l+1+o=l+1, \ldots, l+n+o=l+n=$ $=l+n+mo$; ligeledes $l-n+o=l-n$. Paa Pladsen o maa da Tallet 0 gjenfindes og overhovedet paa alle Pladser mo. Kjender man Rækkens o første Tal, da kjendes de alle i disse Tilfælde. Modsætningsafhængigheden frembringer heller ikke andre Tal, thi man har almindeligt $(-n) = o-n$.

Lad o betegne det første Tal i den ordnede Række efter 0, som bliver identisk med 0, da er det klart, at to hvilkesomhelst af Tallene

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ o-1$$

ikke kunne være identiske, alle maa de være indbyrdes forskjellige.

Da $o.0 = o.1 = o.2 = \ldots o.(o-1) = 0$, har o fuldstændig 0's absolut bestemmende Egenskab, og Bestemmelsen af Identitetsnumeralet ved Addition af hvilkensomhelst Forskjel i Antallet o, er en almindelig Egenskab for Forestillingsgruppen, en Egenskab, hvorefter Forestillingerne kunne inddeles, forsaavidt de ikke have større Omfang end, hvad der svarer til Systemet af nødvendige Tal. Men denne Inddeling efter Talrækkens bestandige Vexlen eller Periodicitet og efter Periodens Længde er ganske den samme som Inddelingen efter Erfaringsprinciperne om Identitets Frembringelse ved Tilføjelse af identisk Forskjel.

Ikke ethvert Antal, men kun primiske Antal o kunne haves $= 0$ i Forestillingsgrupper med gjennemgaaende Talbestemmelser. Thi Antagelse af, at $m.n = o$, hvor

m og n vare Antal i Rækken 2, 3, ... $o-1$, vilde stride imod den for alle Tal gjældende Sætning, at naar Produktet er 0, maa den ene eller anden Faktor være $= 0$ [1]).

Multiplikation af de hele Tal 1, ... $o-1$ med m, et hvilketsomhelst af dem, vil give en Række hele fra 0 forskjellige Tal af samme Række, blandt hvilke ikke to kunne være indbyrdes identiske. Thi skulde $l.m = 0$, maatte $l = 0$, og skulde $l.m = n.m$, maatte $l - n = 0$, og det ene som det andet strider imod Forudsætningen. Produkterne $l.m$ maa da blot i forandret Orden gjengive alle Tallene 1, ... $o-1$, og navnlig maa man til hvert m kunne bestemme l saaledes, at $l.m = 1$, d. e. $\frac{1}{m} = l$. Vi se saaledes, at de hele Tals reciproke Tal saavel som de nødvendige Tal $\frac{n}{m}$ alle selv ere hele Tal i enhver af disse periodiske Talarter.

Naar derimod Gruppens Forestillinger ere saadanne, at Talrækken 0, 1, 2 ..... bestandig bringer nye Tal og derfor kan fortsættes uden Grændse, vil denne Række trods sin Mangfoldighed af Led dog ikke omfatte alle Gruppens nødvendige Tal. Modsætningsafhængigheden supplerer denne de positive hele Tals Række med Rækken af de negative Tal, som alle maa være forskjellige baade indbyrdes og fra de positive Tal, fordi disse ere indbyrdes forskjellige. Og vel fører baade Addition og Multiplikation af disse hele Tal bestandig til hele Tal; men Reciprociteten gjør nye Tal nødvendige. Med Undtagelse af 1 kan et Antals reciproke Tal ikke selv være et helt Tal; naar m og n ere andre hele positive Tal end 1, kan man ikke have $m.n = 1$, thi da maatte

$$m(np) = (mn)p = p;$$

for hvilketsomhelst Antal p maatte man da ved at tælle ud over p og np tilsidst komme til et Tal $m(np)$, som var Gjentagelse af p, hvilket er imod Forudsætningen. Heller ikke kan n's reciproke Tal være et negativt helt Tal, og hvad den sidste Mulighed angaar, at $\frac{1}{n} = 0$, saa har vi her et Valg, en Inddeling aaben, nemlig efter Kontinuitetsaxiomet; Benægtelsen af, at et helt Tal og 0 kunne være reciproke, adskiller de diskrete Forestillingers Tal fra de kontinuerte, for hvilke saadan Reciprocitet som omtalt er mulig i Grændsetilfældet $n = \infty$. Da Reciprociteten er gjensidig entydig, maa forskjellige hele Tals reciproke Tal være forskjellige indbyrdes.

Disse Gruppers nødvendige Tals Mængde fordobles altsaa, afset fra ± 1 og 0, ved Reciprociteten. Ogsaa for de reciproke Tal gjælde begge de kommutative Principer og

---

[1]) En Sætning, hvis Gyldighed særlig paa dette Omraade bestyrkes ved den øjensynlige Rigtighed af, at Bestemmelsen ved Tilføjelse af et bestemt Antal er anvendelig paa Identiteten saavel som paa Forskel, og ud fra Identiteten giver Identitet.

bevises let nok og saaledes, at der ikke er Grund til her at dvæle derved. Ved Addition og Multiplikation mellem hele Tals reciproke Tal og hele Tal udvides de nødvendige Tals Grændser til ogsaa at omfatte Brøkerne $\frac{n}{m}$, og ogsaa for disse gjælde begge de kommutative Principer.

Naar Kontinuitetsaxiomet ikke gjælder, udfylder Brøkernes System hele Begrebet nødvendige Tal. Enhver af de 4 Regningsarter, hvis Resultat efter Definitionen skal være et nødvendigt Tal, fører ud fra hvilkesomhelst Brøker til et Resultat, som ogsaa er Brøk. Paa Grund af Brøkernes Forkortelighed kan et hvilketsomhelst System af givne Brøker bringes til ens Benævning, og det paa mangfoldige Maader. Dette viser, at der til hvilkesomhelst af Gruppens benævnte Tal maa kunne findes saadanne Enheder, ved hvis bestandige Addition og Modsætning de alle kunne bestemmes. Havde man oprindelig valgt en saadan Enhed til Udgangsnumeral, vilde de givne benævnte Tal være blevne bestemte ved hele Tal, men samtidig vilde Brøkerne ud fra denne Enhed vise Existensen af en yderligere Mangfoldighed af benævnte Tal i Gruppen. Ved Brug af fælleds Nævner kunne altsaa Brøkerne ordnes paa Række lige saa vel som de hele Tal. Kun er Brøkernes Række ikke blot ubetinget aaben for Nydannelser ved Addition, ligesom de hele Tals Række er; men mellem hvert sidestillet Par Brøker i en Række, der er nok saa stærkt udfyldt, f. Ex. imellem 0 og $\frac{1}{\omega}$, hvor ω betegner Rækkens yderste angivne hele Tal, er der bestandig Plads aaben for Indskydelse af mellemfaldende Brøker.

Det maa dog bestemt fremhæves, at denne Brøkernes Ordning er rent formel og ingenlunde, som man kunde tro, paatvinger os Kontinuitetsaxiomet. Har ω den nylig angivne Betydning, da indtager i vor Ordning $\frac{1}{\omega}$ vistnok Pladsen nærmest ved 0 og beholder den saa længe, der ikke tales om større Antal end ω; men dermed er paa ingen Maade sagt noget om, at det benævnte Tal, som med en vilkaarlig Enhed E bestemmes som $\frac{1}{\omega} \cdot E$, skal betegne en ubetydelig Forskjel, tvertimod kan denne Forskjel $\frac{1}{\omega} \cdot E$ fysisk set være særdeles betydelig, en Mængde ved hele Tal bestemte benævnte Tal $n.E$ kunne meget vel i Storhed falde imellem O og $\frac{1}{\omega} . E$.

Antages derimod Kontinuitetsaxiomet, saa sker det i Kraft af et fysisk Moment i Forestillingsgruppens Beskaffenhed, ved den Sætning, som kun gjælder for disse, at ethvert benævnt Tal er mindre forskjelligt fra 0 end de benævnte Tal, som fremstilles ved dets gjentagne Addition og altsaa bestemmes ved hele Tal > 1 med det som Enhed. Med Kontinuitetsaxiomets Antagelse ordnes Tallene, Brøkerne saavel som de hele Tal efter deres Størrelse; og det største Tal er det, som mindst kan og tør forvexles med 0. Saa faar man Ret og Forpligtelse til at identificere visse smaa Tal med 0, Formler modificeres ved

Bortkastelse af forsvindende Led; Tal, som bestemme Forestillinger, der med fysisk Nødvendighed tilhøre Gruppen, men ikke formelt efter den tidligere Definition kunde erklæres for nødvendige Tal, bestemmes ved Tilnærmelse og indordnes under Navn af irrationale Tal i flydende Overgang imellem Brøkerne; og Antagelsen af ubegrændset Tilnærmelse fremtvinger Bestemmelsen af ∞ som 0's reciproke Tal med Betydningen af det grændseløst store. Gruppen maa, naar Kontinuitetsaxiomet skal gjælde for den, grændse til Forestillinger med den særegne Egenskab, at de ere uopnaaelige ud fra Gruppens andre Forestillinger, selv ved nok saa længe fortsat Addition af hvilkesomhelst almindelige benævnte Tal.

Med Tilnærmelse beviser man her de kommutative Principer ogsaa for de irrationale Tal og Gruppens Afsluttethed ved og med disse.

Uagtet man ogsaa i den traditionelle Mathematik finder, at de rationale Tal optræde med større Selvstændighed end blot som Underafdeling af de reelle, de hele Tal med en Theori, der i visse Maader stiller dem ved Siden af de rationale, kan det dog ikke nægtes, at vor Definition i denne Henseende fører os et betydeligt Stykke videre til Sondring imellem forskjellige Talarter. Tillægsordet ubenævnt til Tallet passer ikke ganske, det har ialtfald for os ikke den Hentydning til radikal Abstraktion fra Forestillingernes Navn og Særegenheder, som man har vænnet sig til at knytte dertil. Forskjellen mellem de Abstraktioner, som knytte sig til de henævnte og ubenævnte Tal, er dog vedblivende stor nok til at retfærdiggjøre Bibeholdelsen af disse Navne. Den Rest af Forskjel imellem de ubenævnte Tals Arter, som bliver tilbage og gjør hver af dem uanvendelig udenfor en begrændset Kreds af Forestillinger, fremgaar meget mere af en abstrakt formel Inddeling end af Hensyn til en empirisk erkjendt Forskjel mellem de konkrete Forestillinger, og den hindrer ikke, at Behandlingen af de hele Talarter, for hvilke $2 = 0$, $3 = 0$, $5 = 0$, ... $p = 0$, kan og bør foretages under ét ved den paa de rationale Tal byggede hele Tals Theori. Og Forholdet mellem de diskrete, rationale Tal og de kontinuerte reelle Tal er heller ingenlunde nogen skarp Modsætning. Skjøndt de reelle Tal utvivlsomt udgjør en afsluttet Gruppe, som gjennem Kontinuitetsaxiomet gjør sig gjældende med en vis Nødvendighed, saa forhindrer det dog ikke, at de rationale Tals Gruppe optræder indenfor hin som de særlig og i egentlig Forstand nødvendige Tal. Og naar vi nu skulle gaa over til at betragte de Grupper af mulige Tal, som kunne knyttes som Udvidelser til hver af de omtalte Arter af nødvendige Tal, saa vil det vise sig, at ialtfald den allervigtigste Del af de irrationale Tal ogsaa uden Kontinuitetsaxiomet ville findes som Tillæg til de rationale Tals System.

Af det Sagte fremgaar Grunden til, at vi i det Følgende ville lægge de rationale Tal til Grund og særlig tænke paa dem, hvor der ikke udtrykkeligt til Benævnelsen nødvendige Tal knyttes særlige nærmere Bestemmelser. Ud fra den rationale Talarts Undersøgelse med Hensyn til dens mulige Forøgelser kan man med Lethed slutte til begge

Sider angaaende baade de hele Talarters og den reelle Talarts mulige Tal, altsaa overhovedet til alle Former af Begrebet:

Mulige Tal.

Naar man — hvad vi her overspringe, men forudsætte udført — med den ene eller den anden Art af nødvendige Tal har udviklet Læren om Afhængighederne indtil de almindeligste Former for Kombinationer af de 4 principale Regningsarter og grundlagt Funktionslæren, støder man under den videre Fremgang som bekjendt ved Ligningerne af 2den og højere Grader paa saadanne Afhængigheder, som i nogle Tilfælde aabenbart ere flertydige, i andre bevislig umulige at tilfredsstille ved nødvendige Tal. Da der nu ikke lader sig føre, ialtfald ikke er ført almengyldigt Bevis for, at ogsaa saadanne Ligninger altid skulle have Løsninger i Tal, kan der ikke herfra hentes noget Argument, som ligefrem tvinger os til at erkjende andre Tal for nødvendige, end f. Ex. de rationale. Vi ere saaledes ikke berettigede til af Mangelen af rationale Løsninger for $x^2 = 2$ at slutte, at $\sqrt{2}$ skal være et Tal, end mindre et saadant Tal, som kan adderes og multipliceres efter de kommutative Principer.

Endnu urigtigere vilde dog den modsatte Slutning være, at fordi $\sqrt{2}$ ikke er noget af de Tal, som vi have erkjendt for nødvendige, derfor skulde det ikke kunne være noget Tal. De Midler, Numeralers Modsætning og Tilføjelse af identiske Numeraler, som vi have benyttet, for ud fra Tallene 0 og 1 at slutte os til de øvrige Tal, ere vel, saavidt det kan vides, de eneste, der i Almindelighed staa til vor Raadighed; men vort Kjendskab til disse Midler afskjærer ikke Muligheden af, at der, naar Talen er om et bestemt Slags Forestillinger, kan existere andre Midler til ud fra en vilkaarlig Enhed at bestemme Numeralerne i Gruppen. Og fordi de Forestillinger og deres Numeraler, der bestemmes ved rationale Tal, danne en Gruppe, hvori enhver Bestemmelse kan anbringes paa henholdsvis enhver Forestilling og ethvert Numeral, uden at Resultatet overskrider Gruppens Grændser, derfor kan en saadan Gruppe dog meget vel være en Del af en endnu mere omfattende Gruppe. Endog uden alt Hensyn til Ligningerne af højere Grader, maa vi, naar vi tilsigte fuldstændigt Overblik over hele Talsystemet, forudsætte Muligheden af, at der kan existere Tal, som ikke høre til dem, som vi have erkjendt for nødvendige. Og den Omstændighed, at vi ikke kjende noget Middel, som direkte kan angive os, at det overhovedet er umuligt at paavise Tal med andre end visse forud bestemmelige Kjendetegn, har kun til Følge, at vi overfor Spørgsmaal om yderligere Muligheder af Tal maa give vort Spørgsmaal bestemtere Form, at vi sukcessivt maa opstille Hypotheser om de Egenskaber, som vi tænke os, at de mulige, ikke nødvendige Tal skulle besidde.

Prøven paa hver Hypothese og eventuelt Beviset for de Hypothesen indskrænkende Betingelser maa da føres paa følgende Maade: Ved de hypothetiske Sætninger i Forbindelse

med et tilstrækkeligt Udvalg af de principale Sætninger, som definitionsmæssig gjælde for alle Tal, udvikles specielle Regler for alle 4 principale Regningsarter, saaledes at alle de Talformer kunne kjendes, hvis Existens med Nødvendighed følger af den gjorte Hypothese, idet saavel Modsætningen og Additionen som Reciprociteten og Multiplikationen med hvilkesomhelst Tal af samme Art skal give et Tal til Resultat. Det kræves da, at alle de nævnte Regningsarter skulle være entydige, at Modsætningen og Reciprociteten skulle være symmetriske Afhængigheder, at baade Addition og Multiplikation skulle besidde Omvendingsprincipet og det associative Princip, at det distributive Princip for Multiplikator som Sum skal gjælde, og endelig at Undtagelsessætningerne om 0 skulle staa ved Magt: $0.x = 0$, $x.0 = 0$, og omvendt, at $xy = 0$ kræver enten $x = 0$ eller $y = 0$. Naar alle disse Betingelser ere opfyldte, erkjende vi saadanne hypothetiske Tal for mulige Tal.

Jeg anser nemlig de nævnte Sætninger for at være en Oversættelse af Tallets Definition i det mathematiske Tegnsprog. Er dette Tilfældet, da maa slige Talformer ikke blot erkjendes som mulige Tal, men ubetinget anerkjendes som fuldt berettigede. Skulde det ved min Fejl (jvnfr. Noterne Side 20, 22 og 27) ikke være lykkedes mig at frembringe Kongruens imellem de to Former for Tallets Definition, saa vilde jeg overfor det foreliggende Spørgsmaal, om hypothetiske Tals Anerkjendelse, holde mig til de her angivne Kjendetegn. I Virkeligheden er det disse, som ved at suppleres med de nødvendige Definitioner for benævnte Tal og mathematiske Forestillinger ere blevne oversatte i det sædvanlige Sprog (Mathematisk Tidsskrift 1880, Side 54 til 61) til vor nærværende Definition for Tallet og ikke omvendt. Jeg haaber, at det vil erkjendes, at der er vundet noget væsentligt ved denne Oversættelse, men det har været overordentlig vanskeligt at udforme denne Oversættelse i det forholdsvis vage Skriftsprog, som er uddannet under et System af paa dette Punkt uholdbare Forudsætninger.

Ethvert System af mulige Tal maa omfatte en fuldstændig Art af nødvendige Tal og knytte sig til denne som dens Udvidelse; i Almindelighed vil der da for hver Art nødvendige Tal gives et analogt System eller flere af mulige Tal. Men enhver Slags mulige Tal vil ogsaa som Talart kunne blive Udgangspunktet for nye Udvidelser af Begrebet mulige Tal.

Det har naturligvis baade i theoretisk og i praktisk Henseende stor Interesse at lære Talbegrebet at kjende i alle dets mulige Arter. Efterhaanden som Talbegrebet læres at kjende i større Omfang, kommer det i Betragtning, om der gives konkrete Forestillinger svarende til de theoretisk mulige Talformer, saaledes at disse derved maa erkjendes for virkelige Tal. I denne Henseende vil det være afgjørende, om der efter Forestillingernes Beskaffenhed kan paavises andre Bestemmelser af deres benævnte Tal ved Numeralsnumeraler end saadanne, som hidrøre fra en Enheds Modsætning og Addition. Til Exempel skal jeg henlede Tanken paa den Betydning, det for Planens Punktgeometri har, at almindelig

Ligedannethedsbestemmelse her haves ved Siden af Modsætnings- og Additionsbestemmelsen, som kun føre til Bestemmelser for Punkter paa en ret Linie.

Da de kommutative Principer ere fundne gyldige for alle de nødvendige Tal, laa det nær at begynde Søgningen efter mulige Tal med den Hypothese, at der uden for disse kan gives Tal, som besidde de kommutative Principer. Man vilde, efter at have fundet alle mulige kommutative Tal ingenlunde være fritaget for at spørge videre, om der ikke ogsaa var Mulighed for ikke kommutative Tal; men hvor naturlig disse end kunne være beslægtede med de nødvendige Tal, vil den store Simpelhed i den sædvanlige Mathematik lide væsentlige Skaar ved Savnet blot af et af de kommutative Principer, saa at Tallenes Forhold overfor disse altid vil paatvinge sig som en meget vægtig Grund til en Inddeling af Tallene.

Forsøger man imidlertid nærmere Hypothesen om de kommutative Principers Gyldighed, saa vil man finde, at Modsætningens og Additionens Udvikling og Prøven derefter kan udføres, men at Hypothesen overfor Multiplikationen er for vid til, at man uden yderligere Hypothese kan udvikle Regningsreglerne. Den udfyldende Hypothese, som her naturligst tilbyder sig, nemlig at de mulige Tal skulle have en n-leddet Hovedform, til hvilken Resultaterne af Regningsarterne alle vende tilbage, kan imidlertid ogsaa opstilles uafhængig af Hypothesen om de kommutative Principer, og er vel ogsaa selv for vid til i Almindelighed at gjøre al yderligere Hypothese overflødig, den kan dog føre videre end hin, og de Tillægshypotheser, som den endelig kræver, synes mindre betydelige. Derfor vælge vi denne.

Lad os nemlig aller først betragte de nødvendige Følger af, at ét Tal i antages at existere uden at høre til de nødvendige Tal. Ved Multiplikation med og Addition til hvilkesombelst nødvendige Tal a og b fremtvinges alle de i Formen

$$a + bi$$

indbefattede Tal, og af saadanne kunne ikke to være indbyrdes identiske,

$$a + bi = c + di,$$

med mindre baade $a = c$ og $b = d$. Thi Ligningen medfører

$$-a + a + bi + (-d)i = -a + c + di + (-d)i$$

eller

$$(b - d)i = c - a,$$

altsaa vilde

$$i = \frac{c - a}{b - d}$$

imod Antagelsen fremstille i som et nødvendigt Tal, med mindre som sagt $a = c$ og $b = d$. Specielt kan $a + bi$ ikke være et nødvendigt Tal, med mindre $b = 0$. Antagelsen af et eneste ikke nødvendigt Tal medfører altsaa idetmindste en saadan Mangfoldighed af relativt nødvendige Tal, som maa betegnes som dobbelt, idet de nødvendige Tals Mangfoldighed sættes som enkelt. Men Mangfoldigheden kan være endnu større, nemlig hvis ikke alle 4 Regningsarter med Tal af Formen $a + bi$ skulde give Resultater af denne samme Form. Der vil altsaa være Grund til en Inddeling og til at stille Hypothesen om de mulige

Tal saaledes, at det først skal undersøges, om man kan udruste det hypothetiske Tal i med den Egenskab, at alle 4 Regningsarter i hvilkensomhelst Kombination af dette med nødvendige Tal føre til Resultater af den simplest mulige Form, $a+bi$. Naar Bevis er ført for Muligheden af disse Tal, ville vi kalde dem Tal af to Dimensioner, medens de nødvendige Tal opstilles som Tal af én Dimension.

Naar Spørgsmaalet om Tal af to Dimensioner er besvaret, kan man methodisk søge at udtømme det almindelige Spørgsmaal ved efterhaanden at undersøge Muligheden af Tal af tre

$$a+bi+cj$$

og fire

$$a+bi+cj+dk,$$

o.s.v., af n Dimensioner, bestandig saaledes, at det forudsættes, at alle 4 Regningsarter paa hvert Stadium fører til Resultater af paagjældende Form.

Tal af to Dimensioner.

Overfor Tal af to Dimensioner er Hypothesen altsaa, at enhver Kombination af de 4 principale Regningsarter med Tal af Formen $a+bi$ skal give et Resultat af samme Form. Altsaa

$$-(a+bi) = e+fi, \qquad (a+bi)+(c+di) = g+hi,$$

$$\frac{1}{a+bi} = p+qi, \qquad (a+bi).(c+di) = r+si,$$

hvor e og f, p og q ere entydigt bestemte ved a og b, og ligeledes g og h, r og s ved a, b, c, og d. Men skjøndt disse Bestemmelser ere at søge som ubekjendte, kræver dog vor Opgave ingenlunde, at fuldt saa mange ubestemte Funktioner indføres. Alle Bestemmelserne skulle ske i nødvendige Tal.

Hvad for det første Modsætningen og Additionen angaar, er det tilstrækkeligt at sætte

$$yi+x = \psi(x,y)+\varphi(x,y).i.$$

Skrives Ligningen for Modsætning

$$\begin{aligned} 0 &= (e+fi)+(a+bi) \\ &= e+\psi(a,f)+(\varphi(a,f)+b).i, \end{aligned}$$

haves

$$\begin{aligned} 0 &= b+\varphi(a,f), \\ 0 &= e+\psi(a,f) \end{aligned}$$

til Bestemmelse af e og f, saa snart det vides, hvilke Operationer der betegnes med φ og ψ. Og Additionen giver under samme Forudsætning, idet

$$\begin{aligned} g+hi &= (a+bi)+(c+di) \\ &= a+\psi(c,b)+(\varphi(c,b)+d)i, \end{aligned}$$

g og h ved

$$\begin{aligned} g &= a+\psi(c,b) \\ h &= \varphi(c,b)+d. \end{aligned}$$

Men enhver af de principale Sætninger om disse to Regningsarter giver Bidrag til at finde de Betingelser, som ψ og φ maa opfylde. Entydigheds- og Omvendingsprinciperne kræve ikke blot, at selve ψ og φ skulle være entydige Operationer, der med nødvendige Tal give Funktionsværdierne i nødvendige Tal, men ogsaa, at de indirekte Bestemmelser af

$$x \text{ ved } y \text{ og } \psi(x,y) \quad \text{samt} \quad y \text{ ved } x \text{ og } \varphi(x,y)$$

skulle være entydige i nødvendige Tal. Desuden maa specielt

$$\psi(0,y) = 0, \quad \psi(x,0) = x, \quad \varphi(0,y) = y \quad \text{og} \quad \varphi(x,0) = 0.$$

Fordringen om, at ethvert Tal skal være sit modsatte Tals modsatte Tal giver os Funktionalligningerne,

$$0 = f + \varphi(-\psi(a,f), -\varphi(a,f))$$
$$0 = a + \psi(-\psi(a,f), -\varphi(a,f)).$$

Og Additionens associative Princip,

$$((a+bi)+(c+di))+(e+fi) = (a+bi)+((c+di)+(e+fi))$$

giver Funktionalligningerne

$$\psi(c,b)+\psi(e,\varphi(c,b)+d) = \psi(c+\psi(e,d),b)$$

og

$$\varphi(e,\varphi(c,b)+d) = \varphi(c+\psi(e,d),b)+\varphi(e,d).$$

I Stedet for dette fuldstændige og almindelige Udtryk for det associative Princip kan man dog sætte simplere, som hentes fra Summer af Formerne

$$y\,.\,i+x+z \quad \text{og} \quad u\,.\,i+y\,.\,i+x$$

under deres Behandling efter det associative Princip. Her kan den Omstændighed nemlig føres til Nytte, at det kommutative Princip vides at gjælde for alle nødvendige Tal. Saaledes faas de fire dobbelte Funktionalligninger,

$$\psi(x,y)+\psi(z,\varphi(x,y)) = \psi(x+z,y) = \psi(z,y)+\psi(x,\varphi(z,y)),$$
$$\varphi(z,\varphi(x,y)) = \varphi(x+z,y) = \varphi(x,\varphi(z,y)),$$
$$\psi(\psi(x,y),u) = \psi(x,y+u) = \psi(\psi(x,u),y),$$

og

$$\varphi(x,y)+\varphi(\psi(x,y),u) = \varphi(x,y+u) = \varphi(x,u)+\varphi(\psi(x,u),y).$$

Disse Funktionalligninger tilfredsstilles ved

$$\psi(a,b) = a, \quad \varphi(a,b) = b,$$

og da herefter $bi+a = a+bi$, er Additionens kommutative Princip indiceret som Grundbestemmelse for et af de mulige Systemer af todimensionale Tal. Yderligere er det let nok at se, at denne Antagelse opfylder alle de Betingelser, som Modsætningen og Additionen medføre.

Derimod er det meget vanskeligt at løse Funktionalligningerne eller nogle af dem paa en saadan Maade, at ogsaa alle andre Muligheder træde for Dagen. Dog er det lykkedes mig — se Bilag I — at bevise, at der blandt Funktioner, som kunne differentieres, ikke gives andre end følgende Former for ψ og φ:

$$n^{\psi(x,y)} = \frac{n^x}{n^x + m^y - n^x m^y} \quad \text{og} \quad m^{\varphi(x,y)} = \frac{m^y}{n^x + m^y - n^x m^y},$$

hvor m og n ere arbitrære Konstanter. Naar $n = 1$ eller $m = 1$, blive disse Former dog ubrugelige og erstattes med henholdsvis

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,y) &= x m^y \\ \varphi(x,y) &= y \end{aligned}\right\} \text{ og } \left\{\begin{aligned} \psi(x,y) &= x \\ \varphi(x,y) &= y n^x; \end{aligned}\right.$$

og, naar begge Undtagelsestilfælde samtidig indtræde, med ovennævnte vigtige Form, $\psi(x,y) = x$, $\varphi(x,y) = y$.

Kun denne Form skulle vi nærmere betragte, thi, som det vil ses af nævnte Bilag, kan der, naar samtlige Betingelser skulle kræves opfyldte, ikke gives todimensionale Tal svarende til de almindeligere Former.

Af Additionens kommutative Princip, som altsaa gjælder for de nævnte, endnu hypothetiske Tal af to Dimensioner, følger en vigtig Sætning, hvorpaa Undersøgelsen af Multiplikationsbetingelserne maa støttes, nemlig: Naar Multiplikator er et nødvendigt Tal, gjælder det distributive Princip ogsaa for Multiplikandus som en Sum, hvis Addender høre til en Talart, hvis Addition almindelig er kommutativ. Det vil være tilstrækkeligt her at antyde, hvorledes Beviset føres, naar Multiplikator er rational, altsaa for Sætningen

$$\frac{m}{n}(a + bi + \ldots + dk) = \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}bi + \ldots \frac{m}{n}d.k,$$

hvor m er hel og n et Antal. Multiplikation med n giver

$$\begin{aligned} \left(n\frac{m}{n}\right)(a + bi + \ldots + dk) = {} & \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}bi + \ldots + \frac{m}{n}dk + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}bi + \ldots + \frac{m}{n}dk \quad (n \text{ Addender}) \end{aligned}$$

altsaa

$$m(a + bi + \ldots + dk) = ma + mbi + \ldots + mdk.$$

Ved Modsætning faas heraf

$$(-m)(a + bi + \ldots + dk) = (-m)a + (-mb)i + \ldots + (-md)k.$$

Hvad enten m er positiv eller negativ, kan man altsaa opløse Multiplikatoren i en af disse Ligningers venstre Side i en Sum af Enere og derved godtgjøre, at Ligningen er identisk.

Ligesom vi kunde fremstille todimensionale Tals Modsætning og Addition ved to ubekjendte Operationer φ og ψ, kunne vi for de samme Tal nøjes med to andre ubekjendte Operationer i nødvendige Tal for at udvikle baade Reciprociteten og Multiplikationen. Vi sætte $i(a + bi) = H(a,b) + G(a,b).i.$

For Multiplikationen have vi da

$$\begin{aligned}(a+bi)\,.\,(c+di) &= a(c+di)+b\,.\,i(c+di)\\ &= a(c+di)+b(H(c,d)+G(c,d)\,.\,i)\\ &= ac+bH(c,d)+\{ad+bG(c,d)\}\,.\,i.\end{aligned}$$

Skulle nu specielt $a+bi$ og $c+di$ være reciproke, maa

$$1 = ac+bH(c,d) \quad \text{og} \quad 0 = ad+bG(c,d),$$

hvorved a og b let findes udtrykte ved c og d.

Til Bestemmelsen af Operationerne H og G kunne nu vel alle de almengyldige Sætninger om Reciprocitet og Multiplikation give Bidrag, men medens de fleste af disse kun begrændse Mulighederne i ringe Grad, vil Multiplikationens associative Princip alene være i Stand til at bestemme det Søgte saaledes, at vi kun ville behøve de øvrige Principer til Kritiken af Resultatet.

Af $$(a+bi)\,.\,((c+di)\,.\,(e+fi)) = ((a+bi)\,.\,(c+di))\,.\,(e+fi)$$

følge de to Funktionalligninger,

$$H\{ce+dH(e,f),\ cf+dG(e,f)\} = H(c,d)\,.\,e+G(c,d)\,.\,H(e,f),$$
$$G\{ce+dH(e,f),\ cf+dG(e,f)\} = H(c,d)\,.\,f+G(c,d\,.\,G(e,f).$$

Dersom Hensigten er at finde alle mulige Løsninger af disse Funktionalligninger, er det vist umuligt at opnaa saadant. Men tillader man sig at kræve, at G og H skulle være Funktioner, som kunne differentieres, saa skal jeg i Bilag II meddele væsentlige Bidrag til Løsningen, ikke blot for todimensionale Tal men ogsaa af den analoge for n-dimensionale Tal. Navnlig vil man i dette Bilag finde bevist, at det er en nødvendig Betingelse for nærværende Opgaves Mulighed, at der existerer hele, homogene Funktioner af anden Grad med to Variable, som paa uendelig mange Maader ved lineær Transformation vende tilbage til samme Form, — og nu er det bekjendt nok, at dette gjælder om alle disse binære anden Grads Funktioner; endvidere at Koefficienterne i den omtalte lineære Transformation ved deres indbyrdes Relationer ville vise os Loven for de søgte Funktioner, saaledes at her

$$x = av+H(a,b)\,u \quad \text{og} \quad y = bv+G(a,b)\,u$$

skulle transformere Funktionen,

$$x^2-2mxy-ny^2,$$

til

$$r(v^2-2mvu-nu^2).$$

Af Betingelserne herfor:

$$a^2-2mab-nb^2 = r$$
$$aH-m(aG+bH)-nbG = -rm$$
$$H^2-2mHG-nG^2 = -rn,$$

hvor $H=H(a,b)$, $G=G(a,b)$, udledes, idet $\varepsilon^2=1$,

$$aG-bH = r\varepsilon,$$

og af denne i Forening med den anden af de oprindelige Betingelser findes

$$H(a, b) = -ma + \varepsilon . (ma + nb)$$
$$G(a, b) = \varepsilon . (a - mb) - mb ,$$

altsaa Formler med to arbitrære Konstanter, der efter Fortegnet ε give os to Muligheder, som det har særlig Interesse at prøve overfor vore Funktionalligninger eller selve Reciprocitetens og Multiplikationens almengyldige Sætninger:

A) Naar $\varepsilon = +1$, er

$$H(x, y) = ny \quad \text{og} \quad G(x, y) = x - 2my.$$

Hertil svarer Multiplikationsloven: Naar

$$x + yi = (x_2 + y_2 i) . (x_1 + y_1 i) ,$$

skal

$$x = x_2 x_1 + n y_2 y_1$$
$$y = x_2 y_1 + y_2 x_1 - 2m y_2 y_1 .$$

Det ses strax, at denne Multiplikationslov er kommutativ. Disse Formler og deres Undersøgelse bliver noget simplere, naar vi gjennemgaaende skrive $x - my = z$, hvortil svarer, at man ved det specielle Valg $k = m + i$ af det første hypothetiske Tal, overfører den almindelige Form af de todimensionale Tal

$$x + yi = z + y(m + i) \quad \text{til} \quad = z + yk.$$

Saaledes er for

$$z + yk = (z_2 + y_2 k) . (z_1 + y_1 k)$$
$$z = z_2 z_1 + p y_2 y_1$$
$$y = z_2 y_1 + y_2 z_1 ,$$

idet $p = m^2 + n$. Hermed viser det sig nu, at alle Betingelserne kunne opfyldes:

Skulle $z_2 + y_2 k$ og $z_1 + y_1 k$ være reciproke, maa

$$z_2 = \frac{z_1}{z_1^2 - p y_1^2} , \quad y_2 = \frac{-y_1}{z_1^2 - p y_1^2}$$

og

$$z_1 = \frac{z_2}{z_2^2 - p y_2^2} , \quad y_1 = \frac{-y_2}{z_2^2 - p y_2^2} ,$$

Reciprociteten er altsaa en symmetrisk Operation, og den vil være entydig, hvor det behøves, naar blot ikke $z^2 - py^2 = 0$ for andre nødvendige Talværdier af z og y end $z = 0$ samtidig med $y = 0$.

Multiplikationen er entydig, og da den sker paa samme Maade, som om k havde været et nødvendigt Tal, blot at

$$k^2 = p ,$$

saa er det klart, at det associative Princip saavelsom det distributive Princip for begge Faktorer gjælder; og oven i Kjøbet, som sagt, det kommutative Princip. Den eneste Betingelse for at saadanne Tal af to Dimensioner skulle være mulige, er at, uagtet $k^2 = p$ skal være et nødvendigt Tal, tør k selv ikke have denne Egenskab; denne Betingelse falder nemlig sammen med den, som Reciprocitetens Entydighed gav, at der ikke skal existere nødvendige Tal z og y forskjellige fra 0, saaledes at deres Forholds Kvadrat

var $= p$. Som bekjendt kan denne Fordring jo meget vel realiseres; og vi skulle snart omtale, hvorledes det gjælder om alle Arter af nødvendige Tal, at de kunne suppleres til Systemer af to Dimensioner; men først ville vi betragte vort andet Tilfælde:

B) hvor $\varepsilon = -1$, altsaa

$$H(x,y) = -2mx - ny \quad \text{og} \quad G(x,y) = -x.$$

Multiplikationsloven vil altsaa være følgende:

Naar $$x' + y'i = (x_2 + y_2 i)(x_1 + y_1 i),$$

maa $$x' = x_2 x_1 - n y_2 y_1 - 2m y_2 x_1$$

og $$y' = x_2 y_1 - y_2 x_1.$$

Indføres her samme Betegnelse som i A), $z = x - my$, $m^2 + n = p$ og $m + i = k$, haves simplere

$$z' = z_2 z_1 - p y_2 y_1$$

$$y' = z_2 y_1 - y_2 z_1.$$

Skal her $z_2 + y_2 k$ være reciprok med $z_1 + y_1 k$, maa

$$z_2 = \frac{z_1}{z_1^2 - p y_1^2} \quad \text{og} \quad y_2 = \frac{y_1}{z_1^2 - p y_1^2},$$

$$z_1 = \frac{z_2}{z_2^2 - p y_2^2} \quad \text{og} \quad y_1 = \frac{z_2}{z_2^2 - y p_1^2},$$

som ikke frembyde nogen Modsigelse mod de almindelige Principer, men kun den samme Betingelse som under A). Men Multiplikationen, der vilde være entydig, vilde ikke ubetinget fyldestgjøre det associative Princip, og derfor maa dette Alternativ forkastes som en selvstændig Løsning. Helt uden Betydning er det dog ikke. Betegne vi den Regningsart, Multiplikation tør den ikke kaldes, som vilde svare til $-1 = \varepsilon$ med Tegnet $\circ$, saa kunne vi karakterisere den ud fra den virkelige Multiplikation ved

$$(z_2 + y_2 k) \circ (z_1 + y_1 k) = (z_2 - y_2 k) \cdot (z_1 + y_1 k).$$

Medens det da er klart, at for tre Faktorer

$$((z_3 + y_3 k) \circ (z_2 + y_2 k)) \circ (z_1 + y_1 k) = (z_3 + y_3 k)(z_2 - y_2 k)(z_1 + y_1 k)$$

i Strid med det associative Princip er forskjellig fra

$$(x_3 + y_3 k) \circ ((z_2 + y_2 k) \circ (z_1 + y_1 k)) = (z_3 - y_3 k)(z_2 - y_2 k)(z_1 + y_1 k),$$

vil dog $$((z_3 + y_3 k) \circ (z_2 + y_2 k)) \circ (z_1 + y_1 k) = (z_3 + y_3 k)((z_2 + y_2 k) \circ (z_1 + y_1 k)),$$

saa at dog paa en Maade det associative Princip kunde opretholdes, dersom man turde have begge Slags Multiplikationer i sideordnet Anvendelse. Dette forbydes nu rigtignok ved Fordringen om Multiplikationens Entydighed; men den Forandring af k til $-k$, som herefter skulde kunne forekomme i Multiplikator, er overhovedet en aldeles nødvendig Operation for Tallene med to Dimensioner. Thi et saadant Tal vil man ikke kunne siges at kjende, med mindre man er i Stand til at bestemme begge dets Addender, z og yk i Formen $z + yk = q$ alene ved q og k, og denne Opgave lader sig ikke løse ved de 4

principale Regningsarter; men kræver med Nødvendighed en 5te. Som denne opstille vi under Navn af Omlægning den i B) forekommende Ombytning af k med $-k$. Naar

$$q = z + yk,$$

sætte vi almindelig

$$\dot{q} = z - yk.$$

Omlægningen har Analogi baade med Modsætningen og med Reciprociteten. Dens Hovedegenskab er, at enhver ved de 4 principale Regningsarters Kombination dannet Funktion omlægges ved Omlægning af alle indgaaende Tal, i uforandret Sammenstilling, Konstanter saavel som Variable,

$$\dot{f}(q_1, \ldots q_n) = f(\dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n).$$

Specielt mærkes, at $q + \dot{q}$ saavelsom $q \cdot \dot{q}$ repræsentere nødvendige Tal, medens $q - \dot{q}$ er Produktet af et nødvendigt Tal og k.

Vi kunne nu nærmere se, hvad Betingelsen er, for at Tallene af to Dimensioner ikke blot skulle have abstrakt Betydning som mulige, men virkelig Betydning i det Konkrete: k og $-k$ fyldestgjøre begge Ligningen $k^2 = p$, og ere ikke heller paa anden formel Maade entydig bestemte ved 0 og 1. Imidlertid skal der kunne gjøres Forskjel paa dem, og denne Forskjel maa da bero paa en konkret Egenskab ved Forestillingerne. Paa Planens Geometri blive de todimensionale Tal anvendelige, fordi man der kan gjøre Forskjel paa Bestemmelserne i «til højre» og «til venstre»; men paa f. Ex. Tidsforestillinger ere todimensionale Tal uanvendelige, fordi ingen saadan Forskjel existerer i Tiden.

Todimensionale Tal ere mulige svarende til alle de i det foregaaende omtalte Arter af nødvendige Tal, men under væsentlig forskjellige Vilkaar:

I de begrændsede Talsystemer, hvor et Primtal $p = 0$, vil — afset fra $p = 2$ — foruden 0 Halvdelen af de øvrige nødvendige Tal være Kvadrattal. Et hvilketsomhelst ikke-kvadratisk Tal kan sættes $= k^2$ (et saadant er -1, naar $p = 4n + 3$). Kvadratroden af hvilketsomhelst, ikke-kvadratisk, nødvendigt Tal vil da have Formen mk. Systemet af de todimensionale Tal $n + mk$ vil være afsluttet i sig overfor de 4 principale Regningsarter, men ikke overfor Ligninger af anden eller højere Grad.

For det ubegrændsede System af de diskontinuerte, rationale Tal er der Forskjel paa kvadratiske og ikke-kvadratiske Tal; ethvert af sidstnævnte, men simplest ethvert positivt eller negativt helt Tal, uden kvadratiske Primfaktorer, kan sættes $= k^2$, men hvert af dem frembringer sit særlige System af todimensionale Tal, $\sqrt{3}$ kan f. Ex. ikke bringes paa Formen $a + b\sqrt{2}$. Hvert af disse Systemer er i sig afsluttet overfor de 4 principale Regningsarter, men ikke overfor Ligninger af 2den eller højere Grad, og Kombination af Tal af flere forskjellige Systemer fører til Tal med flere end to Dimensioner.

I de kontinuerte Tals System ere derimod samtlige positive Tal kvadratiske, men intet negativt; ethvert negativt Tal, simplest -1, kan sættes $= k^2$. Dette eneste, de

sædvanlige binært komplexe Tals System er afsluttet i sig overfor enhver, idetmindste enhver algebraisk Ligning, der dannes med de 4 principale Regningsarter, men er ligesaalidt som i de to foregaaende Talarter afsluttet i sig overfor saadanne Ligninger, hvori foruden x ogsaa det omlagte Tal $\dot{x}$ indgaar.

Tal af flere end to Dimensioner.

Skjøndt jeg aldeles ikke har til Hensigt her at ville blot tilnærmelsesvis udtømme Emnet eller berige Videnskaben med hidtil ukjendte Talarter — man vil se, at Resultatet snarere bliver det modsatte — maa jeg dog anlægge de systematiske Grundtræk saa bredt som muligt, dels for at opfordre til Undersøgelser i de Retninger, hvor nye Opdagelser kunne ventes, dels for at vise den Svaghed, der klæber ogsaa ved den Form for Hypothesen om mulige Tal, som vi her have valgt: den forudsatte Egenskab ved disse Tal, at de skulle kunne karakteriseres tilstrækkelig og inddeles efter Antal af Dimensioner.

Medens saadan Hypothese for todimensionale Tal viser sig at være tilstrækkelig til at afgive bestemte Former for de 4 Regningsarter, vil man strax mærke et Savn, naar man prøver en analog Behandling af Tilfældet med 3 Dimensioner; det synes her ikke at være ligegyldigt, hvorledes vi vælge Hovedformen, blandt dem, der frembyde sig ved principale Regningsoperationer med nødvendige Tal og to hypothetiske Tal i og j. Vælge vi Formen

$$t = a + bi + cj$$

til Hovedform, og kræve, at j ikke kan bringes paa Formen $a + bi$, i ikke skrives $a + cj$ og at intet nødvendigt Tal kan være $bi + cj$, saa er t vel entydig givet ved de tre nødvendige Tal a, b og c, men ikke nødvendigvis omvendt disse ved t. Tænke vi os nemlig, at

$$a + bi + cj = a' + b'i + c'j$$

uden at $a = a'$, $b = b'$ og tillige $c = c'$, saa ville vi vel kunne slutte, at

$$bi + (c - c')j = (a' - a) + b'i$$

og

$$j = \frac{1}{c - c'}(-bi + (a' - a) + b'i),$$

men heri ligger nu ikke, som ved to Dimensioner, nogen Umulighed, som kunde tvinge os til at forkaste saadan Antagelse. Enten skulle vi da vrage denne Hovedform med overmaade ringe Udsigt til at finde en, der var bedre; eller ogsaa maa vi skaffe os den uundværlige Adgang til at reducere Afhængighederne mellem de tredimensionale Tal til Afhængigheder mellem nødvendige Tal derved, at vi knytte Begrebet Dimensioner særlig til denne Hovedform, idet vi forlange den forstaaet saaledes, at a, b og c skulle være entydig bestemte ved $t = a + bi + cj$. Jeg antager, at denne sidste Udvej maa vælges, uagtet man derved opgiver Haabet om at kunne udtømme Begrebets mulige Tal ved sukcessiv Behandling

af Tal med tre, fire ... n Dimensioner og sluttelig saadanne, som ikke ved Regningsarterne holde sig indenfor noget endeligt Antal af Dimensioner.

Den saaledes modificerede Hypothese aabner Mulighed for at finde Talarter, hvis Addition ikke er kommutativ. Men her ville vi ogsaa nøjes med at antyde denne Mulighed, og begrændse os til at søge saadanne mulige Tal, for hvilke Addendernes Orden er ligegyldig. Det er let nok at se, at denne Begrændsning baade for tre og flere Dimensioner gjør den foregaaende Indskrænkning overflødig; gjælder Additionens kommutative Princip for Tal af n Dimensioner, da er Hovedformen ubetinget $a + bi + \ldots + dk$, med entydig Bestemmelse af Koefficienterne a, b, ... d ved det n-dimensionale Tal.

Enhver Addition fører tilbage til denne Form,

$$(x_2 + y_2 i + \ldots + u_2 k) + (x_1 + y_1 i + \ldots + u_1 k) =$$
$$= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) i + \ldots + (u_2 + u_1) k.$$

Summen er da entydig, omvendelig og associativ, fordi disse Egenskaber tilkomme de nødvendige Talkoefficienter $x_2 + x_1$, $y_2 + y_1$, ... $u_2 + u_1$ i hvert af dens Led. I alt, hvad Additionen og Modsætningen angaar, ere altsaa i, ... k, ($n - 1$ i Antal) mulige Tal i et System af n Dimensioner.

Spørgsmaalet bliver altsaa kun, om slige Tal og deres relativt nødvendige Tal ogsaa overfor Reciprocitetens og Multiplikationens principale Sætninger forholde sig som n-dimensionale Tal.

I fuldstændig Almindelighed kræver Hypothesen kun, at

$$i(x + yi + \ldots + uk) = x' + y' i + \ldots + u' k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k(x + yi + \ldots + uk) = x^{(n-1)} + y^{(n-1)} i + \ldots + u^{(n-1)} k,$$

hvor $x', y', \ldots u' \ldots$ og $x^{(n-1)}, y^{(n-1)} \ldots u^{(n-1)}$ skulle være nødvendige Tal og Funktioner af de nødvendige Tal $x, y \ldots u$. Af Bilag II vil det ses, at denne Fordring i Forbindelse med Multiplikationens associative Princip afgiver virkelig bestemmende Funktionalligninger. Men da det kun for Tilfældet $n = 3$ er lykkedes mig at gjennemføre Løsningen til explicit Form, og da min Undersøgelse ikke har ført mig til andre Talformer end saadanne, som kunne betragtes som forud bekjendte, og da endelig disse alle kunne karakteriseres derved, at det distributive Princip gjælder baade for Multiplikator og Multiplikandus, saa kan jeg gjøre min Fremstilling simplere ved at drage dette Princips Gyldighed ind under Hypothesen.

Men er Multiplikanden distributiv, saa vise de sidst anførte Ligninger let nok ved Funktionalligningen $F(x_1, y_1, \ldots u_1) + F(x_2, y_2, \ldots u_2) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, \ldots u_1 + u_2)$, at $x', y', \ldots u' \ldots$ og $x^{(n-1)}, y^{(n-1)} \ldots u^{(n-1)}$ alle maa være lineære homogene Funktioner af $x, y \ldots u$, saafremt disse ere nødvendige Tal — en Forudsætning, som vi med Flid gjentage. Koefficienterne i disse Funktioner skulle være nødvendige Tal.

For at komme til de explicite Udtryk for Multiplikationen og Reciprociteten og faa dem prøvede, gjælder det da kun om at bestemme disse Koefficienter; men dette viser sig at være et stort Arbejde. Koefficienternes Antal er $n^2(n-1)$, saamange Ubestemte skulle findes ved Ligninger, som repræsentere de almengyldige Principer. Alene Multiplikationens associative Princip medfører $n^3(n-1)$ Ligninger. Rigtignok kan man allerede ved selve det distributive Princip bevise, at $ai = ia$, ... $ak = ka$, og derved reducere begge disse Antal noget: Koefficienterne til dem, som forekomme i Udtrykkene for

$$ii, \ldots, ik$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$ki, \ldots, kk$$

som n-dimensionale Tal, disses Antal er $n(n-1)^2$; og Ligningernes Antal bliver ved en Række Identiteter bragt ned til $n(n-1)^3$, disse ere alle af 2den Grad. Efter Koefficienternes Bestemmelse bliver der altsaa $n(n-1)^2(n-2)$ Betingelser, om hvilke det skal bevises, at de alle ere identisk fyldestgjorte. Man maa altsaa søge ad andre Veje at komme ud over en saa betydelig Vanskelighed. Et Middel hertil er allerede anvendt af Weierstrass ved en analog Undersøgelse, og bestaar i at erstatte de overflødig vilkaarlig ansatte Grundtal $i, \ldots k$ med Potenser af et enkelt, f. Ex. j.

Skal nemlig j tilhøre det n-dimensionale System, maa ogsaa

baade
$$j = c_{1,1} + c_{1,2} i + \ldots + c_{1,n} k,$$
$$j^2 = c_{2,1} + c_{2,2} i + \ldots + c_{2,n} k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
og
$$j^n = c_{n,1} + c_{n,2} i + \ldots + c_{n,n} k$$

og altsaa kunne udtrykkes lineært ved $i, \ldots k$ saaledes, at Koefficienterne ere nødvendige Tal. Ved at multiplicere disse Ligninger og Identiteten $1 = 1$ med passende Faktorer, der ere nødvendige Tal og ikke alle $= 0$ vil man altsaa finde en Ligning,

$$c_0 j^n + c_1 j^{n-1} + \ldots + c_{n-1} j + c_n = 0,$$

og denne er enten af $n$te eller af lavere Grad. Saafremt den saaledes fundne Ligning tænktes at være reduktibel, vil dens venstre Side lade sig opløse i Faktorer af lavere Grad, hvis Koefficienter alle ere nødvendige Tal. I saa Fald maa j gjøre en af disse Faktorer $= 0$, og kun til den deraf fremgaaende Ligning

$$d_0 j^r + d_1 j^{r-1} + \ldots d_{r-1} j + d_r = 0, \qquad (r \leqq n)$$

behøve vi at tage Hensyn.

Hvis nu $n = r$, kunne de oprindelige Grundtal $i, \ldots k$ og dermed et hvilketsomhelst af de hypothetiske Tal af n-Dimensioner bestemmes ved Ligningerne for $j, j^2, \ldots j^{(n-1)}$ og bringes paa Formen

$$a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + \ldots + a^{(n-1)} j^{(n-1)},$$

hvor a'erne ere nødvendige Tal. Dette Tilfælde skulle vi behandle som Opgavens Hovedløsning.

Er derimod $r < n$, vil Systemet af de hypothetiske Tal af n Dimensioner omfatte et System af r Dimensioner af Formen

$$b_0 + b_1 j + \ldots + b_{r-1} j^{(r-1)},$$

og dette, der kan behandles for sig ligesom det foregaaende n-dimensionale, vil vise sig at være afsluttet i sig, og besidde alle de principale Egenskaber inklusive de kommutative Principer ganske som de nødvendige Tal. Men heraf følger da vigtige Simplifikationer i Behandlingen af det almindeligere, dette omfattende System, navnlig vil man kunne fremstille det almindelige mulige Tal som et saadant, der vil have færre Dimensioner under Forudsætning af, at dets Grundtals Koefficienter ikke ere nødvendige Tal, men r-dimensionale af j afledede Tal. Behandlingen af disse Muligheder bør da aabenbart opsættes, til det ovenfor nævnte Hovedtilfælde $n = r$ er undersøgt. Ja! for ikke at skade Overskueligheden i det Følgende, maa vi nøjes med at fremsætte Antydninger og ubeviste Paastande om det hertilhørende.

Foreløbig er det altsaa vor Forudsætning, at det distributive Princip gjælder for begge Faktorer, og at de n-dimensionale Tal have Formen

$$x + yj + \ldots + zj^{(n-2)} + uj^{(n-1)},$$

hvor j er bestemt som Rod i den irreduktible Ligning

$$j^n + c_1 j^{n-1} + \ldots + c_{n-1} j + c_n = 0.$$

Det er da aabenbart, at Produktet

$$(x_2 + y_2 j + \ldots + z_2 j^{n-2} + u_2 j^{n-1}) \cdot (x_1 + y_1 j + \ldots + z_1 j^{n-2} + u_1 j^{n-1}) =$$
$$= x_2 x_1 + \ldots + (x_2 u_1 + y_2 z_1 + \ldots + z_2 y_1 + u_2 x_1) j^{n-1} + \ldots + u_2 u_1 j^{2(n-1)},$$

saavel i denne Form som efter ved Benyttelse af Udtrykket for j^n at være reduceret til $(n-1)$te Grad vil være entydigt og derhos symmetrisk med Hensyn til Indices, saa at Multiplikationen vil være kommutativ. Og da Multiplikationen foregaar efter Reglerne for Polynomiers Multiplikation ganske, som om j var et nødvendigt Tal, maa ogsaa Produktet af tre eller flere Faktorer give en bestemt Funktion af ligesaamange Gange $(n-1)$te Grad med Hensyn til j, og entydig reduceres til én normal Form af $(n-1)$te Grad uden Hensyn til Parenthesernes Stilling: Følgelig gjælder Multiplikationens associative Princip.

Spørgsmaalet, om j og de deraf følgende Tal kunne erkjendes for mulige Tal, afhænger da blot af Forholdet til Omvendingsprincipet: Er Reciprociteten her entydig? Betingelsen herfor udvikle vi mindst lige saa let ud fra de almindeligste Ligninger Side 41.

$$i(x + yi + \ldots + uk) = x' + y'i + \ldots u'k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k(x + yi + \ldots + uk) = x^{(n-1)} + y^{(n-1)} i + \ldots + u^{(n-1)} k,$$

som ved de Forudsætninger, vi i det foregaaende have benyttet, om det distributive Princips fuldstændige Gyldighed og Grundtallene som en Potensrække. Skal Produktet af to Faktorer $x_1 + y_1 i + \ldots + u_1 k$ og $x_2 + y_2 i + \ldots + u_2 k$ være $= 1$, maa (smlgn. Bilag II) Systemet af de n Ligninger haves:

$$\begin{aligned} 1 &= x_2 x_1 + y_2 x_1' + \ldots + u_2 x_1^{(n-1)} \\ 0 &= x_2 y_1 + y_2 y_1' + \ldots + u_2 y_1^{(n-1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= x_2 u_1 + y_2 u_1' + \ldots + u_2 u_1^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Da Symmetrien mellem Indices her ikke er tvivlsom, er det tilstrækkeligt at bestemme $x_2, y_2, \ldots u_2$ som lineære Ligningers Ubekjendte, og Entydigheden vil være sikret, naar blot Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_1', & \ldots & x_1^{(n-1)} \\ y_1, & y_1', & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1, & u_1', & \ldots & u_1^{(n-1)} \end{vmatrix} = D$$

ikke kan blive $= 0$ for noget andet System af nødvendige Talværdier end

$$x_1 = y_1 = \ldots = u_1 = 0.$$

I vort specielle Tilfælde, hvor Grundtallene $i, \ldots k$ ere de $n-1$ første Potenser af et eneste hypothetisk Tal j, og hvor

$$j(x + yj + \ldots + zj^{(n-2)} + uj^{(n-1)}) = xj + yj^2 + \ldots + zj^{(n-1)} - u(c_n + c_{n-1}j + \ldots + c_1 j^{(n-1)}),$$

er altsaa

$$\begin{aligned} x' &= -uc_n, & y' &= x - uc_{n-1}, & \ldots \quad u' &= z - uc_1, \\ x'' &= -u'c_n, & y'' &= x' - u'c_{n-1}, & \ldots \quad u'' &= z' - u'c_1 \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ x^{(n-1)} &= -u^{(n-2)}c_n, & y^{(n-1)} &= x^{(n-2)} - u^{(n-2)}c_{n-1}, & \ldots \quad u^{(n-1)} &= z^{(n-2)} - u^{(n-2)}c_1. \end{aligned}$$

Hvad vi skulle bevise er, at Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} x, & -uc_n, & -u'c_n, & \ldots & -u^{(n-2)}c_n \\ y, & x - uc_{n-1}, & x' - u'c_{n-1}, & \ldots & x^{(n-2)} - u^{(n-2)}c_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u, & z - uc_1, & z' - u'c_1, & \ldots & z^{(n-2)} - u^{(n-2)}c_1 \end{vmatrix}$$

ikke kan blive $= 0$. Man ser nu let, at denne Determinant ved Elimination af de markerede Tal $x^{(r)}, y^{(r)}, \ldots, z^{(r)}, u^{(r)}$ kan skrives paa en iøjnefaldende simpel Form, som det kan være tilstrækkeligt at nedskrive for Tilfældet $n = 4$,

$$D = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & c_3 & c_4 & 0 \\ z & y & x & 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ u & z & y & x & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & u & z & y & 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & u & z & 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

for deri at gjenkjende Resultanten af de to Ligninger

$$j_n + c_1 j^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1} j + c_n = 0$$

og

$$u j^{(n-1)} + \ldots + y j + x = 0,$$

hvis Koefficienter forudsættes at være nødvendige Tal. Men $D = 0$ er da umuligt, naar den første af disse to Ligninger skulde være irreduktibel. Følgelig er Reciprociteten i dette Tilfælde entydig; ogsaa Omvendingsprincipet gjælder for Multiplikation af slige n-dimensionale Tal, hvis Existens som mulige Tal altsaa er bevist, idet der existerer irreduktible Ligninger af enhver Grad, og Grundtallet j, da det skal være Rod i en saadan Ligning, opfylder Betingelserne, at det ikke kan være et nødvendigt Tal, og at dets første $n-1$ Potenser ikke kunne udtrykkes som Summer af endnu lavere Potenser, multiplicerede med nødvendige Tal.

Sammenhængen mellem et System af n-dimensionale Tal og $n$te-Grads Ligningen for j, givet ved Koefficienterne $c_1 \ldots c_n$, er for Resten kun temmelig overfladisk. Ligningens n Rødder høre paa den ene Side almindeligvis ikke alle til samme n-dimensionale System; og paa den anden Side har hvert ikke nødvendigt Tal i Systemet sin tilsvarende Ligning af $n$te Grad, dog saaledes, at denne i flere eller færre specielle Tilfælde kan være reduktibel eller — om man vil foretrække dette Udtryk — af lavere end $n$te Grad saaledes, at det n-dimensionale System omfatter et fuldstændigt, mindre kompliceret System. Ogsaa kan det ikke blot tænkes, men ad anden Vej paavises, at der kan gives n-dimensionale Systemer, i hvilke ethvert Tal tilfredsstiller en algebraisk Ligning af lavere end $n$te Grad med nødvendige Tal til Koefficienter, et Forhold, som man vanskelig kan studere ud fra en Betragtning af selve denne Lignings Egenskaber.

Da alle de mulige Tal, som vi hidtil have omtalt, besidde ganske de samme principale Egenskaber som de nødvendige Tal, kunne vi udvide vor Betragtning ved overalt i Stedet for de nødvendige Tal at sætte et eller andet bestemt System f. Ex. af m-dimensionale Tal. Ogsaa et saadant maa kunne mangfoldiggjøres paa aldeles analog Maade. Høre nu vore Tal $x, y, \ldots, z, u$ til dette m-dimensionale System og ligeledes Koefficienterne $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}, c_p$ til en Ligning

$$j^p + c_1 j^{p-1} + \ldots + c_{p-1} j + c_p = 0,$$

som antages at være irreduktibel i det m-dimensionale System, saa at j ikke tilhører dette, saa føres vi til et System af almindelig mp Dimensioner. Ved specielt at lade $c_1, \ldots, c_p$ være nødvendige Tal, kan man opnaa at lade to og ved yderligere Udvidelse hvilkesomhelst Rødder i algebraiske Ligninger optræde samtidig i et og samme flerdimensionale System, for hvilket atter alle de principale Sætninger gjælde, navnlig begge de kommutative Principer og det fuldstændige distributive Princip. Man kan tænke sig de to Rødder repræsenterede af j og x.

Kun maa vi herved bemærke, at man ikke maa mene hermed at have udtømt alle Muligheder for flerdimensionale Tal med det distributive Princip. Vilde man søge at bevise saadan Sætning, saa vilde man finde et svagt Punkt paa det Sted, hvor vi ovenfor fra det distributive Princips Antagelse sluttede, at x', y', ... o. s. v. ... $z^{(n-1)}$, $u^{(n-1)}$ skulle være lineære homogene Funktioner af x, y, .., z, u. Naar disse Koefficienter tænkes som flerdimensionale, er denne Slutning ikke tilladt. Ved Siden af de 4 principale Afhængigheder optræder der jo allerede ved to Dimensioner en ny Afhængighed, Omlægningen; og denne er distributiv. Naar $a = b + c$, er $\dot{a} = \dot{b} + \dot{c}$. Som Følge heraf kan det distributive Princip f. Ex. ogsaa fyldestgjøres derved, at x', y', ..., $z^{(n-1)}$, $u^{(n-1)}$ blive lineære homogene Funktioner af $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... $\dot{z}$ og $\dot{u}$, eller af disse ved Siden af x, y, ... z, u. Og denne Mulighed kan realiseres.

Lad i det to-dimensionale Tal $x + yj$, x og y selv være to-dimensionale Tal.

$$x = \mathfrak{g} + \mathfrak{x} i \qquad y = \mathfrak{y} + \mathfrak{z} i$$
$$\dot{x} = \mathfrak{g} - \mathfrak{x} i \qquad \dot{y} = \mathfrak{y} - \mathfrak{z} i.$$

Lad $i^2 + \mathfrak{p} = 0$ og $j^2 + \mathfrak{q} = 0$, idet $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ samt $\mathfrak{p}$ og $\mathfrak{q}$ betegne nødvendige Tal, da vil, idet $j(x + yj) = x' + y'j$, ikke blot $x' = -\mathfrak{q} y$, $y' = x$ kunne fyldestgjøre det distributive Princip; men ogsaa

$$x' = -\mathfrak{q}\dot{y} \quad \text{og} \quad y' = \dot{x}$$

vil vise sig brugbart. Den deraf følgende Multiplikationslov

$$(x_2 + y_2 j)(x_1 + y_1 j) = x_2 x_1 - \mathfrak{q} y_2 \dot{y}_1 + (x_2 y_1 + y_2 \dot{x}_1) j$$

er nemlig ikke blot entydig, men ogsaa associativ, thi man finder

$$(x_3 + y_3 j) \cdot ((x_2 + y_2 j) \cdot (x_1 + y_1 j)) = ((x_3 + y_3 j) \cdot (x_2 + y_2 j)) \cdot (x_1 + y_1 j) =$$
$$= x_3 x_2 x_1 - \mathfrak{q}(x_3 y_2 \dot{y}_1 + y_3 \dot{x}_2 \dot{y}_1 + y_3 \dot{y}_2 x_1) + (x_3 x_2 y_1 + x_3 y_2 \dot{x}_1 + y_3 \dot{x}_2 \dot{x}_1 - \mathfrak{q} y_3 \dot{y}_2 y_1) j.$$

Kun er, som man ser, Multiplikationen her ikke kommutativ. Men Reciprociteten viser sig at være entydig og symmetrisk. Betingelsen for, at $(x_2 + y_2 j)$ og $(x_1 + y_1 j)$ skulle være reciproke, er

$$1 = x_2 x_1 - \mathfrak{q} y_2 \dot{y}_1 \quad \text{og} \quad 0 = x_2 y_1 + y_2 \dot{x}_1$$

eller explicit

$$x_2 = \frac{\dot{x}_1}{x_1\dot{x}_1 + \mathfrak{q}y_1\dot{y}_1} \qquad y_2 = \frac{-y_1}{x_1\dot{x}_1 + \mathfrak{q}y_1\dot{y}_1}$$

$$x_1 = \frac{\dot{x}_2}{x_2\dot{x}_2 + \mathfrak{q}y_2\dot{y}_2} \qquad y_1 = \frac{-y_2}{x_2\dot{x}_2 + \mathfrak{q}y_2\dot{y}_2}.$$

Kun tør Nævnerne her ikke blive 0 for andre Værdier end $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$. Følgelig maa $\mathfrak{p}$ og $\mathfrak{q}$ være valgte saaledes, at

$$\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{q}\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{z}^2 = 0$$

bliver umulig for andre Værdier end de nævnte $\mathfrak{g} = \mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$, hvortil det kan være tilstrækkeligt, men ikke er nødvendigt, at $\mathfrak{p}$ og $\mathfrak{q}$ vælges positive.

Indsætter man i $x + yj$ Udtrykkene for x og y som todimensionale Tal og skriver $i.j = k$, antager det den 4-dimensionale Form

$$\mathfrak{g} + \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k,$$

for hvis Multiplikation Loven er, at naar

$$\mathfrak{g} + \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k = (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{x}_2 i + \mathfrak{y}_2 j + \mathfrak{z}_2 k)(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{x}_1 i + \mathfrak{y}_1 j + \mathfrak{z}_1 k),$$

skal

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{p}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{q}\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_1 \\
\mathfrak{x} &= \mathfrak{g}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{q}\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_1 \\
\mathfrak{y} &= \mathfrak{g}_2\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{p}\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_1 \\
\mathfrak{z} &= \mathfrak{g}_2\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{g}_1,
\end{aligned}$$

der simplest udtrykkes saaledes, at det distributive Princip skal gjælde for begge Faktorer, medens man i Stedet for det kommutative Princip skal anvende Tabellen

$$\begin{aligned}
i.i &= -\mathfrak{p}, \quad i.j = k, \quad ik = -\mathfrak{p}j \\
j.i &= -k, \quad j.j = -\mathfrak{q}, \quad jk = \mathfrak{q}i \\
k.i &= \mathfrak{p}j, \quad k.j = -\mathfrak{q}i, \quad kk = -\mathfrak{p}\mathfrak{q}.
\end{aligned}$$

Altsaa Kvaternioner i Lighed med de Hamiltonske. Af disse Kvaternioners Mathematik skal her kun omtales et Par Sætninger:

Enhver Kvaternion tilfredsstiller en Ligning af anden Grad med nødvendige Tal i Koefficienterne;

$$(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k)^2 - 2\mathfrak{g}.(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k) + \mathfrak{g}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{q}\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{z}^2 = 0.$$

Kvaternionerne have overhovedet den Egenskab, at en hvilkensomhelst Funktion af én Kvaternion og nødvendige Tal tilhører et todimensionalt System.

Naar

er

$$\begin{aligned}
q &= \mathfrak{g} + \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k \\
i.q.i &= (-\mathfrak{p})(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}i - \mathfrak{y}j - \mathfrak{z}k) \\
j.q.j &= (-\mathfrak{q})(\mathfrak{g} - \mathfrak{x}i + \mathfrak{y}j - \mathfrak{z}k) \\
k.q.k &= (-\mathfrak{p}\mathfrak{q})(\mathfrak{g} - \mathfrak{x}i - \mathfrak{y}j + \mathfrak{z}k).
\end{aligned}$$

som Følge heraf kan man alene ved de 4 Regningsarter opløse enhver Kvaternion i dens 4 Hovedled:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4}\left\{\frac{q}{1} + \frac{iqi}{ii} + \frac{jqj}{jj} + \frac{kqk}{kk}\right\}$$

$$\mathfrak{x}i = \frac{1}{4}\left\{\frac{q}{1} + \frac{iqi}{ii} - \frac{jqj}{jj} - \frac{kqk}{kk}\right\}$$

$$\mathfrak{y}j = \frac{1}{4}\left\{\frac{q}{1} - \frac{iqi}{ii} + \frac{jqj}{jj} - \frac{kqk}{kk}\right\}$$

$$\mathfrak{z}k = \frac{1}{4}\left\{\frac{q}{1} - \frac{iqi}{ii} - \frac{jqj}{jj} + \frac{kqk}{kk}\right\}.$$

En særegen Omlægningsregning er her overflødig netop paa Grund af, at Multiplikationen ikke er kommutativ. Omlægning i alle tre ikke nødvendige Dimensioner udføres ved

$$\bar{q} = \mathfrak{g} - \mathfrak{x}i - \mathfrak{y}j - \mathfrak{z}k = \frac{1}{2}\left\{\frac{q}{1} - \frac{iqi}{ii} - \frac{jqj}{jj} - \frac{kqk}{kk}\right\};$$

følgelig kan man nu ogsaa indenfor et hvilketsomhelst System af to Dimensioner erstatte Omlægningen ved «ad hoc» til Systemet $a+bi$ at knytte et fremmed Tal j med Egenskaberne $ji = -ij$, medens jj er et nødvendigt, ikke kvadratisk Tal, thi da er

$$a - bi = \frac{j(a+bi)j}{jj}.$$

Medens, som vi have nævnt, de kommutative Tal af 4 (og andre Antal) Dimensioner frit lade sig kombinere indenfor mere sammensatte Systemer, har man ikke ved Kvaternionerne Ret til at erstatte de nødvendige Tal i deres 4 Led med flerdimensionale Tal; de Bikvaternioner, som Hamilton paa denne Maade har opstillet, ere slet ikke Tal. Kvaternionerne ere endnu det eneste bekjendte Tilfælde af ikke kommutative Tal.

I denne Undersøgelse af Tallene med flere end to Dimensioner have vi brugt Udtrykket nødvendige Tal som Fælledsbetegnelse, og derved have vi undgaaet megen unyttig Gjentagelse. Men strengt taget bør Undersøgelsen gjennemføres for hver Afdeling af Tallene for sig. Ligesom vi have set ved de todimensionale Tal vil ogsaa her Forskjellen imellem Arternes nødvendige Tal medføre Forskjel i de mulige Tal, som knytte sig til hver Art. Denne Forskjel faar imidlertid kun paa et eneste Punkt af det omtalte nogen videre Betydning. Vi have forudsat, at man kan finde irreduktible Ligninger af en hvilkensomhelst Grad, men dette gjælder kun med en vis Undtagelse.

I de begrændsede Talarter, hvor et Primtal $p = 0$, gjælder Sætningen, men Antallet af mulige Grader er endeligt $= p-1$, følgelig ogsaa Antallene af de mulige irreduktible Ligninger og af de mulige Tal.

Sætningen gjælder ligeledes for det ubegrændsede System af rationale Tal som de nødvendige Tal, og her uden Begrændsning. Af enhver Grad, som nævnes kan, existerer

der en Mangfoldighed af irreduktible Ligninger, hver Rod i en saadan kan opfattes som et fler-dimensionalt Tal, og Dimensionernes Antal kan i ethvert Tilfælde opfattes som saa stort, at dette Tal kan bestaa som muligt Tal ved Siden af et hvilketsomhelst System af andre Rødder i samme eller andre irreduktible Ligninger.

Naar derimod Kontinuitetsaxiomet skal gjælde, saa at de nødvendige Tal blive at forstaa som de «reelle Tal», existerer der ikke irreduktible Ligninger af højere end anden Grad, enhver hel algebraisk Ligning lader sig jo opløse i et Produkt af Ligninger af 1ste eller 2den Grad med reelle Koefficienter. Medens der altsaa vel existerer todimensionale kontinuerte Tal og et System af kontinuerte Kvaternioner, der simplest skrives med $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = 1$, Hamiltonske, kjendes der for Tiden ingen anden mulig Udvidelse af det kontinuerte Talbegreb. Navnlig er det sikkert, at der ikke existerer kommutative kontinuerte Tal af flere end to Dimensioner.

Dette stemmer med Udtalelser af Weierstrass (Göttinger Nachrichten 1884), uagtet Weierstrass's Ord maa synes at modsige vort Resultat. Men det tør derved ikke overses, at den Sondring imellem Tal og andre Numeralsbestemmelser, som vi have gjort, ikke er bleven iagttaget af Weierstrass, der lader sine Mangfoldigheder indbefatte baade Tilfælde, hvor der findes endelige «Divisorer til 0», og saadanne, hvor et Produkt kun kan blive 0 derved, at en af Faktorerne er 0; og som ikke synes tilbøjelig til heri at se en meget væsentlig Inddelingsgrund. Naar Weierstrass altsaa, idet han tydelig nok taler om kontinuerte kommutative Mangfoldigheder af $n$te Grad, kan gaa ud fra, at saadanne existerer for ethvert n, men at der for $n > 2$ bestandig gives «Divisorer til 0» deriblandt, saa er dette i god Overensstemmelse med, at det her benægtes, at der kan existere kommutative n-dimensionale Tal, naar $n > 2$.

Da der nu viser sig Mulighed for, at man uden Kontinuitetsaxiomet alene paa Grundlag af en Opfattelse af de rationale Tal som de nødvendige Tal kan naa saavidt, at de formelle Hovedsætninger for de algebraisk irrationale Tal kunne bevises, saa kunde man være fristet til at rejse Spørgsmaal om, hvorvidt Kontinuitetsaxiomet virkelig er nødvendigt. Jeg mener ikke, at man nogensinde for Alvor vilde falde paa at bortkaste dette Axiom, der ialtfald er et saa udmærket tidsbesparende pædagogisk Hjælpemiddel, men jeg kunde tænke mig, at En eller Anden vilde drage Axiomets strængt systematiske Nødvendighed i Tvivl. Overfor saadan Tvivl maa jeg gjøre to Bemærkninger.

Den første angaar saadanne irrationale Tal som π og e, der ikke ere Rod i nogen algebraisk Ligning af endelig Grad med rationale Koefficienter. Hvorledes skal man uden at bruge eller indsmugle Kontinuitetsaxiomet bevise, at $e\pi = \pi e$? Jeg kan tænke mig, at man vilde henvise til en Fremgangsmaade analog med den Inddeling af Tallene, som ovenfor er brugt, hvor vi sondrede mellem de Tilfælde, hvor $2 = 0$, $3 = 0$, $5 = 0 \ldots p = 0$ og

endelig i Modsætning til alle disse positive Antagelser blot forudsatte, at 0 ikke kan frembringes ved Addition af Enere. Saaledes skulde vi da her, efterat have tænkt os Beviserne førte for Tal af alle endelige Antal Dimensioner, forudsætte, at der gaves mulige Tal, som overhovedet ikke vendte tilbage til samme Form $a + b\pi + c\pi^2 + \ldots + u\pi^n$ ved enhver af de principale Regningsarter, og derved skulde vi saa søge at begrunde de kommutative Principer som en mulig Løsning. Jeg kan ikke helt afvise denne Analogi, og jeg ser ikke noget umuligt i, at de kommutative Principer kunne forenes med denne negative Forudsætning, men endnu mindre er jeg rigtignok istand til at øjne et Bevismiddel, som lod sig anvende under saadan Forudsætning; og jeg maa kræve at se dette hypothetiske Bevis, førend jeg vil tro paa, at det kan føres uden Kontinuitetsbetragtninger.

Men selv om Beviset for de kommutative Principers Gyldighed for alle mulige irrationale Tal var ført i bedste Maade uden Kontinuitetsaxiomet, blev dette dog ikke overflødigt. Thi med Beviset for de kommutative Principer have vi jo aldeles ikke faaet ordnet de irrationale Tal, indordnet dem hvert paa sin Plads imellem de rationale Tal, heri maa man dog vel kunne se et væsentligt og uerstatteligt Udbytte af Kontinuitetsaxiomet. Helt umuligt er det dog ikke at foretage en formel Indordning af de irrationale Tal i de rationales Række paa lignende Maade som den, vi have kunnet anvende ved Brøkernes Ordning. Man kunde jo saaledes vedtage at give det irrationale j fra $j^n + c_1 j^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ Plads imellem de rationale Tal, som gjøre denne Lignings venstre Side positiv og negativ; men man ser da ogsaa strax, at denne Ordning er flertydig; hver af de n Rødder kunde jo gjøre Krav paa hver af de n Pladser. Kan man nu løse Ligningen og fremstille hver Rod ved Rødder i rationale Ligninger af lavere Grad, saa kan man rigtignok reducere denne Flertydighed til vilkaarlig Fastlæggelse af visse irrationale Grundtal. Maaske kan man betragte den her antydede Vanskelighed som et teknisk Problem uden systematisk Betydning, maaske ikke.

Afgjørelsen for eller imod Kontinuitetsaxiomet søger jeg dog ikke ad disse formelle og abstrakte Veje. Jeg har ovenfor (Side 16—17) henvist til konkrete Exempler, i hvilke jeg mener at se Grupper af konkrete Forestillinger, som man ikke tør tillægge Kontinuitet, og til hvad jeg har sagt om disse Retningssystemers Forhold til de rationale Tal, kan nu føjes, at en Udvidelse til irrationale Tal er mulig (dog med specielle Undtagelser f. Ex. π) og herimod kan man jo let nok stille Exempler paa kontinuerte Forestillinger. Kan man end ikke i snævreste Forstand beraabe sig herpaa som paa egentlige Erfaringer, er det end umuligt at sige, hvorledes f. Ex. Rummet ser ud under uendelig stærk Forstørrelse, saa er Kontinuitetsaxiomet mig dog en Erfaringssætning, og overfor vore Forestillinger om Tid, Rum, m. m., er det dybt begrundet i Menneskets Natur, at der maa kunne sondres mellem væsentlig og uvæsentlig Forskjel, og selve denne Grændses flydende Natur gjør det nødvendigt at indføre Numeralerne, næsten identisk, og dermed Kontinuiteten i Mathematikken.

Førend jeg slutter dette Arbejde, maa jeg i største Korthed berøre Størrelsernes og Mængdernes særlige Forhold. Det vil allerede af det Sagte fremgaa, at jeg opfatter Forestillingerne af disse Kategorier som mere sammensatte end dem, vi særlig have givet Navn af mathematiske, og hvis Kjendetegn er, at de undtagelsesløst bestemme hinanden ved Numeraler. Tilstedeværelsen af en Forestilling om et absolut bestemt naturligt Intet i hver Art af Størrelser eller Mængder og den deraf følgende Begrændsning, hvorefter ikke enhver overhovedet brugelig Bestemmelse kan anvendes ud fra en hvilkensomhelst af Artens specielle Forestillinger, ere os de afgjørende Kjendetegn paa Størrelsernes og Mængdernes mere sammensatte Karakter. Ved Siden heraf er det ikke væsentligt, at vi af Naturen tvinges til at gjøre os fortrolige med Størrelser og Mængder længe forinden vi kunne sætte os i Forhold til de simplere Bestemmelser af Tingpunkter og andre mathematiske Forestillinger. Følgen er kun en Konflikt imellem de pædogogiske og de systematiske Fordringer, som har uheldig Virkning til begge Sider og gjør det nødvendigt, at baade den personlige Tilegnelse og den videnskabelige Fremstilling maa gaa ad Omveje og kun kan naa Maalet under gjentagen Udrensning og Tilnærmelse.

I vort System vil Størrelsernes Behandling finde deres rette Plads efter Udviklingen af Begrebet nødvendige Tal og i Forbindelse med Kontinuitetsaxiomets Opstilling. Der vil derved være at tage Hensyn til, at mange af de specielle Størrelsesforestillinger knytte sig til beslægtede mathematiske Forestillinger (f. Ex. Afstanden til Begrebet om Sted paa Linie) og fremgaa af disse ved en Abstraktion (fra Retningen); men ogsaa for de Størrelsesforestillinger, der savne slig direkte Støtte, vil man uden Vanskelighed kunne opstille Hovedreglen for Størrelsernes Behandling, at man vel kan operere med Størrelsesbestemmelserne som med egentlige Tal, men dog er forpligtet til at forkaste ethvert Resultat, hvori andre Tal end positive Tal og 0 optræde som Bestemmelser af Størrelse.

For enhver systematisk Fremstilling af Mathematiken bliver det en væsentlig Opgave at frigjøre Sprogbrugen for Reminiscenser fra den Tid, da hele Mathematiken var baseret paa Størrelses- og Mængdebegreberne. Først og fremmest maa man da undgaa vildledende Brug af disse Begrebers Navne. Udtryk som «negative eller imaginære Størrelser», der skrive sig fra Oversættelser fra Sprog, som savne et selvstændigt Ord for Tallet, bør paa Dansk og i de ligesaa heldig stillede Sprog forfølges som ligefremme Selvmodsigelser.

Det er forøvrigt ikke blot selve Ordet Størrelse, hvis Misbrug kan gjøre Skade. Ogsaa andre mindre iøienfaldende sproglige Fænomener, især Brugen af den absolut beskrivende Form, hvor den for Nemheds Skyld bruges i virkelig relative Bestemmelser, ere farlige. Dette fremtræder dog især overfor Forestillinger af Mængdernes Kategori. Uagtet vort Sprog ogsaa der er rigt nok og tillader os at stille de «hele Tal» i Modsætning til «Antallene» som de positivt hele Tal, viser dog det mere populære Begreb — Antal — sig at have saa dybe Rødder i Sproget og derigjennem i Tanken fremfor det systematisk simplere

Begreb hele Tal, at jeg, selv efter at være bleven opmærksom paa det betænkelige deri, dog ikke har kunnet undgaa den Inkonsekvens at indføre Antallene paa et meget tidligt Stadium i dette Arbejde, hvor der efter mit System kun turde tales om hele Tal. Saavidt muligt har jeg søgt at forvisse mig om, at dette kun rammede den ydre Form og ikke Sagens Kjærne. Jeg nærer saaledes ingen Betænkelighed ved i Anledning af Modsætningens og Tilføjelsens Hovedsætninger at have brugt de simpleste Talord og især ubestemte, og hvor Tilføjelser af identiske Numeraler i Bestemmelsen $\overset{n}{*}$ fremfører Antallene førend de hele Tal, der følger Supplementet $\div \overset{n}{*}$ saa umiddelbart efter, at Skaden ialtfald ikke kan være stor og vel opvejes ved den naturligere Fremstilling. Men jeg erkjender, som sagt, at den omtalte Inkonsekvens er tilstede.

Bilag I.

Funktionalligningerne for Additionen af todimensionale Tal.

Naar man angaaende Funktionalligningerne

$$\psi(x,y) + \psi(z, \varphi(x,y)) = \psi(x+z, y) = \psi(z,y) + \psi(x, \varphi(z,y)) \quad (2)$$

$$\varphi(z, \varphi(x,y)) = \varphi(x+z, y) = \varphi(x, \varphi(z,y)) \quad (3)$$

$$\psi(\psi(x,y), u) = \psi(x, y+u) = \psi(\psi(x,u), y) \quad (4)$$

$$\varphi(x,y) + \varphi(\psi(x,y), u) = \varphi(x, y+u) = \varphi(x,u) + \varphi(\psi(x,u), y)\,, \quad (5)$$

som afgive Betingelser for, at

$$yi + x = \psi(x,y) + \varphi(x,y)i\,, \quad (1)$$

(se Side 34), forudsætter, at de ubekjendte Funktioner ψ og φ kunne differentieres, kan udtømmende Bestemmelse opnaas; lettest naar man tager Hensyn til, at ifølge (1)

$$\psi(0,y) = 0, \quad (6) \quad \text{og} \quad \psi(x,0) = x\,, \quad (7),$$

$$\varphi(0,y) = y, \quad (8) \quad \text{og} \quad \varphi(x,0) = 0\,, \quad (9).$$

Differentiation af (2) og (3), hver en enkelt Gang med Hensyn til de tjenlige iblandt de 4 indbyrdes uafhængige Variable, x, y, z og u giver

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi(x,y)}{dx} + \frac{d\psi(z,\varphi(x,y))}{d\varphi(x,y)} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx} &= \frac{d\psi(z,y)}{dz} + \frac{d\psi(x,\varphi(z,y))}{d\varphi(z,y)} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dz} \\ \frac{d\psi(x,y)}{dy} + \frac{d\psi(z,\varphi(x,y))}{d\varphi(x,y)} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} &= \frac{d\psi(z,y)}{dy} + \frac{d\psi(x,\varphi(z,y))}{d\varphi(z,y)} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dy} \end{aligned}\right\} (2\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi(z,\varphi(x,y))}{d\varphi(x,y)} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dx} &= \frac{d\varphi(x,\varphi(z,y))}{d\varphi(z,y)} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dz} \\ \frac{d\varphi(z,\varphi(x,y))}{d\varphi(x,y)} \cdot \frac{d\varphi(x,y)}{dy} &= \frac{d\varphi(x,\varphi(z,y))}{d\varphi(z,y)} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dy} \end{aligned}\right\} (3\,a).$$

Hvad der her maa være os magtpaaliggende, er først og fremmest at faa elimineret de Funktioner, hvori alle tre Variable x, y og z indgaa; af saadanne findes der imidlertid 4 i vore Ligninger, saa at yderligere Differentiation kunde synes nødvendig. Paa Grund af de to sidste Ligningers (3 a) Homogenitet, er Elimination dog mulig. Man kan ikke have

$$\frac{d\varphi(z,\omega)}{d\omega} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d\varphi(x,\omega)}{d\omega} = 0,$$

thi den særlige Betingelse (8) er i Modstrid hermed, følgelig maa

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dy} = \frac{d\varphi(x,y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(z,y)}{dz}.$$

Da nu x og z ere indbyrdes uafhængige, og paa Grund af den nævnte Betingelse (8) $\varphi(0,y) = y$, maa, idet $H(y)$ betegner en foreløbig ubekjendt Funktion af y alene

$$H(y)\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \frac{d\varphi(x,y)}{dy}. \tag{2 b}$$

Men ifølge denne Ligning bestaar der yderligere en saadan Proportionalitet imellem Koefficienterne til de ubekjendte Funktioner af 3 Variable i Ligningerne (2 a), at disse ubekjendte kunne elimineres; den Mulighed, at disse ubekjendte Differentialkvotienter

$$\frac{d\psi(z,\varphi(x,y))}{d\varphi(x,y)} \quad \text{og} \quad \frac{d\psi(x,\varphi(z,y))}{d\varphi(z,y)}$$

kunde være uendelige for alle Værdier, afskæres ved vor Forudsætning om, at Funktionerne φ og ψ skulle kunne differentieres.

Multipliceres da den første Ligning (2 a) med $H(y)$ og subtraheres derfra den anden, faas $H(y)\frac{d\psi(x,y)}{dx} - \frac{d\psi(x,y)}{dy} = H(y)\frac{d\psi(z,y)}{dz} - \frac{d\psi(z,y)}{dy} = -Y,$

hvor Y betegner en ubekjendt Funktion af y alene, saaledes som den maa være paa Grund af Ligegyldigheden af, om x eller z indgaar i dens Udtryk ved ψ.

Paa aldeles analog Maade findes af Ligningerne (4)

$$K(x)\frac{d\psi(x,y)}{dy} = \frac{d\psi(x,y)}{dx} \tag{4 b}$$

og af (5)

$$K(x)\frac{d\varphi(x,y)}{dy} - \frac{d\varphi(x,y)}{dx} + X = 0, \tag{5 b}$$

hvor $K(x)$ og X ere Funktioner af x alene.

Af (2 b) og (4 b) faas nu

$$(1 - K(x)\,H(y))\frac{d\psi(x,y)}{dx} = K(x).Y,$$

$$(1 - K(x)\,H(y))\frac{d\psi(x,y)}{dy} = Y,$$

der ved den dobbelte Bestemmelse af $\frac{d^2\psi(x,y)}{dx\,dy}$, som de afgive, føre os til Betingelsen

$$K'(x).YH(y) - (K(x))^2.(YH'(y) - Y'H(y)) - K(x).Y' = 0, \tag{10}$$

hvor K' H' og Y' betegne første Differentialkvotienter. Paa samme Maade afgive (3 b) og (5 b)

$$(1 - K(x)\,H(y))\,\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = X$$

$$(1 - K(x)\,H(y))\,\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = X\,H(y),$$

som medføre en anden Betingelse

$$X\,K(x)\,.\,H'(y) - (X\,K'(x) - X'\,K(x))\,.\,(H(y))^2 - X'\,.\,H(y) = 0. \qquad (11)$$

I (10) og (11) forekommer der nu ikkun Funktioner af enkelt Variabel, og x og y optræde ved Siden af hinanden som de indbyrdes uafhængige Variable; derfor kunne disse Ligninger behandles umiddelbart efter de i Mathematisk Tidsskrift 1880 Pg. 45 givne Forskrifter; hver af dem afgiver 3 Ligninger, men oprindelig for hver Ligning under 4 forskjellige Alternativer. Kun et enkelt Alternativ er dog anvendeligt paa vort Problem, de andre staa i Strid med Betingelserne (6), (7), (8) eller (9). Det brugelige Alternativ giver for (10)'s Vedkommende Ligningerne

$$K'(x) - a(K(x))^2 - c\,K(x) = 0$$
$$Y\,H'(y) - Y'\,H(y) = a\,Y\,H(y)$$
$$Y' = c\,Y\,H(y),$$

analoge Ligninger faas fra (11), og deres samlede Resultat kan skrives

$$K'(x) = a(K(x))^2 + c\,K(x)$$
$$H'(y) = c(H(y))^2 + a\,H(y)$$
$$X' = a\,X\,K(x)$$
$$Y' = c\,Y\,H(y)$$

og heraf findes ved Integration

$$K(x) = \frac{c}{a}\,\frac{b\,e^{cx}}{1 - b\,e^{cx}}$$

$$H(y) = \frac{a}{c}\,\frac{d\,e^{ay}}{1 - d\,e^{ay}}$$

$$X = \frac{f}{1 - b\,e^{cx}}$$

$$Y = \frac{g}{1 - d\,e^{ay}},$$

hvor a, b, c, d, f og g ere arbitrære Konstanter. Indsættes nu disse Værdier i de ovenstaaende Udtryk for de første Differentialkvotienter af $\psi(x,y)$ og $\varphi(x,y)$, integreres og bestemmes Konstanterne i Overensstemmelse med Betingelserne (6), (7), (8) og (9), bliver det endelige Resultat, idet navnlig $b = d = 1$, $f = -\frac{c}{a}$, $g = -\frac{a}{c}$, at

$$e^{c\psi(x,y)} = \frac{e^{cx} + e^{ay} - 1}{e^{ay}}$$

$$e^{a\varphi(x,y)} = \frac{e^{cx} + e^{ay} - 1}{e^{cx}}$$

eller med Forandring af Konstanternes Betegnelse $e^{-a} = m$ og $e^{-c} = n$, de Side 35 angivne almindeligste Resultater:

$$n^{\psi(x,y)} = \frac{n^x}{n^x + m^y - n^x m^y} \quad \text{og} \quad m^{\varphi(x,y)} = \frac{m^y}{n^x + m^y - n^x m^y}.$$

De hypothetiske Love for Modsætnings- og Additionsafhængighederne, ere da følgende:

Er $\underline{x} + \underline{y} \,.\, i = -(x + yi)$,

maa $n^{\underline{x}} = \dfrac{m^y}{n^x + m^y - 1}$ og $m^{\underline{y}} = \dfrac{n^x}{n^x + m^y - 1}$;

og er $x + yi = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$,

da skal $n^x = \dfrac{n^{x_1+x_2}}{n^{x_2} + m^{y_1} - n^{x_2} m^{y_1}}$ og $m^y = \dfrac{m^{y_1+y_2}}{n^{x_2} + m^{y_1} - n^{x_2} m^{y_1}}$.

Disse Udtryk kunne omformes paa en mærkelig Mangfoldighed af Maader, man kan saaledes give Additionsligningerne Kjædebrøksformen

$$n^x = \cfrac{n^{x_1}}{1 - \cfrac{m^{y_1}}{1 - \cfrac{1}{1 - n^{x_2}}}} \quad \text{og} \quad m^y = \cfrac{m^{y_2}}{1 - \cfrac{n^{x_2}}{1 - \cfrac{1}{1 - m^{y_1}}}}.$$

Heldigst synes det dog at være at opgive den explicite Form og erstatte Additionsligningerne med $\dfrac{n^x}{m^y} = \dfrac{n^{x_1+x_2}}{m^{y_1+y_2}}$ og $\dfrac{1-n^x}{1-m^y} = \dfrac{(1-n^{x_1})n^{x_2} + m^{y_1}(1-n^{x_2})}{(1-m^{y_1})n^{x_2} + m^{y_1}(1-m^{y_2})}$;

i Forbindelse hermed ville følgende Dobbeltligninger for denne sidste Brøks Tæller og Nævner være os nyttige

$$(1-n^x)n^{x_1+x_2-x} = (1-n^{x_1})n^{x_2} + m^{y_1}(1-n^{x_2}) = (1-n^x)m^{y_1+y_2-y}$$
$$(1-m^y)n^{x_1+x_2-x} = (1-m^{y_1})n^{x_2} + m^{y_1}(1-m^{y_2}) = (1-m^y)m^{y_1+y_2-y}.$$

Det gjælder nemlig nu om at prøve disse hypothetiske Love ved Regningsarternes almindelige Principer, og navnlig maa vi for Additionens associative Princips Skyld udvikle Udtrykkene for en Sum af 3 Addender; men ved de to sidste Ligninger er det ingenlunde vanskeligt at se, at naar

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i) = x + yi,$$

skal $(1-n^x) \,.\, n^{x_1+x_2+x_3-x} = (1-n^{x_1})n^{x_2}n^{x_3} + m^{y_1}(1-n^{x_2})n^{x_3} + m^{y_1}m^{y_2}(1-n^{x_3})$

og $(1-m^y) \,.\, m^{y_1+y_2+y_3-y} = (1-m^{y_1})n^{x_2}n^{x_3} + m^{y_1}(1-m^{y_2})n^{x_3} + m^{y_1}m^{y_2}(1-m^{y_3})$

samt $n^{x_1+x_2+x_3-x} = m^{y_1+y_2+y_3-y}$,

og det, hvad enten man i Udtrykket for $x+yi$ stiller Parentheserne paa den ene eller den anden Maade.

Hvad Entydigheds- og Omvendingsprincipperne angaar, saa rejser der sig vel en Betænkelighed derved, at der i vore Formler indgaa Exponentialfunktioner, saa at det bliver afhængigt af, hvorledes man opfatter disse, om Udtrykkene for det modsatte Tal og Summen kunne siges at være entydige.

Men det afgjørende Bevis, for at disse hypothetiske Tal ikke kunne erkjendes for at være mulige Tal afgiver dog først deres Mangel af en Multiplikation. At en saadan ikke gives, se vi lettest ved at danne Summer af indbyrdes identiske Addender, som jo skulde være Produktet af en Addend $x_1 + y_1 i$ med Antallet til Multiplikator

$$\begin{aligned} l(x_1 + y_1 i) &= (x_1 + y_1 i) + \ldots + (x_1 + y_1 i), \ (l \text{ Addender}) \\ &= x_l + y_l i. \end{aligned}$$

Herfor finde vi nemlig sukcessivt

$$\frac{n^{x_2}}{m^{y_2}} = \left(\frac{n^{x_1}}{m^{y_1}}\right)^2 \quad \text{og} \quad \frac{1-n^{x_2}}{1-m^{y_2}} = \frac{1-n^{x_1}}{1-m^{y_1}}$$

og almindeligt

$$\frac{n^{x_l}}{m^{y_l}} = \left(\frac{n^{x_1}}{m^{y_1}}\right)^l \quad \text{og} \quad \frac{1-n^{x_l}}{1-m^{x_l}} = \frac{1-n^{x_1}}{1-m^{y_1}};$$

men heraf er det klart, at naar ikke $l = 1$, vil Multiplikanden $x_1 + y_1 i$ ikke være entydig bestemt ved Multiplikator og Produktet $x_l + y_l i$.

Hvor afgjørende denne Modsigelse end er for, at vore hypothetiske Bestemmelser her, saavel som de mere specielle Tilfælde $\psi(x,y) = x$ og $\varphi(x,y) = yn^x$ eller $\psi(x,y) = xm^y$ og $\varphi(x,y) = y$, ikke ere Tal, saa forhindrer den dog fra et andet Synspunkt ikke, at de opfattes som Bestemmelser mellem visse komplicerede Numeraler, eller efter sædvanlig Sprogbrug, at vi i disse kunne have vigtige mathematiske Symboler, beslægtede med Potenserne og indbefattende disse under sig. Opfatte vi disse $x + yi$'er som Bestemmelser ud fra et vilkaarligt Numeral, og betegne vi de Numeraler, som bestemmes ved nødvendige Tal x med $(\xi)^{\mathrm{I}}$, dem der svarer til yi med $(\eta)^{\mathrm{II}}$, hvor $\xi = n^x$ og $\eta = m^y$ kunne bruges istedet for x og y, da det ikke længer er Hensigten at den paagjældende Tilføjelse skal fastholdes som en Slags Addition, saa kunne vi med

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}}$$

betegne det ved $x + yi$ bestemte Numeral. Efter Formlerne for $\psi(x,y)$ have vi da

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} = \left(\frac{\eta}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\mathrm{II}} * \left(\frac{\xi}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\mathrm{I}}.$$

Fremdeles have vi som specielt Tegn Identitetsnumeralet $(1)^{\mathrm{I}} = (1)^{\mathrm{II}} = O$. Modsætningsloven bliver

$$\div((\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}}) = \left(\frac{\eta}{\xi + \eta - 1}\right)^{\mathrm{I}} * \left(\frac{\xi}{\xi + \eta - 1}\right)^{\mathrm{II}};$$

og for Tilføjelsesafhængigheden haves

$$((\xi_1)^{\mathrm{I}} * (\eta_1)^{\mathrm{II}}) * ((\xi_2)^{\mathrm{I}} * (\eta_2)^{\mathrm{II}}) = \left(\frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_2 + \eta_1 - \xi_2 \eta_1}\right)^{\mathrm{I}} * \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\xi_2 + \eta_1 - \xi_2 \eta_1}\right)^{\mathrm{II}}.$$

Specielt, idet alle η under Tegnet $()^{\mathrm{II}}$ sættes $= 1$ haves Potentiationsloven i videre Forstand

$$(\xi_1)^{\mathrm{I}} * (\xi_2)^{\mathrm{I}} = (\xi_1 \xi_2)^{\mathrm{I}}$$

og

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * \ldots * (\xi)^{\mathrm{I}}, \ n \text{ Tilføjelser} = (\xi^n)^{\mathrm{I}}.$$

Det er ikke vanskeligt at paavise et Exempel paa Forestillinger, der bestemmes ved Numeraler $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\xi)^{\mathrm{II}}$. Vore Forestillinger kunne hver for sig være variable Tal i visse entydige indbyrdes Afhængigheder, og deres Numeraler kunne være de Transformationer, hvorved det ene variable Tal afledes af det andet. Navnlig er Transformationen $x = \frac{a+by}{c+dy}$ en enkelt relativ og fuldstændig entydig Bestemmelse af Forestillingen om x ved Forestillingen om y, altsaa et Numeral, vi kunne udtrykke Bestemmelsen ved

$$x = A * y .$$

Fæste vi specielt Tanken paa Transformationens Dobbeltværdier eller det sædvanlige Udtryk

$$\frac{x-u}{x-v} = \xi \frac{y-u}{y-v} ,$$

kunne vi vedtage, at Numeraltegnet $(\ )^{\mathrm{I}}$ sigter til Dobbeltværdien u's Forekomst i Tællerne, v's i Nævnerne og fuldende Numeralbetegnelsen ved indenfor Parenthesen at skrive ξ som Transformationens Index; da haves altsaa $x = (\xi)^{\mathrm{I}} * y$ med Tilføjelsesloven $(\xi_1)^{\mathrm{I}} * (\xi_2)^{\mathrm{I}} = (\xi_1 \xi_2)^{\mathrm{I}}$ som ovenfor. Betragte vi nu yderligere saadanne Transformationer, for hvilke et tredie Tal w indgaar som Dobbeltværdi enten sammen med u eller med v, og vedtage vi med $(\ )^{\mathrm{II}}$ at betegne saadanne Transformationer, hvor v er sat i u's, w i v's Sted, saa at

$$y = (\eta)^{\mathrm{II}} * z \text{ udtrykker det samme som } \frac{y-v}{y-w} = \eta \frac{z-v}{z-w} ,$$

saa vil den direkte Transformation af z til x udtrykkes ved Numeralet

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} ,$$

og denne Transformation vil være almindeligt Udtryk for en saadan af disse Transformationer, hvor v er den ene Dobbeltværdi. For at Tilføjelse af saadanne almindeligere Transformationer skal kunne ske, er det tilstrækkeligt, at den sammensatte Transformation maa kunne opløses i en af hver af de simplere Slags, tagne i den modsatte Orden, eller at to Transformationsindices ξ' og η' maa kunne bestemmes, saa at

$$(\eta')^{\mathrm{II}} * (\xi')^{\mathrm{I}} = (\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} ;$$

ifølge $x = (\eta')^{\mathrm{II}} * (\xi')^{\mathrm{I}} * z$, maa da et transformeret Tal p kunne bestemmes saaledes, at

$$x = (\eta')^{\mathrm{II}} * p , \qquad p = (\xi')^{\mathrm{I}} * z$$

eller

$$\frac{x-v}{x-w} = \eta' \frac{p-v}{p-w} \text{ og } \frac{p-u}{p-v} = \xi' \frac{z-u}{z-v} .$$

Men ved Elimination af $\frac{1}{y-v}$ ved ovenstaaende, $\frac{1}{p-v}$ af disse Ligninger, faas to Udtryk for Relationen mellem x og z, nemlig

$$\frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{x-v} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{1}{u-v} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{z-v} + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \frac{1}{w-v}$$

og

$$\eta' \cdot \frac{1}{x-v} - (1-\xi') \cdot \frac{1}{u-v} = \xi' \cdot \frac{1}{z-v} - (1-\eta') \frac{1}{w-v} ,$$

hvis Identitet kræver, at en Faktor r kan bestemmes saaledes, at

$$\eta' = \frac{r}{\xi}, \quad \xi' - 1 = r\left(1 - \frac{1}{\xi}\right), \quad \xi' = \frac{r}{\eta} \quad \text{og} \quad \eta' - 1 = r\left(1 - \frac{1}{\eta}\right),$$

hvilket kun fører til følgende to Ligninger for ξ' og η'

$$\xi\eta' = \eta\xi' = \xi' + \eta' - 1,$$

der give

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi + \eta - \xi\eta} \quad \text{og} \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi + \eta - \xi\eta}.$$

Af Overensstemmelsen med disse Resultater kunne vi slutte, at vore ovenfor fundne abstrakte mulige Numeraler have direkte Anvendelse paa saadanne Transformationer ved Brøker af første Grad, hvor et vilkaarligt Tal v konstant er den ene Dobbeltværdi.

Vedtage vi yderligere at lade $(\zeta)^{\text{III}}$ betegne Transformationen

$$\frac{z - w}{z - u} = \zeta\frac{x' - w}{x' - u},$$

altsaa med den tredie mulige cykliske Kombination af Dobbeltværdier i to af de tre Tal u, v og w, vil den med

$$(\xi)^{\text{I}} * (\eta)^{\text{II}} * (\zeta)^{\text{III}}$$

betegnede Transformation have samme Grad af Almindelighed som $x = \frac{a + bx'}{c + dx'}$, og vise os et Exempel paa ternære Numeraler, som kan beherskes ved de udviklede Midler til at omordne de enkelte. Thi ligesom vi have fundet, at

$$(\xi)^{\text{I}} * (\eta)^{\text{II}} = \left(\frac{\eta}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\text{II}} * \left(\frac{\xi}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\text{I}}$$

og omvendt have

$$(\eta)^{\text{II}} * (\xi)^{\text{I}} = \left(\frac{\xi + \eta - 1}{\eta}\right)^{\text{I}} * \left(\frac{\xi + \eta - 1}{\xi}\right)^{\text{II}}$$

haves ogsaa

$$(\zeta)^{\text{III}} * (\eta)^{\text{II}} = \left(\frac{\eta + \zeta - 1}{\zeta}\right)^{\text{II}} * \left(\frac{\eta + \zeta - 1}{\eta}\right)^{\text{III}}$$

og

$$(\xi)^{\text{I}} * (\zeta)^{\text{III}} = \left(\frac{\zeta + \xi - 1}{\xi}\right)^{\text{III}} * \left(\frac{\zeta + \xi - 1}{\zeta}\right)^{\text{I}}.$$

Skal man da udføre Tilføjelsen

$$((\xi_1)^{\text{I}} * (\eta_1)^{\text{II}} * (\zeta_1)^{\text{III}}) * ((\xi_2)^{\text{I}} * (\eta_2)^{\text{II}} * (\zeta_2)^{\text{III}})$$

saa udføres dette ved tre suksessive Omordninger til

$$\begin{aligned}
&(\xi_1)^{\text{I}} * (\eta_1)^{\text{II}} * (\xi_2')^{\text{I}} * (\zeta_2')^{\text{III}} * (\eta_2)^{\text{II}} * (\zeta_2)^{\text{III}} = \\
&= ((\xi_1)^{\text{I}} * (\xi_2'')^{\text{I}}) * ((\eta_1'')^{\text{II}} * (\eta_2''')^{\text{II}}) * ((\zeta_1''')^{\text{III}} * (\zeta_2)^{\text{III}}) = \\
&= (\xi_1\xi_2'')^{\text{I}} * (\eta_1''\eta_2''')^{\text{II}} * (\zeta_1'''\zeta_2)^{\text{III}}.
\end{aligned}$$

Hvad der er udviklet i dette Bilag har vistnok ikke ringe Betydning overfor en kritisk Vurdering af den ikke-Euklidiske Geometri. Paa dette Sted skal jeg dog herom kun

bemærke, at saafremt man for Plangeometriens Vedkommende vil erstatte Euklids Axiomsystem, med hvad der efter det Udviklede maa betegnes som et mere systematisk Axiomsystem, og maaske ogsaa et naturligere, om det end efter vore Sprogs ensidige Udvikling er mindre bekvemt til Undervisning —, nemlig indskrænke Plan-Geometriens særlige Axiomer til et «fiat applicatio», hvorved Punktets Sted i Planen (eller Fladen) erklæres for en mathematisk Forestilling, som bestemmes ved benævnte Tal, Beliggenhedsforskjel, hvis tilsvarende ubenævnte Tal ere af den kontinuerte Art med to virkelige Dimensioner, og saaledes, at ∞ efter frit Valg kan betegne enten et fra Planen undtaget Punkt eller en ret Linie (= Undersystem af 1 Dimension), da er Parallelaxiomet hermed bevisligt, som Additionens kommutative Princip.

Bilag II.

Om *n*-dimensionale Tals Multiplikation.

Hvis man enten forudsætter Additionens kommutative Princip, eller indskrænker sig til at behandle de Tilfælde, i hvilke det bevislig gjælder, er det som omtalt Side 41 tilstrækkeligt til Udvikling af Multiplikationens (og Reciprocitetens) Love at bestemme de $n(n-1)$ ubekjendte Funktioner i nødvendige Tal, som udtrykke det almindelige, hypothetiske, n-dimensionale Tals Produkter med Multiplikatorerne $i, \ldots k$ som n-dimensionale Tal

$$i(x+yi+\ldots+uk) = x'+y'i+\ldots+u'k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k(x+yi+\ldots+uk) = x^{(n-1)}+y^{(n-1)}i+\ldots+u^{(n-1)}k.$$

Bestemmelsen af $x', y', \ldots u' \ldots$ og $x^{(n-1)}, y^{(n-1)} \ldots u^{(n-1)}$ som Funktioner af $x, y, \ldots u$, er den Opgave, som vi stille os i dette Bilag. Tilfældet $n = 3$ vil være tilstrækkelig oplysende, saa at vi kunne nøjes med at give Formlerne for dette specielle Tilfælde som Repræsentant for det almindelige.

Naar altsaa

$$i(x+yi+zk) = x'+y'i+z'k$$
$$k(x+yi+zk) = x''+y''i+z''k,$$

kunne vi bestemme Produktet af to Faktorer

$$x_{2,1}+y_{2,1}i+z_{2,1}k = (x_2+y_2i+z_2k).(x_1+y_1i+z_1k)$$

ved

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= x_2 x_1 + y_2 x_1' + z_2 x_1'' \\ y_{2,1} &= x^2 y_1 + y_2 y_1' + z_2 y_1'' \\ z_{2,1} &= x_2 z_1 + y_2 z_1' + z_2 z_1'' . \end{aligned}$$

Ifølge det associative Princip er endvidere

$$i(x_{2,1} + y_{2,1} i + z_{2,1} k) = (x_2' + y_2' i + z_2' k) . (x_1 + y_1 i + z_1 k)$$

og

$$k(x_{2,1} + y_{2,1} i + z_{2,1} k) = (x_2'' + y_2'' i + z_2'' k) . (x_1 + y_1 i + z_1 k)$$

$$\begin{aligned} x_{2,1}' &= x_2' x_1 + y_2' x_1' + z_2, x_1'' \\ y_{2,1}' &= x_2' y_1 + y_2' y_1' + z_2' y_1'' \\ z_{2,1}' &= x_2' z_1 + y_2' z_1' + z_2' z_1'' , \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x_{2,1}'' &= x_2'' x_1 + y_2'' x_1' + z_2'' x_1'' \\ y_{2,1}'' &= x_2'' y_1 + y_2'' y_1' + z_2'' y_1'' \\ z_{2,1}'' &= x_2'' z_1 + y_2'' z_1' + z_2'' z_1'' . \end{aligned}$$

Hermed kunne vi nu udvikle Ligningerne for Produktet af tre Faktorer og altsaa komme til det almindelige Udtryk for det associative Princip.

$$\begin{aligned} X + Yi + Zk &= ((x_3 + y_3 i + z_3 k) . (x_2 + y_2 i + z_2 k)) . (x_1 + y_1 i + z_1 k) = \\ &= (x_3 + y_3 i + z_3 k) . ((x_2 + y_2 i + z_2 k) . (x_1 + y_1 i + z_1 k)) \end{aligned}$$

giver, idet

$$\begin{aligned} x_{3,2} &= x_3 x_2 + y_3 x_2' + z_3 x_2'' \\ y_{3,2} &= x_3 y_2 + y_3 y_2' + z_3 y_2'' \\ z_{3,2} &= x_3 z_2 + y_3 z_2' + z_3 z_2'' , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= x_{3,2} x_1 + y_{3,2} x_1' + z_{3,2} x_1'' = x_3 x_{2,1} + y_3 x_{2,1}' + z_3 x_{2,1}'' \\ Y &= x_{3,2} y_1 + y_{3,2} y_1' + z_{3,2} y_1'' = x_3 y_{2,1} + y_3 y_{2,1}' + z_3 y_{2,1}'' \\ Z &= x_{3,2} z_1 + y_{3,2} z_1' + z_{3,2} z_1'' = x_3 z_{2,1} + y_3 z_{2,1}' + z_3 z_{2,1}'' , \end{aligned}$$

som ved Indsættelse af de ovenstaaende Udtryk for de dobbelt-markerede Tal, ere de $3 = n$ Funktionalligninger til Bestemmelse af x', y', z', x'', y'' og z''.

Vi forudsætte, at alle disse Funktioner kunne differentieres, og ville, da x_1, y_1, z_1 samt x_2, y_2, z_2 samt x_3, y_3 og z_3 alle $3n$ ere indbyrdes uafhængige, blot ved enkelt Differentiation med Hensyn til hver Variabel kunne opstille en overflødig Mængde Ligninger. Vanskeligheden bestaar netop i denne Overflødighed, men det træffer sig saa heldigt, at det vil være tilstrækkeligt at udlede Funktionaldeterminanterne for X, Y og Z med Hensyn til hvert af de med Indices 1, 2 og 3 betegnede Systemer af Variable (her er 3 ikke $= n$).

For Kortheds Skyld ville vi i det følgende betegne Determinanterne med deres Diagonalrække imellem $| \, |$, og skrive altsaa

$$|x;\ y';\ z''| = \begin{vmatrix} x, & x', & x'' \\ y, & y', & y'' \\ z, & z', & z'' \end{vmatrix} .$$

Tillige bruge vi Betegnelsen $(s\,()\,x_r,\ y_r,\ z_r)^3 =$

$$= \begin{vmatrix} x_r + y_r\frac{dx_s'}{dx_s} + z_r\frac{dx_s''}{dx_s}, & y_r\frac{dy_s'}{dx_s} + z_r\frac{dy_s''}{dx_s}, & y_r\frac{dz_s'}{dx_s} + z_r\frac{dz_s''}{dx_s} \\ y_r\frac{dx_s'}{dy_s} + z_r\frac{dx''}{dy_s}, & x_r + y_r\frac{dy_s'}{dy_s} + z_r\frac{dy_s''}{dy_s}, & y_r\frac{dz_s'}{dy_s} + z_r\frac{dz_s''}{dy_s} \\ y_r\frac{dx_s'}{dz_s} + z_r\frac{dx_s''}{dz_s}, & y_r\frac{dy_s'}{dz_s} + z_r\frac{dy_s''}{dz_s}, & x_r + y_r\frac{dz_s'}{dz_s} + z_r\frac{dz_s''}{dz_s} \end{vmatrix}$$

for at fremhæve denne Funktionaldeterminants Egenskab som en homogen hel algebraisk Funktion af x_r, y_r og z_r af samme Grad som Dimensionernes Antal og med Koefficienter, der ere Funktioner af Differentialkvotienter med Index s.

Betragte vi da x_3, y_3 og z_3 som de uafhængige Variable i X, Y og Z, faa vi

$$\left|\frac{dX}{dx_3};\ \frac{dY}{dy_3};\ \frac{dZ}{dz_3}\right| = \left|x_1;\ y_1';\ z_1''\right| \cdot \left|x_2;\ y_2';\ z_2''\right| = \left|x_{2,1};\ y_{2,1}';\ z_{2,1}''\right| ,$$

en Ligning, som forøvrig ogsaa uden Differentiation kan findes af ovenstaaende Ligninger.

Dannes Funktionaldeterminanten for X, Y, Z som afhængige af x_2, y_2, z_2, findes

$$\left|\frac{dX}{dx_2};\ \frac{dY}{dy_2};\ \frac{dZ}{dz_2}\right| = \left|x_1;\ y_1';\ z_1''\right| . (2\,()\,x_3,\ y_3,\ z_3)^3 = (2,1\,()\,x_3,\ y_3,\ z_3)^3 \cdot \left|x_1;\ y_1';\ z_1''\right| .$$

Og endelig findes med Hensyn til x_1, y_1, z_1 som uafhængige Variable

$$\left|\frac{dX}{dx_1};\ \frac{dY}{dy_1};\ \frac{dZ}{dz_1}\right| = (1\,()\,x_{3,2},\ y_{3,2},\ z_{3,2})^3 = (2,1\,()\,x_3,\ y_3,\ z_3)^3 \cdot (1\,()\,x_2,\ y_2,\ z_2)^3 .$$

Af disse tre Ligninger vilde nu den førstnævnte og anden kunne tilfredsstilles ved i Almindelighed at sætte $|x;\ y';\ z''| = 0$. Men heri kan vi ikke søge nogen Løsning, thi af

$$\begin{aligned} x'' &= px + qx' \\ y'' &= py + qy' \\ z'' &= pz + qz' \end{aligned}$$

vilde følge

$$k = p + qi ,$$

men det er forudsat, at Tallene ere tredimensionale, og at k ikke kan bringes paa den todimensionale Form $p + qi$. Altsaa maa anden Ligning tilfredsstilles ved

$$(2\,()\,x_3,\ y_3,\ z_3)^3 = (2,1\,()\,x_3,\ y_3,\ x_3)^3 .$$

Følgelig skulle disse Funktioner med samme Variable x_3, y_3, z_3 være identiske, uagtet Koefficienterne ere Funktioner af to helt uafhængige Sæt Variable x_2, y_2, z_2 og $x_{2,1}$, $y_{2,1}$ og $z_{2,1}$ (med vilkaarlig valgte Værdier af disse skal man jo kunne bestemme x_1, y_1 og z_1).

Konklusionen bliver, at Koefficienterne alle maa være konstante, og dette kunne vi udtrykke ved at skrive

$$(s\,(\,)\,x_r, y_r, z_r)^3 = \{x_r, y_r, z_r\}^3.$$

Vor tredie Ligning giver derfor ogsaa

$$\{x_{3,2}, y_{3,2}, z_{3,2}\}^3 = \{x_3, y_3, z_3\}^3 \cdot \{x_2, y_2, z_2\}^3.$$

Nu er imidlertid $x_{3,2}$, $y_{3,2}$, $z_{3,2}$ lineære homogene Transformationer af x_3, y_3 og z_3

$$x_{3,2} = x_3x_2 + y_3x_2' + z_3x_2''$$
$$y_{3,2} = x_3y_2 + y_3y_2' + z_3y_2''$$
$$z_{3,2} = x_3z_2 + y_3z_2' + z_3z_2''.$$

Følgelig maa — og dette gjælder for n Dimensioner saavel som for 3 — den hele algebraiske, homogene Funktion

$$\{x, y, \ldots, u\}^n,$$

som er af $n$te Grad med n Variable, være en saadan, at den, afset fra en ligegyldig Faktor, kan transformeres til sig selv paa lineær, homogen Maade. De Betingelser, som saadanne Transformationer maa være underkastede, ville, da Transformations-Koefficienterne ere

$$\begin{matrix} x_2 & x_2' & x_2'' & \ldots \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \ldots \\ z_2 & z_2' & z_2'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

vise, hvilke de søgte Afhængigheder ere, hvori de markerede $x, y, z, \ldots$ staa til de umarkerede, og altsaa afgive Løsningen af vor Opgave.

Hvad der i Almindelighed kan siges herom er da navnlig, at Funktionen $\{x, y, \ldots u\}^n$ maa kunne transformeres paa uendelig mange Maader, eftersom x_2, y_2, $\ldots u_2$ skulle være aldeles vilkaarlige nødvendige Tal. Der er nu to Klasser af Funktioner, som her kunne komme i Betragtning, nemlig; 1) Produkter af n homogene lineære Funktioner af de n Variable x, y, $\ldots u$; og 2) Potenser af Graden $\frac{n}{2}$ af én anden Grads Funktion af samme Variable. I det første Tilfælde gjenfinder man de Tal af hvilkesomhelst n Dimensioner, for hvilke ogsaa Multiplikationen er kommutativ. Det andet Tilfælde, som forudsætter, at n er lige, kjende vi i dets to simpleste Tilfælde; for $n = 2$ falder det sammen med førnævnte, for $n = 4$ kan det vises at give Kvaternionerne; om det ud derover lader sig realisere navnlig for $n = 6$ eller $n = 8$, er mig ubekjendt.

Med Hensyn til de kommutative Tals Behandling ud fra dette Synspunkt er der dog endnu en Bemærkning at gjøre. Betegne vi med ξ, η, $\ldots v$ de lineære Faktorer i $\{x, y, \ldots u\}^n$, altsaa

$$\xi = a_1 x + b_1 y + \ldots + d_1 u$$
$$\eta = a_2 x + b_2 y + \ldots + d_2 u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v = a_n x + b_n y + \ldots + d_n u,$$

og overføre Indices fra $x, \ldots u$ paa $\xi, \ldots v$, saa vil Transformationssætningen,

$$\xi_{3,2} \cdot \eta_{3,2} \cdots v_{3,2} = (\xi_3 \cdot \eta_3 \cdots v_3) \cdot (\xi_2 \cdot \eta_2 \cdots v_2)$$

fornemmelig være at søge løst ved

$$\xi_{3,2} = \xi_3 \cdot \xi_2, \quad \eta_{3,2} = \eta_3 \cdot \eta_2, \ \ldots \ v_{3,2} = v_3 \cdot v_2,$$

og her ligger navnlig det kommutative Princip overordentlig nær. Men Bevisførelsen ad denne Vej er meget udsat for en «circulus vitiosus». Hvis man ikke skal lægge selve den Sætning, der skal bevises, ind i Forudsætningerne, maa det fremhæves, at Koefficienterne $a_1, \ldots d_n$ skulle være om ikke nødvendige Tal, saa dog Tal, hvis Mulighed forud er bevist, det samme gjælder da ogsaa om $\xi, \eta, \ldots v$. Men selv om vi forudsætte, at Koefficienterne i $\{x, y, \ldots u\}^n$ ere nødvendige Tal, vil man dog i Almindelighed maatte anse $a_1 \ldots d_n$ for afhængige af en $n$te Grads Lignings Rødder, dog saaledes, at vi, da Koefficienten til x^n i $\{x, y, \ldots u\}^n$ er $= 1$, kunne sætte

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1.$$

Lad os for at oplyse Sagen imidlertid antage, at Koefficienterne alle vare nødvendige Tal. Da vilde man kunne erstatte Systemet af Grundtallene $1, i, \ldots k$ med et andet, $E, I, \ldots K$, saaledes, at

$$1 = E + I + \ldots + K$$
$$i = b_1 E + b_2 I + \ldots + b_n K$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k = d_1 E + d_2 I + \ldots + d_n K$$

og derved kunne omskrive det almindelige hypothetiske Tal af n Dimensioner saaledes:

$$x + yi + \ldots + uk = \xi . E + \eta . I + \ldots + v . K;$$

og for den sidste Form have den af Weierstrass fremhævede Multiplikationslov

$$(\xi_2 E + \eta_2 I + \ldots + v_2 K)(\xi_1 E + \eta_1 I + \ldots + v_1 K) = \xi_2 \xi_1 . E + \eta_2 \eta_1 . I + \ldots + v_2 v_1 . K,$$

hvorved det, da $\xi, \eta, \ldots v$ vare nødvendige Tal, maatte være muligt, at et Produkt kunde blive $= 0$, uden at nogen af Faktorerne var det.

Men naar $1 = E + I + \ldots + K$, vil ethvert nødvendigt Tal a have Formen

$$a = aE + aI + \ldots + aK,$$

og man vilde være berettiget til at vente, at enhver Forskjel i Koefficienternes nødvendige Talværdier maatte frembringe et fra de nødvendige Tal forskjelligt Tal, f. Ex.

$$i = b_1 E + b_2 I + \ldots + b_n K.$$

Danne vi nu Potenserne af dette i, vil

$$i^r = b_1^r E + b_2^r I + \ldots + b_n^r K$$

indtil

$$i^n = b_1^n E + b_2^n I + \ldots + b_n^n K;$$

multiplicere vi nu disse Ligninger med Koefficienterne til den Ligning, hvis Rødder ere de nødvendige Tal b_1, b_2 ... b_n, og addere, finde vi, at ogsaa i maa tilfredsstille denne Ligning,

$$i^n - [b] i^{n-1} + [bb] i^{n-2} + \ldots \pm b_1 b_2 \ldots b_n = 0.$$

Den simpleste Fortolkning var da, at i skulde være et af de nødvendige Tal $b_1 \ldots b_n$, og for at dette ikke skulde fremkalde Mangetydighed i Udtrykkene for de nødvendige Tal, idet f. Ex.

$$b_1 E + b_1 I + \ldots + b_1 K = b_1 E + b_2 I + \ldots + b_n K = b_1,$$

vilde det være nødvendigt i Overensstemmelse med den simple Fortolkning af Ligningerne $E.E = E$, $I.I = I$, ... $K.K = K$, at erkjende, at et af disse Grundtal, her E, var $= 1$, medens de øvrige $I = \ldots = K = 0$.

Jeg ser meget vel, at man paa dette Omraade ikke ubetinget kan paaberaabe sig den Sætning, at en Ligning af $n$te Grad kun har n Rødder; men skal man opgive denne, vil det idetmindste være nødvendigt at anføre positive Grunde derfor. Men Følgen af, at man trods ovenstaaende Ligning fordrede i anerkjendt som forskjelligt fra b_1, b_2, ... b_n, og fra alle nødvendige Tal, vilde kun være, at man ved Siden af hvert nødvendigt Tal maatte stille en Mangfoldighed af hypothetiske Tal, som, uagtet der ikke kunde paavises nogen Forskjel overfor nogensomhelst Ligning, Formel eller Sætning dog vilkaarlig skulde anses som forskjellige indbyrdes og fra det nødvendige Tal.

Og tillade vi os nu, da vi ad anden Vej have set, at man kan regne med irrationale og imaginære Rødder i algebraiske Ligninger efter ganske samme Principer som med de nødvendige Tal, at anse Koefficienterne b_1, b_2 ... b_n i

$$i = b_1 E + b_2 I \ldots + b_n K$$

for selv at være Tal af n Dimensioner, saa bliver Resultatet ganske det samme, i optræder som Rod i den Ligning af $n$te Grad, som har Rødderne b_1, b_2, ... b_n. Et Sted maa man dog standse med den rent fiktive Opstilling af nye Tal, og der reducerer hele Betydningen af sidst anførte Ligning sig til, at man kan skrive en vilkaarlig blandt n givne Rødder som en Sum af Rødderne, hver multipliceret med et Tal, der paa et vilkaarligt Sted i Summen skal læses som 1, paa de øvrige $n - 1$ Steder som 0.

Heraf vil det være klart, hvorfor jeg ikke har turdet benyttet Formen

$$\xi E + \eta I + \ldots + v K$$

i mine Beviser (navnlig Side 42).